

a302147



T
62-05
UAK
GAR
Sale

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Contribución al análisis de problemas
electromagnéticos mediante el Método de los
Momentos con bajo coste computacional**

Eliseo García García

TESIS DOCTORAL

Alcala de Henares 2005

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ REGISTRO GENERAL SECCIÓN II	
17 MAR. 2005	
ENTRADA Nº 4402	SALIDA Nº

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Contribución al análisis de problemas
electromagnéticos mediante el Método de los
Momentos con bajo coste computacional**

Autor: Eliseo García García

Director: M. Felipe Cátedra Pérez

Tesis Doctoral presentada en la
Universidad de Alcalá para la obtención del
Título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Alcalá de Henares 2005

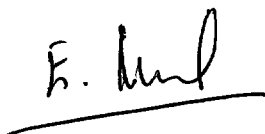
D. Manuel Felipe Cátedra Pérez, Catedrático de Universidad del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá

HACE CONSTAR

Que la tesis titulada *Contribución al análisis de problemas electromagnéticos mediante el Método de los Momentos con bajo coste computacional*, presentada por Eliseo García García, para optar al grado de Doctor en “*Información, documentación y conocimiento*”, ha sido realizado en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá bajo mi dirección y que reúne las condiciones exigidas a los trabajos de Doctorado.

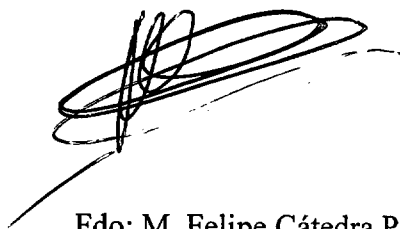
Alcalá de Henares, Febrero 2005

Directora del Departamento



Fdo.: Enriqueta Muel Muel

Director de Tesis



Fdo: M. Felipe Cátedra Pérez

A mi familia.

A Laura.

Agradecimientos

En este apartado quisiera expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho que la realización de este trabajo sea una realidad.

En primer lugar, y sin lugar a dudas, quisiera agradecer sincera y profundamente a Felipe Cátedra la oportunidad que me brindó de incorporarme a su grupo de investigación, por todo lo que ha supuesto para mí tanto en lo académico como en lo profesional. Agradezco también su apoyo, dedicación, ayuda y solícita disposición ante mis dudas.

También deseo expresar mi gratitud a Francisco Sáez de Adana tanto por los consejos y ayuda recibida tanto en el desarrollo de esta tesis, como por la prestada durante el Proyecto Fin de Carrera. Quisiera enmendar con este agradecimiento aquél que, por falta de tiempo, no le dediqué entonces.

Dentro del grupo de investigación, mostrar mi agradecimiento a todos sus miembros, tanto a los que están ahora, como Iván, Oscar, Javier, Luis Emilio, José Manuel, Lorena, Carlos, Raúl, etc. como a aquellos que ya no están pero con los que compartí buenos momentos de trabajo, como Justo, Sergio, y, como no, mi gran compañero y amigo Pablo.

Agradecer también a Lorena, Carlos, Raúl, Pedro, José Manuel Rubio, María Jesús García, Esther García, ... tantos y tantos trámites que, siendo imposible para mí llevarlos a cabo por diversas circunstancias, no pusieron objeción en ayudarme a realizarlos.

Saliéndome del ámbito universitario, quisiera dar las gracias por el constante apoyo que me ha ofrecido, sobre todo, mi familia y amigos. Y, por supuesto, para finalizar acordarme, como siempre, de Laura...

A todos,

GRACIAS.

Resumen

La presente tesis está relacionada con el desarrollo de técnicas numéricas cuyo objeto será analizar el comportamiento de antenas embarcadas en geometrías 3D perfectamente conductoras con forma totalmente arbitraria. Una de las técnicas más populares empleadas para analizar problemas de radiación y *scattering* es el Método de los Momentos (MoM). Este método tiene un alto coste computacional cuando el caso a analizar es grande eléctricamente. Por lo tanto, en esta tesis se ha pretendido implementar métodos suficientemente eficientes y versátiles que superen esta limitación del MoM, de forma que el diseñador de antenas embarcadas obtenga rápidamente aquellas configuraciones que satisfagan las especificaciones de diseño relacionadas con diagramas de radiación, factores de acoplo entre antenas,...

La representación geométrica, utilizada para modelar fielmente y sin demasiada información las estructuras 3D, está basada en un conjunto de superficies paramétricas denominadas NURBS. La mayoría de los sistemas comerciales de CADG (Computer Aided Geometric Design) en el mercado incorporan este tipo de formato como salida standard para modelar cuerpos. Entonces se puede trabajar directamente con el formato que dichas herramientas proporcionan. En el desarrollo de la tesis se implementó un método que pretende superar el problema del cálculo de parámetros geométricos en superficies NURBS degeneradas.

Existen formulaciones del MoM aplicadas al electromagnetismo que utilizan como funciones base las funciones rooftops de corriente y como funciones prueba, la

función cuchilla (razor blaze). Dentro del trabajo desarrollado, una de las principales contribuciones se encuentra en la formulación de una nueva función prueba para discretizar la ecuación integral de campo magnético (MFIE) que supera ciertas limitaciones de la función razor blaze aplicada a subdominios próximos a aristas.

También se ha aplicado una formulación aproximada, tanto en la ecuación integral de campo eléctrico (EFIE), como en la de campo magnético (MFIE) y en la combinada (CFIE), consistente en la representación de la corriente por momentos dipolares eléctricos equivalentes con lo que se simplifica notoriamente la evaluación de cada acoplo de la matriz (Técnica de Momentos Dipolares, MD). La eficiencia computacional es conseguida, sobre todo en memoria, debido a que la matriz de acoplos se calcula en cada iteración del método y no es almacenada. Notorias reducciones de consumo de memoria se ha conseguido respecto a MoM sin que los resultados varíen significativamente.

Otro método presentado para combinar el MoM con el mismo objetivo es el Método Rápido de los Multipolos (*FMM*). Esta es una aproximación aplicada al cálculo de los acoplos cuando los subdominios se encuentran a una distancia grande. Se consigue reducir los requisitos de memoria necesarios al analizar cuerpos eléctricamente grandes calculando los términos de acoplo mediante *FMM*.

Otra de las contribuciones más importantes de esta tesis es la aplicación al MoM de nuevos métodos de resolución de ecuaciones. El propósito es reducir el tiempo de ejecución. Existen herramientas que resuelven el sistema de ecuaciones que genera la discretización en el MoM mediante el CGM. Este es un método que asegura la convergencia, pero que ante casos con gran número de incógnitas requiere de mucho tiempo de ejecución. En esta tesis se propone el método SIM-AR, que reduce el número de iteraciones necesarias así como el tiempo de ejecución. Además se muestra la forma de combinación con el método de MD y con el método FMM, con lo que se consigue reducir también la necesidad de memoria.

Al final de la memoria se presentan una serie de conclusiones sobre los aspectos más relevantes de la misma. Pensamos que los más importante de todo es la reducción tanto en necesidad de memoria como en tiempo de ejecución del MoM tradicional.

Abstract

The present thesis is related with the development of numerical techniques which purpose is focused on the analysis of boarded antennas on 3D perfectly conductive geometries which shape can become totally arbitrary. One of the more popular techniques employed to analyze radiation and scattering problems is the Method of Moments (MoM). This method has a high computational cost when the electrical size of the structure increases. Therefore, this thesis shows a way to implement a efficient and versatile method that overcome this limitation of the MoM, to allow the designer of boarded antennas the fast determination of those configurations that satisfy the specifications in terms of radiation patterns, coupling factors couple among antennas,...

The geometric representation, used to model the 3D structures accurately and without too much information, is based on a set of parametric surfaces named NURBS. Most of the CAGD (Computer Aided Geometric Design) software packages available on the market incorporate this format as the standard output in order to describe the body. That provides the advantage of working directly with the format generated by this tools. In the development of the thesis a method was implemented with the purpose to overcome the problem of the calculation of geometric parameters in degenerated NURBS surfaces.

It exist some electromagnetism formulations based on MoM that use current rooftops as base functions and razor blaze as weighting functions. In the developed work, one of the main contributions is the formulation of a new weighting function to

discretize the magnetic field integral equation (MFIE) that overcomes certain limitations of the razor blade function when acting over subdomains next to edges.

An approximated formulation has also been applied, so much in the electric field integral equation (EFIE), like in the magnetic field integral equation (MFIE) and in the combined one (CFIE), consisting in the representation of the induced current by means of equivalent electric dipole moments, that simplifies notoriously the evaluation of each coupling factor (Dipolar Moments Technique, MD). The computational efficiency is achieved, mainly in memory, due to the calculation of the complete coupling matrix at each step of the iterative method. Important reductions in memory storage are achieved respect to the MoM, with the results behaving in a similar way.

Another method presented to combine with MoM trying to achieve the same advantage is the Fast Multipole Method (FMM). It is based on an approach to the far away subdomains coupling. Applying FMM is possible to reduce the requirements on memory storage when the electrical size of the structure increases.

Another of the most important contributions in this thesis is the application to the MoM of new equations resolution methods. The purpose is focused on the reduction of the execution time. It exists a lot of CGM based tools that solve the equations system that generates the MoM discretization. This is a method that assures convergence, but it requires of a lot of execution time when the number of unknowns is big. In this thesis, SIM-AR method is presented, that reduces the number of necessary iterations as well as the execution time. The way to combine this method with MD or FMM techniques is shown in this thesis. In this way, it is possible to reduce memory storage too.

At the end of the memory, conclusions about the most outstanding points developed is presented. We think that the most important is the reduction in memory storage and execution time achieved respect to the traditional MoM.

Indice

1.-Introducción.....	1.1
1.1.- Objetivos.....	1.2
1.2.- Técnicas numéricas.....	1.6
1.3.- Modelado de sólidos.....	1.10
1.4.- Estructura de la tesis.....	1.11
1.5 Referencias	1.13
2.-Representación de la geometría.....	2.1
2.1 Introducción.....	2.2
2.2 Descripción geométrica de los cuerpos y cálculo de los parámetros geométricos.....	2.4
2.3 Curvas de Bezier racionales	2.9
2.4 Curvas B-Spline racionales.....	2.14
2.5 Superficies de Bezier racionales.....	2.19
2.6 Superficies B-Splines racionales.....	2.26
2.7 Calculo de derivadas parametricas en curvas NURBS.....	2.28
2.8 Cálculo de las derivadas parametricas en superficies NURBS	2.30
2.9 Cálculo de vectores normales unitarios en las superficies NURBS.....	2.33
2.10 Transformación de superficies NURBS en parches de Bezier.....	2.33
2.11 Superficies degeneradas	2.37
2.12 Referencias.....	2.49

3.- Método de los Momentos.....	3.1
3.1.- Ecuación Integral.....	3.2
3.2.- Método de los Momentos.....	3.10
3.3.- Funciones base y funciones prueba.....	3.13
3.3.1.- Discretización de corriente y concepto de lado.....	3.13
3.3.2.- Funciones base.....	3.15
3.3.2.1.- Funciones rooftop sobre superficies paramétricas.....	3.16
3.3.3.- Funciones prueba.....	3.18
3.4.- Matriz de impedancias.....	3.25
3.4.1.- Matriz de impedancias de EFIE.....	3.26
3.4.1.1.- Término inductivo.....	3.26
3.4.1.2.- Término capacitivo.....	3.27
3.4.2.- Matriz de impedancias de MFIE.....	3.28
3.4.2.1.- Introducción a la nueva función peso:	3.31
3.4.2.2.- Validación de la nueva función peso.....	3.42
3.5.- Problemas en el MONURBS y SIMCOR	3.45
3.6 Referencias	3.47
4. Aproximación de los Momentos Dipolares.....	4.1
4.1.- Aproximación de momentos dipolares aplicado a la MFIE..	4.2
4.2 Aproximación del operador de MFIE.....	4.7
4.3. Aproximación de momentos dipolares aplicado a la EFIE.....	4.11
4.4. Referencias	4.13
5. Método Rápido de los Multipolos.....	5.1
5.1.- Introducción.....	5.1
5.2.- Método Rápido de los Multipolos bidimensional.....	5.3
5.2.1.- Presentación del problema.....	5.4
5.2.2.- Descripción más rigurosa.....	5.6
5.2.3.- Teorema de la adición.....	5.8
5.2.4.- Una factorización ineficiente de la función de Green.....	5.10

5.2.5.- Diagonalización del operador de traslación.....	5.13
5.2.6.- Interpretación física de los operadores.....	5.16
5.2.7.- Otra forma de ver el problema.....	5.16
5.3.- <i>FMM</i> en tres dimensiones.....	5.18
5.3.1.- Ecuaciones integrales y el método de los momentos.....	5.18
5.3.2.- Método Rápido de los Multipolos tridimensional...	5.19
5.3.3.- Breve análisis de errores en el FMM.....	5.22
5.4.- Aplicación al modelado de sólidos	5.22
5.5.- Resumen.....	5.24
5.6.- Referencias	5.25
6. Métodos Iterativos.....	6.1
6.1.- Método del Gradiente Conjugado.....	6.2
6.2.- Método Iterativo Esparcido.....	6.7
6.3.- <i>SIM</i> con Relajación Adaptativa.....	6.10
6.4.- <i>SIM</i> con relajación versión 2.....	6.13
6.5.- Un caso práctico	6.17
6.6.- Combinación de métodos iterativos con la técnica de los Momentos dipolares.....	6.21
6.7.- Combinación de métodos iterativos con la técnica de Multipolos.....	6.23
6.8.- Referencias.....	6.25
7. Solución de Combined Field Integral Equation.....	7.1
7.1.- Desarrollo.....	7.2
7.2.- Aproximación de momentos dipolares y FMM en CFIE.....	7.3
7.3.- Diagrama de flujo.....	7.4
7.4.-Referencias.....	7.8

8. Resultados.....	8.1
8.1.- Validación de la aproximación de momentos dipolares en la EFIE.....	8.2
8.2.- Comparación de coste computacional entre EFIE rigurosa y la aproximación de momentos dipolares	8.17
8.3.- Comparación entre método CGM y SIM en la aproximación de momentos bipolares	8.19
8.4.- Comparación entre MoM tradicional con CGM y MD con SIM-AR.....	8.22
8.5.- Validación de MFIE y CFIE con la aproximación de momentos dipolares.....	8.24
9. Conclusiones.....	9.1
9.1.- Conclusiones.....	9.1
9.2.- Futuras líneas de trabajo	9.3

1. Introducción

El auge de los sistemas informáticos en las últimas décadas ha dado pie a un gran número de nuevas posibilidades en todos los campos de la ingeniería. Así, ingenieros de todo el mundo han venido ideando desde hace años nuevos algoritmos, nuevos modelos o, en definitiva, nuevas maneras de adaptar el pensamiento al potencial que ofrecen los ordenadores. En este sentido el empleo de las computadoras como grandes máquinas de cálculo ha sido una de las más importantes ayudas a la ingeniería, puesto que ha permitido, entre otras muchas cosas, contrastar con métodos más rigurosos los resultados de cuanto se hacía antes, por imperiosa necesidad, con métodos aproximados. Precisamente, el electromagnetismo es una de las materias que más se ha beneficiado de la evolución informática y es ya frecuente oír hablar de electromagnetismo computacional como una rama más de la ingeniería.

1.1.- Objetivos.

El problema electromagnético es un asunto de total actualidad, y de profundas aplicaciones prácticas. Desde el estudio de la propagación en entornos cerrados al análisis del efecto que el cuerpo sobre el que se embarca una antena produce sobre el diagrama de radiación de la misma, pasando por la comprobación de la compatibilidad electromagnética de los productos del mercado o por el diseño de las paredes del futuro para que cumplan con los requisitos que exijan las comunicaciones domésticas, encontramos un abanico de casi infinitos temas que suscitan el interés del mundo académico, industrial y empresarial.

De entre todos estos temas, este trabajo tratará la dispersión de ondas electromagnéticas en presencia de superficies conductoras de forma arbitraria, así como el estudio de antenas embarcadas sobre cuerpos también de forma arbitraria.

Existen diferentes formas de realizar este estudio

- *Medidas sobre la estructura real:*

Consiste en realizar medidas experimentales -por ejemplo, de diagrama de radiación de antenas embarcadas-, sobre el blanco para los cortes y direcciones de interés. Sin embargo esto no siempre es posible y cuando lo es, resulta siempre más costoso, tanto temporal como económicamente, que hacer uso de una herramienta de análisis por ordenador que puede permitir, además, realizar modificaciones y cambios inmediatos. Si la estructura se trata de un modelo real de un avión, este estudio solo puede ser justificado en casos excepcionales, ya que según donde esté colocada la antena, puede llegar a ser incluso necesario que sean desmontadas algunas partes del avión, con el consiguiente problema que supone.

- *Medidas sobre estructuras a escala:*

Se trabaja con proporciones comprendidas normalmente desde 1:7 a 1:40; sin embargo, el efecto de las secciones no metálicas de la estructura es difícil de caracterizar. El modelo a escala se suele construir sobre una base de

madera recubierta de una lámina de cobre. Otra de las limitaciones de este método, es que el precio de un buen modelo resulta moderadamente elevado.

- *Medidas obtenidas en pruebas de vuelo:*

Su principal inconveniente es que estas medidas no miden estrictamente el funcionamiento de la antena embarcada, sino que se mide el comportamiento general del sistema. Además se llevan a cabo de forma que la señal recibida está solamente unos pocos grados por encima de la horizontal, por lo que se pueden inducir errores, ya que normalmente se producen reflexiones espúreas, debido a la presencia del suelo, que distorsionan la medida.

- *Calculo computacional de la interacción antena-estructura:*

Al realizar el estudio de este modo, el examen de la antena se puede determinar en una etapa previa del diseño del sistema, con lo que se permite la investigación de posiciones alternativas de la antena y poder evitar problemas potenciales con la suficiente anticipación. Permite, además, realizar modificaciones y cambios inmediatos. Posteriormente, si hay que añadir nuevos sistemas, se podrá analizar el efecto de estos sobre los ya instalados.

Siempre que la herramienta utilizada sea eficiente, el tiempo y coste empleados van a ser mucho menor que los necesarios para cualquiera de los tres métodos de medida anteriores. La necesidad de esta eficiencia computacional es lo que ha impulsado el desarrollo de métodos que utilizan diversas técnicas electromagnéticas.

Por este motivo en este trabajo se tenderá a este estudio electromagnético mediante simulaciones con ordenador ya que no en vano los ordenadores posibilitan el uso de técnicas numéricas para el análisis eficiente de problemas electromagnéticos.

Esta claro que no se puede obviar la tarea de medida final, pero este proceso ya no será tan intensivo ni requerirá tantos recursos económicos como los que se necesitarían para realizar tareas de diseño basadas únicamente en medidas y en técnicas de "prueba y error".

A la hora de elegir que método computacional utilizar, debemos tener en cuenta algunos factores importantes, como son:

- que el rango de operación del método se adecue al del problema.
- nivel de precisión que permita el método.
- facilidad de implementación.
- requisitos hardware necesarios para llevarlo a cabo.

Todos estos métodos tendrán un punto de partida común, teóricamente hablando, que son las ecuaciones de Maxwell. La diferencia básica radicará en la forma de implementar la solución.

Se pueden utilizar diversos criterios a la hora de comparar los métodos; como por ejemplo, basándose en el almacenamiento y tiempo de cálculo que necesitan, viendo en ese caso los siguientes métodos:

- *Métodos de Elementos Volumétricos:*

Necesitan más memoria que ningún otro método, debido a que realizan una subdivisión en cada una de las 3 direcciones del espacio. La ventaja que presentan es que debido a esa división 3D, el material de la estructura puede variar de elemento a elemento. En un volumen fijo V , el número de muestras N , es proporcional a V/λ^3 donde λ es la longitud de onda. Además, si se quisiera analizar en el dominio del tiempo, se necesitaría realizar un muestreo adicional en esa dimensión. A la hora del análisis de antenas, el mayor problema que presentan estos métodos, aparece para calcular el campo lejano, debido a que hay que discretizar todo el espacio que rodea a la estructura, con el aumento de recursos computacionales que supone. A este tipo de métodos, pertenecen el TLM (*TLM, Transmisión Line Matriz*), FDTD (*FDTD, Finite Difference Time Domain*)[1], MM (*MM, Mode-Matching*) y el FE (*FE, Finite Element*)[2].

- *Métodos de los Elementos Superficiales:*

Son los que siguen a los anteriores en necesidad de almacenamiento, aunque estos lo que dividen es solamente la superficie de la estructura, por lo que se divide

el mallado a 2D. Debido a esto son claramente los más apropiados para el tratamiento de estructuras conductoras. Dentro de este tipo se pueden incluir: MoM (*MoM, Method of Moments*) [3][4] y la PO (*PO, Physical Optics*)[5][6].

- *Métodos de Rayos:*

En estos las necesidades de almacenamiento se ven reducidas al mínimo, por lo que no suponen un problema, contrastando con los anteriores. Se basan en el trazado de rayos que son reflejados y difractados por el objeto. Los coeficientes de reflexión que se deben utilizar, dependen de la superficie, tanto de su geometría como del material que la conforma. El tiempo de ejecución viene limitado por el trazado de rayos y, dependiendo de la geometría y del tipo de efecto a considerar, puede ser bastante elevado. Estos métodos son difícilmente aplicables a estructuras con dimensiones menores que $1,0 \lambda$; aunque si hablamos de estructuras complejas, el tamaño límite alcanza las 5λ . Dentro de estos métodos podemos incluir: la GO (*GO, Geometrical Optics*)[7], y la GTD (*GTD, Geometrical Theory of Diffraction*)[8], junto con su versión mejorada, la UTD (*UTD, Uniform Theory of Diffraction*).

Este tipo de trabajo, no sólo es útil para el estudio de antenas embarcadas. También se puede utilizar para otro área de trabajo relacionada con el emplazamiento y diseño de antenas, como es la del análisis de la propagación con el objeto de caracterizar el canal de comunicación en transmisiones vía radio y a partir de él, ubicar las estaciones base que conformarán la red celular. Esto es debido a que para este tipo de entornos, ya no se pueden utilizar métodos estadísticos de propagación tabulados para una serie de “entornos tipo”, sino que hay que realizar un estudio del entorno real que rodea a la estación base. En entornos abiertos, es válido el uso de técnicas de alta frecuencia ya que el tamaño de los objetos es lo suficientemente elevado, pero de cara a entornos interiores, estas técnicas pierden su validez, ya que el tamaño eléctrico disminuye, por lo que se aplican métodos integrales.

Una buena caracterización del canal de propagación es indispensable a la hora de realizar un buen diseño, ya que permite estudiar y diseñar, que códigos, modulaciones, etc. son más indicados para utilizar.

Por tanto, todo este contexto de trabajo, es el que motiva el estudio y desarrollo de nuevas técnicas numéricas que ayuden en el análisis de este tipo de problemas.

1.2.- Técnicas numéricas.

Cualquier fenómeno electromagnético se puede derivar de las ecuaciones de Maxwell. Pero ocurre que cuando, para un caso particular, la resolución analítica o exacta de las mismas se hace muy difícil o imposible, es necesario recurrir a lo que denominamos técnicas numéricas. Hablamos en plural puesto que no existe una técnica numérica única que sea capaz de solucionar cualquier problema electromagnético que se le presente. Buena parte de la culpa de esto radica en el tamaño eléctrico del caso que estamos tratando, ya que cuando una perturbación electromagnética incide sobre la superficie de un cuerpo se inducen sobre éste unas determinadas corrientes eléctricas y magnéticas para cuya obtención es importante el tamaño eléctrico del objeto.

En efecto si la longitud de onda de la señal incidente es mucho menor que las dimensiones del cuerpo, la corriente en un punto dado tiene carácter local y solo depende de la corriente que se sitúa en un entorno próximo al punto. Pero cuando el tamaño del objeto es comparable a la longitud de onda, la corriente en un punto depende de la corriente en el resto de puntos de la estructura y no tiene, por tanto carácter local. Atendiendo a este comportamiento podemos dividir las técnicas numéricas en dos categorías básicas:

1.- Métodos asintóticos o de alta frecuencia.

Son los que se aplican en el primer caso. En estas circunstancias los objetos están fuertemente desacoplados lo que posibilita analizar cada parte por separado y sumar coherentemente la contribución de cada una de las partes. A diferencia de las técnicas rigurosas que veremos más adelante, se trata de técnicas aproximadas pero son más precisas cuanto mayor es el tamaño eléctrico de la estructura. Dentro de este grupo encontramos:

Óptica Geométrica (GO):

Asume que la energía se propaga a lo largo de trayectorias especiales denominadas rayos de acuerdo con el principio de Fermat [7]. Los rayos reflejados y refractados se generan según la ley de Snell. Proporciona errores para superficies curvas y no considera dependencia de la frecuencia del campo *scattering*. Tampoco tiene en cuenta fenómenos de difracción.

Óptica Física (PO):

Determina el campo dispersado por un blanco asumiendo que el campo en la superficie es el mismo que el de *GO*. Predice la dependencia del campo dispersado con la frecuencia y es aplicable a cualquier tipo de superficies (planas y curvas) aunque no tiene en cuenta las discontinuidades en los bordes[5][6].

Teoría Geométrica de la Difracción (GTD):

Se puede considerar como una extensión de *GO* en la que los rayos difractados se introducen mediante la generalización del principio de Fermat[8].

Teoría Física de la Difracción (PTD):

Asimismo se puede mejorar la aproximación de *PO* añadiendo un término de corriente. De esta forma, la corriente total inducida en la superficie del cuerpo viene dada por las corrientes debidas a *PO* y unas nuevas corrientes que den cuenta de las discontinuidades del cuerpo[9].

2.- Métodos rigurosos o de baja frecuencia.

Se aplican en el segundo caso y tratan de resolver con rigor y sin aproximaciones las ecuaciones de Maxwell. La manera de afrontar esta resolución rigurosa se basa en la discretización de la ecuación a la que se llega tras aplicar las condiciones de contorno del problema particular que se analiza.

Según formulemos las ecuaciones de Maxwell de manera diferencial o integral llegaremos a un grupo de técnicas numéricas u otro:

Métodos integrales.

La discretización conduce a un sistema de ecuaciones lineales cuya solución permite obtener la distribución de corrientes sobre subdominios en los que se divide la superficie conductora. Dentro de este apartado tenemos el Método del Gradiente Conjugado con la Transformada Rápida de Fourier (*CGM-FFT*) [10][11][12] y el Método de los Momentos[4][5].

Métodos diferenciales.

En este apartado se engloban el Método de los Elementos Finitos (*FE*) [2]y el Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (*FD-TD*)[1]. En ambos se define una malla volumétrica de puntos que contiene la estructura bajo estudio. Las incógnitas que se manejan son los campos **E** y **H** en cada una de las celdas. Dado que estos métodos están formulados de forma que se cumplan unas determinadas condiciones de contorno, son especialmente indicados para regiones cerradas.

3.- Técnicas híbridas:.

Existen diversas técnicas que aprovechan y combinan las ventajas de las técnicas de alta y baja frecuencia. Las combinaciones pueden ser muy variadas y la conveniencia de una combinación u otra dependerá de la naturaleza del problema a resolver.

En definitiva, los métodos rigurosos son más exactos pero la carga computacional aumenta exponencialmente al aumentar la frecuencia por lo que cuando esto ocurre se recurre a métodos asintóticos o híbridos. Por otra parte, no se oculta que aunque los métodos de baja frecuencia se denominan también rigurosos, no lo son tanto porque las soluciones presentan errores debidos a la propia discretización.

Otra clasificación clásica que se aplica a las técnicas electromagnéticas utilizadas es si el método es de estimación de campo o si es de estimación de corriente.

- Métodos basados en la estimación de rayos o de campo:

Hacen uso intensivo de trazado de rayos que pueden suponer una tarea realmente laboriosa cuando se tienen que caracterizar estructuras de forma arbitraria, representando este uno de los grandes problemas de los métodos de Alta Frecuencia tales como el GO-UTD.

- Métodos basados en la estimación de la corriente:

Conocidos en literatura inglesa como "*current-based methods*". Estos métodos evitan el uso del trazado de rayos y se centran en obtener la corriente inducida sobre la superficie de la estructura. Para su formulación numérica, dicha corriente es muestreada sobre la superficie de la estructura utilizando las denominadas funciones base.

De entre las diferentes técnicas numéricas existentes, una de las más empleadas es el Método de los Momentos (MoM). Se trata de un método basado en la estimación de corriente. Este trabajo está basado en este método. Dos pueden ser las ecuaciones que se pueden formular y resolver sobre la estructura: la Ecuación Integral del Campo Eléctrico (*EFIE, Electric Field Integral Equation*) y la Ecuación Integral del Campo Magnético (*MFIE, Magnetic Field Integral Equation*). Cada ecuación integral plantea diferentes condiciones de contorno sobre la estructura: en la EFIE, el campo tangencial eléctrico total debe ser nulo sobre la superficie de la estructura perfectamente conductora (*PEC, Perfectly Electric Conductor*), mientras que la MFIE fuerza la condición de contorno que se establecen con las componentes tangenciales del campo magnético. De modo que una vez formulada y resuelta la ecuación integral, la solución obtenida es la corriente eléctrica inducida en la estructura con lo que la caracterización de esta última, a efectos de radiación, puede ser inmediata.

Como anunciamos anteriormente, el MoM juega un papel importante en este trabajo. Justamente, se toma como punto de partida unos programas ya desarrollados

denominados MONURBS y SIMCOR, que implementa el MoM para el análisis del *scattering* y antenas embarcadas, resolviendo las ecuaciones EFIE y MFIE, respectivamente. El objetivo principal de esta tesis será mejorar ambos programas en dos puntos esenciales: la etapa de cálculo de la matriz de acoplos y la etapa de resolución del sistema de ecuaciones. Para la mejora de la primera etapa aplicaremos el cálculo de acoplos mediante el Método de Momentos Dipolares, a la vez que se propondrán unas nuevas funciones test que mejoran los resultados de este cálculo. En cambio, para la mejora de la segunda se buscarán métodos iterativos alternativos al del Gradiente Conjugado que es el ya implementado.

1.3.- Modelado de sólidos.

El tiempo requerido para cada simulación de la herramienta, no solo depende de la técnica electromagnética utilizada, también se debe considerar el asociado a la entrada y salida de información. La flexibilidad y el ahorro de memoria que se pueda conseguir a la hora de suministrar la información de datos y geometría a la herramienta de cálculo electromagnético redundará en una disminución del tiempo y almacenamiento necesario.

Hemos anunciado que en este proyecto los cuerpos bajo estudio pueden tener una forma arbitraria. ¿De qué manera se consigue esto? Históricamente, en una primera aproximación las estructuras que se querían analizar eran modelizadas por cuerpos canónicos como esferas, cilindros, prismas,... lo que da buenos resultados para unas pocas estructuras sencillas. Posteriormente se comenzaron a utilizar facetas planas para aproximar los objetos. Se ampliaba así el número de estructuras que se podían analizar con resultados válidos; sin embargo conservamos el problema para estructuras complejas. La solución definitiva pasa por el uso de superficies curvas paramétricas y dentro de ellas los parches NURBS [13][14]. Los parches NURBS son los empleados para el modelado geométrico por los programas por lo que más adelante también hablaremos de ellos con más profundidad, pero anotemos antes sus principales ventajas:

- **Generalidad.**

Cualquier superficie arbitraria puede ser descrita en formato de parches NURBS con total precisión.

- **Concisión.**

Respecto a los tradicionales esquemas de modelado, el modelo de parches NURBS precisa siempre menos superficies para representar un cuerpo dado.

- **Flexibilidad.**

El diseñador tiene un control local sobre la superficie: modificar una parte de la misma no se propaga al resto de la superficie. Además, las superficies NURBS son invariantes ante transformaciones afines (rotaciones y traslaciones).

Una aportación importante de esta tesis es el tratamiento que se realiza para evitar el problema de superficies NURBS degeneradas. Existe una limitación con respecto a las superficies NURBS que consiste en que no se pueden calcular ciertos parámetros geométricos sobre posibles puntos degenerados de dichas superficies. En el capítulo 2.11 se estudia una forma de superar esta limitación que ofrece buenos resultados.

Pese a lo que pueda parecer, y como veremos en el siguiente capítulo, la descripción matemática de un parche NURBS no es una tarea excesivamente complicada.

1.4.- Estructura de la tesis

Tras este capítulo de introducción veremos un segundo capítulo en el que nos adentraremos en la investigación de los parches NURBS como medio empleado en las herramientas para modelar los sólidos.

El siguiente capítulo nos llevará al estudio del Método de los Momentos como forma de abordar la resolución de la ecuación integral de campo eléctrico y la ecuación

integral de campo magnético, a las que llegamos tras imponer las condiciones de contorno oportunas a las ecuaciones de Maxwell para resolver problemas de *scattering*. En este mismo capítulo veremos que le ocurre al MoM cuando se encara a casos grandes.

Esos problemas pasan por el cálculo de la matriz de acoplos y la resolución del sistema de ecuaciones. En el capítulo 4 hablaremos de la solución al primer problema, presentando así la técnica de Momentos Dipolares. Otra técnica que solventa el problema del cálculo de la matriz de acoplos es la técnica de Multipolos, cuyo estudio se abordará en el capítulo 5. Por su parte el capítulo 6 estará dedicado a la búsqueda de un método iterativo alternativo al del Gradiente Conjugado (*CG*) lo que supone hablar del Método Iterativo Esparcido (*SIM*) y su versión con relajación (*SIM-AR*).

En los capítulos mencionados anteriormente se desarrolla el método para el cálculo de la ecuación integral de campo eléctrico (*EFIE*) y la ecuación integral de campo magnético (*MFIE*). En el capítulo 7 se abordará el cálculo de la ecuación integral de campo combinada (*CFIE*) basada en la técnica de Momentos Dipolares, que aporta facilidades a la hora de desarrollar el cálculo de la *CFIE*.

Finalmente en el capítulo 8 mostraremos resultados que validan las mejoras introducidas y el capítulo final quedará reservado para las conclusiones.

El interés de las aportaciones desarrolladas en esta memoria se ha puesto de manifiesto por las publicaciones sobre el tema realizadas en diversos congresos, tanto nacionales como internacionales, así como en revistas de difusión internacional.

- [1] A. Taflove, K.R. Umashankar. "The finite-Difference Time-Domain Method for Numerical Modelling of Electromagnetic Wave Interactions with Arbitrary Structures" Capitulo 8, pp 287-373 de "Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering" (PIER 2 of Progress in Electromagnetic Research series), Editado por J. A. Kong, Elsevier, 1990.
- [2] M. A. Morgan.. "Principles of Finite Methods in Electromagnetics Scattering". Capitulo 1, pp. 1-68, de "Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering" (PIER 2 of Progress in Electromagnetic Research series), Editado por J. A. Kong, Elsevier, 1990.
- [3] R.F. Harrington. Field Computation by Moment Methods. MacMillan, New York, 1968.
- [4] R.F. Harrington. Matrix Methods for Field Problems. Proceedings of the IEEE, Vol. 55, No.2 pp 136-149, February 1967.
- [5] O.M. Conde, "*Contribución al Estudio del Comportamiento de Antenas Embarcadas Empleando Técnicas Integrales y Asintóticas*", Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Santander, 1999.
- [6] J.A Stratton. "*Electromagnetic Theory*". MacGraw-Hill, New York 1941.
- [7] G.A. Deschamps. "*Ray Techniques in Electromagnetics*". Proceedings of the IEEE, Vol. 62, No. 9, pp. 1022-1035, September 1962.
- [8] J.B. Keller. "Geometrical theory of Diffraction". Jour. Opt. Soc. Of Amer., Vol.52, No. 2, pp 116-130, February 1972.
- [9] E.F. Knott. "A progression of High-Frequency RCS Prediction Techniques". Proc. IEEE, Vol. 73, No. 2, pp.252-264. February 1985.

[10] M.F. Cátedra, J.E. Cuevas, L. Nuño. "A Scheme to Analyze Conducting Plates Resonant Size using the Conjugate Gradient Method and the Fast Fourier Transform". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-36, No.12, pp. 1744-1752. December 1988.

[11] M.F. Cátedra, E. Gago, L. Nuño. "A Numerical Scheme to Analyze Obtain the RCS of Three-Dimensional Bodies of Resonant Size using the Conjugate Gradient Method and the Fast Fourier Transform". *IEEE Press (Radar Cross Section of Complex Objects*, pp. 140-149. Editado por W. Ross Stone, 1989.

[12] M.F. Cátedra, F. Ruiz, E. Gago. "Analysis of Arbitrary Metallic Surfaces Conformed to a Circular Cylinder using the Conjugate Gradient Method and the Fast Fourier Transform (CG-FFT) Method". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-38, No.2, pp. 286-289. February 1990.

[13]W. Boehm. "Generating the Bezier points of B-Spline curves and Surfaces" *Computed Aided Design* 13 (16), 1981, pp.365-366.

[14]R. T. Farouki, V.T. Rajan. "On the numerical condition of polynomials in Bernstein form" *Computed Aided Geometry Design* 4, pp.1991-2160, 1987.

[15] F. Saez de Adana, S. Nieves, E. García, I. González, O. Gutiérrez, M.F. Cátedra. "Calculation of the RCS from the Double Reflection between Plane Facets and Curved Surfaces". *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*. Vol. 51 Pag. 2509-2512. Septiembre 2003

[16] E. García, F. Saez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. "A Novel Approach for the Computation of the EFIE with a Low Computational Cost". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 4 pags. en CDROM. Onio, USA, 22-27 Junio 2002.

[17] F. Saez de Adana , S. Nieves, E. García, I. González, O. Gutiérrez, M.F. Cátedra. "Calculation of the RCS from the Double Reflection between Plane Facets and Curved

Surfaces”. *USCN/URSI National Radio Science Meeting*. Pag. 18. Boston, USA, 8-13 Julio 2001.

[18] F. Saez de Adana, P. Lozano, E. García, L. Lozano, I. González, M.F. Cátedra. “A Fast Method to Calculate the Radar Cross Section of Cavities”. *USCN/URSI National Radio Science Meeting*. Pag. 101. Boston, USA, 8-13 Julio 2001.

[19] E. García, F. Saez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. “Nueva Aproximación para el Cálculo de la CFIE con Bajo Coste Computacional”. *XVIII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*. 4 pags. en CDROM. La Coruña, 10-12 Septiembre 2003.

[20] E. García, M.F. Cátedra. “Aplicación de un método basado en GTD a la propagación en túneles”. *XVII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*. Alcalá de Henares, Septiembre de 2002.

[21] E. García, M. Manzano, D. Amorós, M.F. Cátedra. “Proceso iterativo para la resolución de la ecuación integral de campo magnético mediante el método de los momentos”. *XVII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*. Alcalá de Henares, Septiembre de 2002.

2. Representación de la geometría

Las herramientas MONURBS y SIMCOR, que es el punto de partida de este trabajo, modela los cuerpos con los que trabaja empleando parches NURBS. En este capítulo veremos diferentes modelos geométricos, pero nos centraremos en las superficies paramétricas curvas, y en particular en las de Bézier y las NURBS. Pero éstas no son más que una generalización en dos dimensiones de la representación de curvas, así que parece lógico caracterizar primero las curvas NURBS y de Bézier y extender luego al caso bidimensional.

2.1 Introducción

Para proceder al análisis numérico de un problema de interacción entre antenas y estructuras sobre las que estas van ubicadas, son necesarios unos determinados datos de entrada:

- Modelo geométrico, sirve para representar numéricamente la estructura sobre la que se sitúa la antena.
- Modelo de antena, que realiza la labor de representar a la antena propiamente dicha.

El cálculo de interacciones electromagnéticas entre cuerpos de formas complejas precisa de un modelado realista de su geometría, especialmente en el caso de blancos eléctricamente grandes. No serviría de nada disponer de métodos electromagnéticos eficientes si se aplican sobre modelos de geometrías inadecuados. Las técnicas de modelado de blancos han ido evolucionando desde los clásicos modelos de primitivas hasta los actuales modelos de fronteras mediante parches planos o mediante parches curvos.

Hasta el momento, el método mas utilizado es el de fronteras con facetas planas. Se basa en la aproximación de la superficie del objeto mediante parches planos poligonales. En el electromagnetismo, esta forma de modelado se ha usado con éxito tanto para la resolución de problemas mediante métodos rigurosos como mediante técnicas de alta frecuencia. Ejemplos del primer caso son las aplicaciones del método de los momentos sobre modelos de facetas triangulares, rectangulares o poligonales arbitrarias. En el ámbito de la alta frecuencia los modelos de parches planos son muy utilizados cuando se usa la Física Optica (PO) debido a la facilidad de su aplicación sobre facetas planas.

Ultimamente se está comenzando a extender el uso de los modelos de fronteras con superficies paramétricas curvas para la representación geométrica de cuerpos en problemas electromagnéticos. Concretamente, en el campo de la computación

electromagnética se están utilizando las superficies NURBS [1] para el modelado de blancos en sustitución de las técnicas clásicas tanto para métodos rigurosos como en alta frecuencia. El modelado de sólidos mediante estas superficies está muy extendido en las industrias aeronáutica, naval, automovilística, etc. tanto en los procesos de diseño como de fabricación, ya que presenta grandes ventajas en el modelado de cuerpos complejos. En estas industrias se diseñan y fabrican la mayoría de los objetos susceptibles de ser detectados por sistemas radar como aviones, satélites, barcos, vehículos terrestres, etc. En este trabajo se utiliza el método de fronteras con parches NURBS.

Un parche NURBS, o por comodidad un NURBS, es sencillamente una superficie curva. Se describe matemáticamente mediante una serie de puntos localizados en el espacio denominados *vértices* o *puntos de control*. Veremos más adelante la conveniencia de, una vez modelada la estructura con superficies NURBS, realizar la transformación de las mismas a superficies de Bézier, que no son más que un caso particular de las anteriores.

Mediante esta técnica es posible describir eficientemente cualquier tipo de superficies con una cantidad de información relativamente pequeña respecto a otras formas de modelado. Hoy en día, la mayoría de los paquetes modernos de CAGD (Computer Aided Geometric Design, Diseño geométrico asistido por ordenador) proporcionan descripciones de los cuerpos en términos de curvas y superficies NURBS. Una idea de la gran popularidad la da el hecho de que sean entidades estándar en el formato IGES (Initial Graphics Exchange Specification) [2].

Todo esto justifica el uso del modelo de fronteras con superficies NURBS para la descripción de la geometría de los blancos radar y de antenas embarcadas, y consecuentemente, el desarrollo de métodos de aplicación de las técnicas clásicas del electromagnetismo sobre estos modelos.

2.2 Descripción geométrica de los cuerpos y cálculo de los parámetros geométricos

Mediante el modelado de sólidos los matemáticos han intentado representar numéricamente cualquier objeto del mundo real. Como fruto de su investigación a lo largo del tiempo, se ha llegado a diferentes formas de modelar estructuras.

A la hora de resolver el problema de la representación numérica de curvas en el espacio a partir de una serie de puntos dado se puede optar por una de las siguientes soluciones:

1.- Interpolación.

La curva pasa por todos los puntos especificados pero no se garantiza una transición suave por lo que la curva puede oscilar de forma desordenada entre dos de los puntos a los que interpola.

2.- Aproximación:

Ahora no se asegura que la curva pase por todos los puntos indicados pero se consigue que se acerque a todos en su conjunto y que no oscile desordenadamente, sino de forma suave y continua entre dos puntos a aproximar. De entre las familias de curvas aproximantes destacan las de Coons, Bézier o las NURBS.

En la actualidad, esta última técnica es soportada por la mayoría de los sistemas CAGD modernos. Este método se basa en la descripción de la superficie del cuerpo. Es especialmente adecuado para cuerpos homogéneos donde la superficie determina, sin ambigüedad, la forma del sólido. Esto es adecuado para aplicaciones donde las propiedades internas del cuerpo no son importantes, esto es, solo la geometría y el material de la superficie son los datos de interés. En este trabajo, consideraremos únicamente cuerpos conductores perfectos, por lo que únicamente una descripción de la

geometría de la superficie será necesaria para aplicar estas técnicas. Hay seis grandes categorías de métodos de modelado de cuerpos sólidos 3D:

- Formas parametrizadas (parametriced shapes)
- Descomposición celular (cell decomposition)
- Modelo de barridos (sweep representation)
- Geometría sólida constructiva(constructive solid geometry, CSG)
- Modelo de fronteras(Boundary representation)
- Modelo de alambres(Wireframes)

De entre todas ellas, veremos el modelo de hilos por ser uno de los primeros en emplearse y el modelo de fronteras que es el que engloba a los parches NURBS. Por otra parte, de los seis métodos, el modelo de bordes y el CSG son los más importantes para los sistemas de modelado actuales. En este documento se abordará la técnica de representación del modelo de fronteras.

Modelo de hilos (wireframe)

Es el más viejo y simple esquema de modelado. Es el primero que se utilizó, a finales de la década de los 60, para el análisis de problemas electromagnéticos aplicando el MoM. Esta manera de modelar define un cuerpo mediante líneas, no mediante sus superficies. Así, los datos geométricos que es necesario almacenar para construir este modelo son los vértices inicial y final que definen esas líneas, además de algunos datos topológicos del cuerpo. El principal problema de este modelo es la ambigüedad, ya que un mismo modelo puede corresponder a dos objetos diferentes tal y como se puede ver en la siguiente figura, donde el modelo puede representar a varios objetos con el mismo número de aristas y superficies

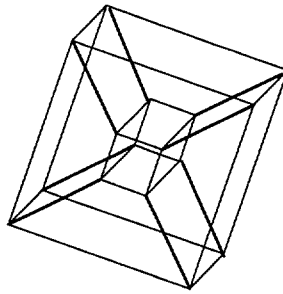


Figura 2.1 Ambigüedad en el modelo de hilos

Modelo de fronteras (B-rep)

Se trata de la técnica más empleada en la actualidad para representar sólidos. La B-rep de un objeto describe los elementos geométricos que definen su frontera exterior: superficies, aristas o vértices.

En el método de fronteras, la superficie del cuerpo se descompone en un conjunto de parches (o superficies elementales) que unidas forman la superficie total. Por ello, la información siguiente debe ser tenida en cuenta:

- Descripción individual de las superficies o parches elementales
- Información de topología.

La información de topología indica el modo de conexión o unión de los parches individuales para formar la superficie total del cuerpo. Algunas veces esta información no está directamente disponible y debe ser obtenida de la descripción de los parches individuales.

Existen dos tipos principales de formatos para describir los parches elementales, que son las facetas poligonales planas y las superficies paramétricas. La primera opción es la más simple, ya que los parches se describen únicamente con las coordenadas de los vértices. Esta es adecuada particularmente para el modelado de cuerpos con facetas planas, pero no para superficies curvas. En este caso, el uso de parches paramétricos es

indispensable para obtener una descripción del cuerpo altamente precisa con un razonable número de parches. Para cuerpos híbridos, esto es, que contengan tanto facetas planas y curvas, las superficies paramétricas son más adecuadas ya que los parches planos son un caso particular de superficies paramétricas. Por eso, el trabajo se centrará en los modelos de representación de fronteras basados en superficies paramétricas, siendo las más populares las superficies NURBS, que son las utilizadas en este trabajo.

Las superficies pueden ser planas o curvas:

1.- Modelo de fronteras mediante facetas planas.

La superficie del objeto se aproxima mediante un conjunto de placas planas poligonales que se conectan entre sí mediante aristas rectas. La representación planar ha sido muy utilizada hasta los últimos años -en que la representación curva ha ido reemplazándola- ya que con un conjunto finito de polígonos planos se puede modelar cualquier superficie. Sin embargo, si la estructura es compleja y arbitraria el número de facetas para obtener una representación realista es muy elevado. Además, este modelo es dependiente de la frecuencia, ya que a medida que aumenta la misma es necesario ajustar más el modelo.

2.- Representación por parches paramétricos curvos.

Con esta representación se puede modelar con gran precisión la superficie de un objeto sin almacenar un número elevado de datos. Los primeros trabajos en este sentido fueron realizados por Coons [3] y Bézier [4]. Dentro de este grupo se encuentran los parches NURBS, que es la opción más utilizada y de hecho la que se ha utilizado en nuestro caso. Existen en el mercado numerosas herramientas comerciales que dan cuenta del modelo geométrico de un cuerpo sólido.

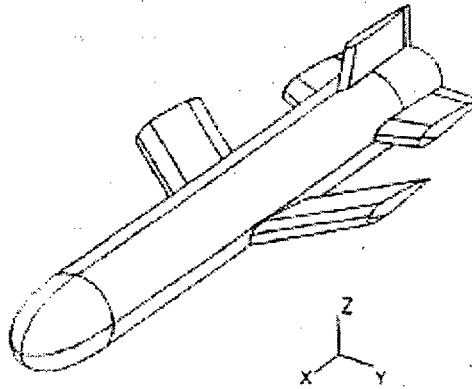


Figura 2.2.- Modelado de objetos mediante parches paramétricos curvos.

En las siguientes secciones, se describirá el fondo matemático de las superficies NURBS [5]. Antes de eso, nos introduciremos en las curvas de Bezier y luego, las curvas NURBS serán presentadas como combinaciones de las curvas de Bezier. Las superficies NURBS serán introducidas como una composición de superficies de Bezier. Tras esto se presentará un algoritmo para transformar las curvas y superficies NURBS en curvas y superficies de Bezier.

Al final de la sección se mostrara como calcular parámetros geométricos como vectores tangentes, vectores normales,... en curvas y superficies NURBS.

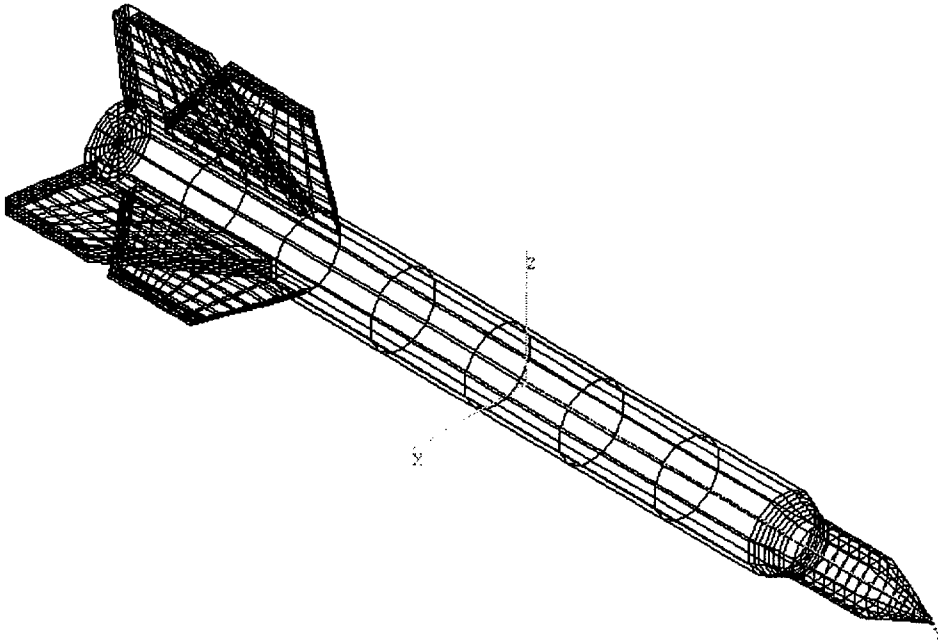


Figura 2.3 ejemplo de modelo de fronteras mediante superficies NURBS

2.3 Curvas de Bezier racionales

Las curvas de Bezier [6] fueron desarrolladas independientemente por Pierre Bezier y P. de Castelajau como parte de los sistemas CAGD que fueron desarrollados en las fabricas automovilísticas francesas Renault y Citroen a finales de los años cincuenta y principios de los sesenta.

Aunque originalmente Bezier y de Castelajau derivaron las bases matemáticas a partir de consideraciones geométricas, Forrest, en 1970, descubrió la conexión entre las curvas de Bezier y los polinomios de Berstein. En este trabajo se usará la notación introducida por Forrest. Así, una curva de Bezier $C(t)$ puede expresarse en términos de las bases de Berstein de la siguiente forma:

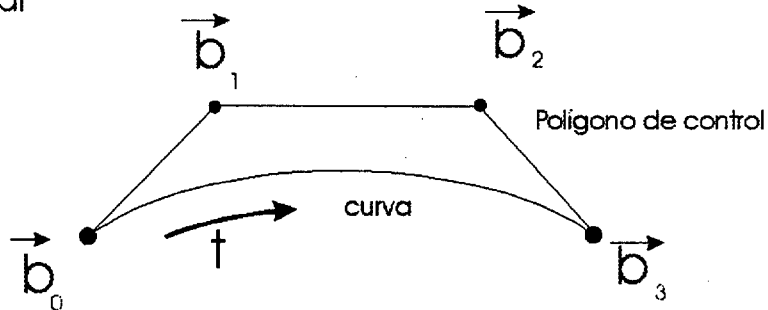
$$\vec{C}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{b}_i B_i^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

donde n es el grado de la curva y \vec{b}_i son los puntos de control. Estos son un conjunto de puntos en el espacio que forma el llamado polígono de control de la curva.

Las funciones $B_i^n(t)$ son los polinomios o bases de Bernstein:

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Espacio real



Espacio paramétrico

$t=0$

$t=1$

● Puntos de control

Figura 2.4 Ejemplo de curva de Bezier

Algunas propiedades importantes de las curvas de Bezier son:

- El número de puntos de control que definen la curva es igual al orden, es decir, igual al grado más uno ($n+1$).
- El dominio de la curva es el segmento en el eje paramétrico comprendido entre 0 y 1.

- La curva sigue con más o menos fidelidad la forma del polígono de control que la define.
- El primer y último punto de control (\vec{b}_0 y \vec{b}_m) coinciden con el inicio y fin de la curva respectivamente. Esta propiedad se demuestra fácilmente dando valores $t=0$ y $t=1$ en la ecuación.
- Los vectores tangentes a la curva en los puntos extremos tienen la misma dirección que los vectores que unen el primer punto de control con el segundo y el penúltimo punto con el último respectivamente.
- La curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control que la define. La envolvente convexa se define como el polígono de más área cuyos vértices coinciden con puntos de control de la curva
- El número de veces que un plano corta a una curva de Bezier es menor o igual al número de veces que corta a su polígono de control.
- Las curvas de Bezier son invariantes ante transformaciones afines (escalado, traslaciones, rotaciones, etc.)
- Si los puntos de control están localizados a lo largo de una recta, la curva de Bezier es un segmento contenido en dicha recta
- Las curvas de Bezier son diferenciables con derivadas continuas.

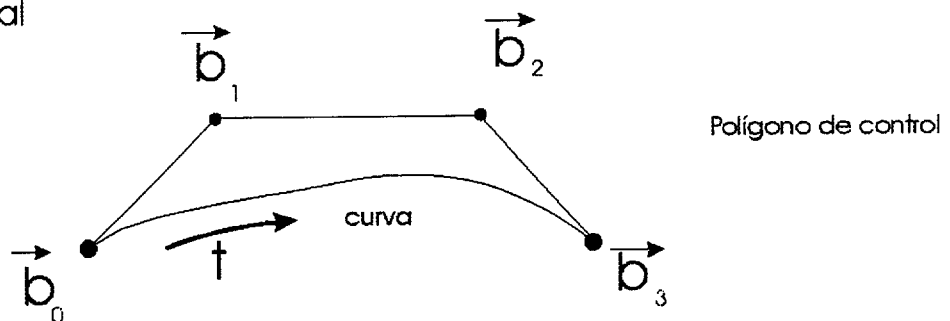
En 1967 Coons introduce las curvas racionales [6] en el campo de CAGD. La expresión de una curva racional de Bezier es la siguiente:

$$\vec{C}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \vec{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \frac{\vec{P}(t)}{W(t)}$$

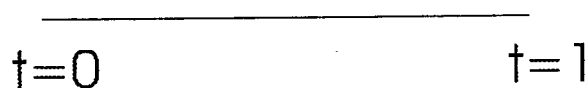
donde w_i son los llamados pesos. Cada punto de control tiene asociado su peso correspondiente. Es trabajar con curvas de Bezier racionales tiene varias ventajas:

- Es posible representar cónicas (circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas). Esto es imposible con curvas de Bezier no racionales
- Proporciona un grado más de libertad al diseñador a la hora de modelar una curva. Así si se incrementa el peso asociado a uno de los puntos de control, la curva se ve "atraída" hacia dicho punto.

Espacio real



Espacio paramétrico



- Puntos de control

Figura 2.5 Curva de Bezier de la figura anterior en la que el punto de control b_2 tiene mayor peso que el resto

- Las curvas de Bezier no racionales son un caso particular de las racionales en las que los pesos son todos iguales a uno.
- Siempre que los pesos sean mayores que cero se verifican todas las propiedades anteriormente citadas para las curvas no racionales, por lo que, salvo en casos muy especiales siempre se asume esta limitación.

Las derivadas paramétricas de una curva de Bezier racional se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d^r \vec{C}(t)}{dt^r} = \vec{C}_r(t) = \frac{\vec{P}_r(t) - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} W_j(t) \vec{C}_{r-j}(t)}{W(t)} \quad (2.2)$$

donde

$$\vec{P}_r(t) = \frac{d^r \vec{P}(t)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \vec{p}_j B_j^{n-r}(t) \quad (2.3)$$

$$\Delta^r \vec{p}_j = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} W_{i+j} \vec{b}_{i+j} \quad (2.4)$$

Las curvas de Bezier constituyen una herramienta útil en el diseño de curvas pero tienen algunas limitaciones:

- No poseen la propiedad de "control local". Es decir, un cambio en uno de los puntos de control afecta a toda la curva con los inconvenientes que esto tiene para el diseñador.

- Si la curva a modelar tiene una forma compleja su representación obliga a usar un grado que puede ser excesivo para aplicaciones prácticas (grados mayores a 10 se consideran inviables).

La solución a estos inconvenientes es el uso de curvas de Bezier compuestas llamadas también spline. Si en las conexiones entre las curvas de Bezier se exigen ciertas condiciones de continuidad, se obtienen las curvas B-Spline. La elasticidad que las curvas B-Spline presentan para el diseño y el hecho de que verifiquen la propiedad de control local han hecho que, hoy en día, sea la herramienta más utilizada en los sistemas de CAGD. Además, las curvas de Bezier simples constituyen un caso particular dentro de las B-Spline.

2.4 Curvas B-Spline racionales

Las curvas B-Spline [6] fueron utilizadas originalmente por De Boor y otros autores como herramienta para problemas de aproximación. Posteriormente Gordon y Riesenfeld introdujeron el uso de las curvas B-Spline como herramienta de diseño y establecieron su relación matemática con las curvas de Bezier demostrando que las B-Spline son una generalización de aquellas. Vesprille fue el primer autor en proponer el uso de las curvas B-Spline racionales. Posteriormente, Tiller y Piegl establecieron su base matemática.

Una curva B-Spline es una curva paramétrica polinómica que puede expresarse del siguiente modo:

$$\bar{C}(t) = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i N_i^k(t) \quad 0 \leq a \leq t \leq b, \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (2.5)$$

donde $N_i^k(t)$ son las bases B-Splines, k es el orden de la curva (grado +1) y \vec{d}_i son los n puntos de control que forman el llamado polígono de control asociado a la curva. Las base N se definen recursivamente en función de un conjunto de valores en el dominio paramétrico $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ que forman parte de la definición de cada curva y forman el llamado vector de nudos:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$N_i^k(t) = \frac{(t-t_i)N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-t)N_{i+k}^{k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}}$$

El vector de nudos es una sucesión creciente de número reales dentro del segmento paramétrico. Se define la multiplicidad de un nudo como el número de veces que aparece en el vector de nudos. La multiplicidad de los nudos en los extremos del dominio paramétrico es igual al orden de la curva, luego el vector de nudos tiene esta forma

$$a = t_1 = t_2 = \dots = t_k < t_{k+1} \leq t_{k+2} \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b \quad (2.7)$$

En la mayoría de la bibliografía y de los sistemas CAGD, el segmento paramétrico se fija entre los valores 0 y 1, por tanto $a=0$ y $b=1$. Este convenio es el que se sigue en este trabajo tanto en curvas como, más adelante, en superficies.

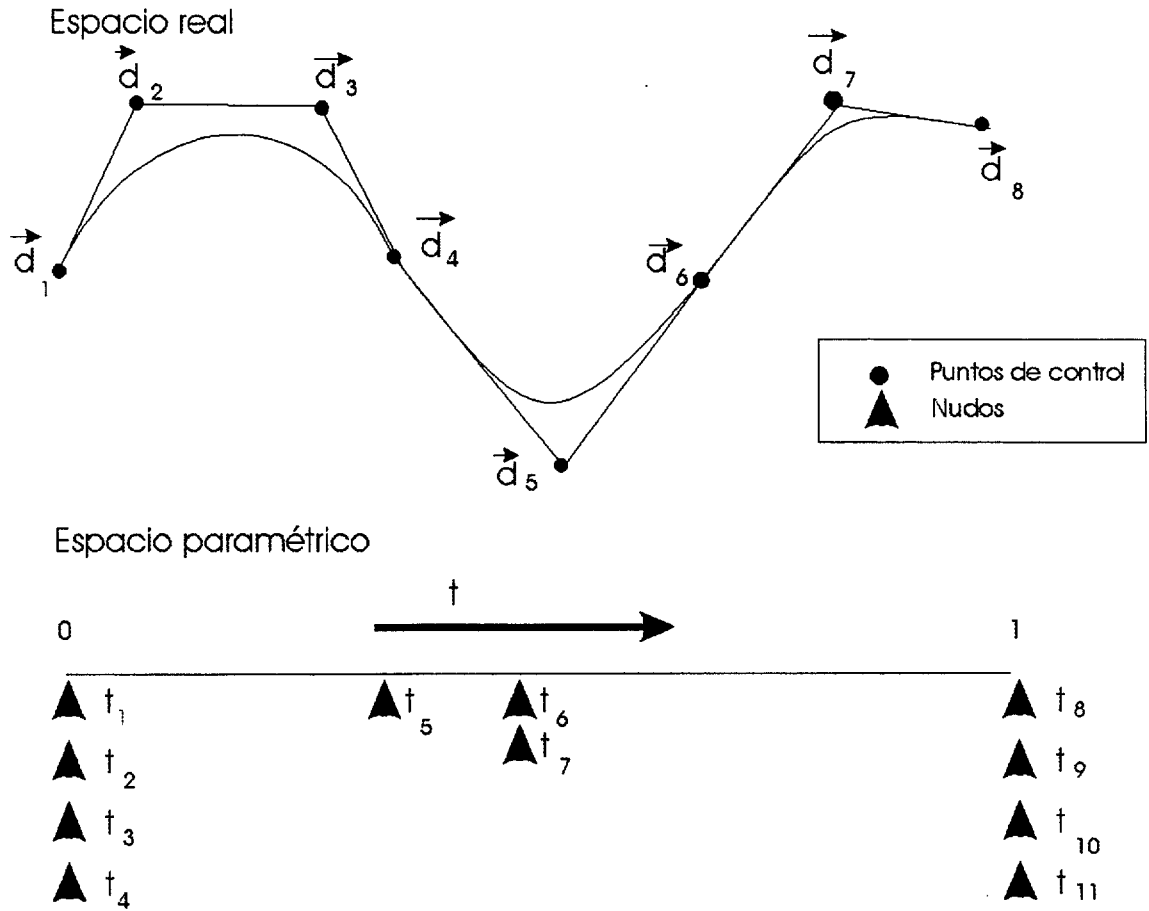


Figura 2.6 Ejemplo de curva B-Spline

De las ecuaciones anteriores se puede concluir que $\vec{C}(t)$ es una función polinómica de grado $k-1$ en cada intervalo del vector de nudos $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Las curvas B-Spline son derivables con continuidad en los puntos del dominio que no coinciden con algún nudo. En los nudos con multiplicidad r tan solo se puede asegurar una continuidad C^{k-1-r} , es decir la derivadas paramétricas de orden $k-1-r$ y menores son continuas.

Dependiendo del vector de nudos de la curva se puede clasificar como uniforme o no uniforme.

En el primer caso los valores de t_i están equiespaciados en el dominio paramétrico, mientras que en caso no uniforme no existe esta restricción. Generalmente se suelen utilizar las curvas no uniformes ya que dan una mayor elasticidad en el diseño.

Algunas propiedades importantes de las curvas B-Spline son:

- Control local
- La curva sigue aproximadamente la forma del polígono de control que la define y esta contenida en su envolvente convexa.
- Invarianza ante transformaciones afines.
- El número de veces que un plano corta a una curva B-Spline es menor o igual al numero de veces que corta a su polígono de control. Como consecuencia, si los puntos de control están localizados a lo largo de una recta, la curva B-Spline es un segmento contenido en la recta
- El número de puntos de control es igual al numero de nudos menos el orden
- El primer y ultimo punto de control coinciden con el inicio y fin de la curva

En 1975, K.J.Vesprille introduce las curvas racionales B-Spline [6] (curvas NURBS) como una generalización de las curvas de B-Spline. Su expresión matemática es

$$\bar{C}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \vec{d}_i N_i^k(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_i^k(t)}, \quad 0 \leq a \leq t \leq b, \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (2.8)$$

donde los coeficientes w_i son los llamados pesos. Cada uno de ellos está asociado a un punto de control.

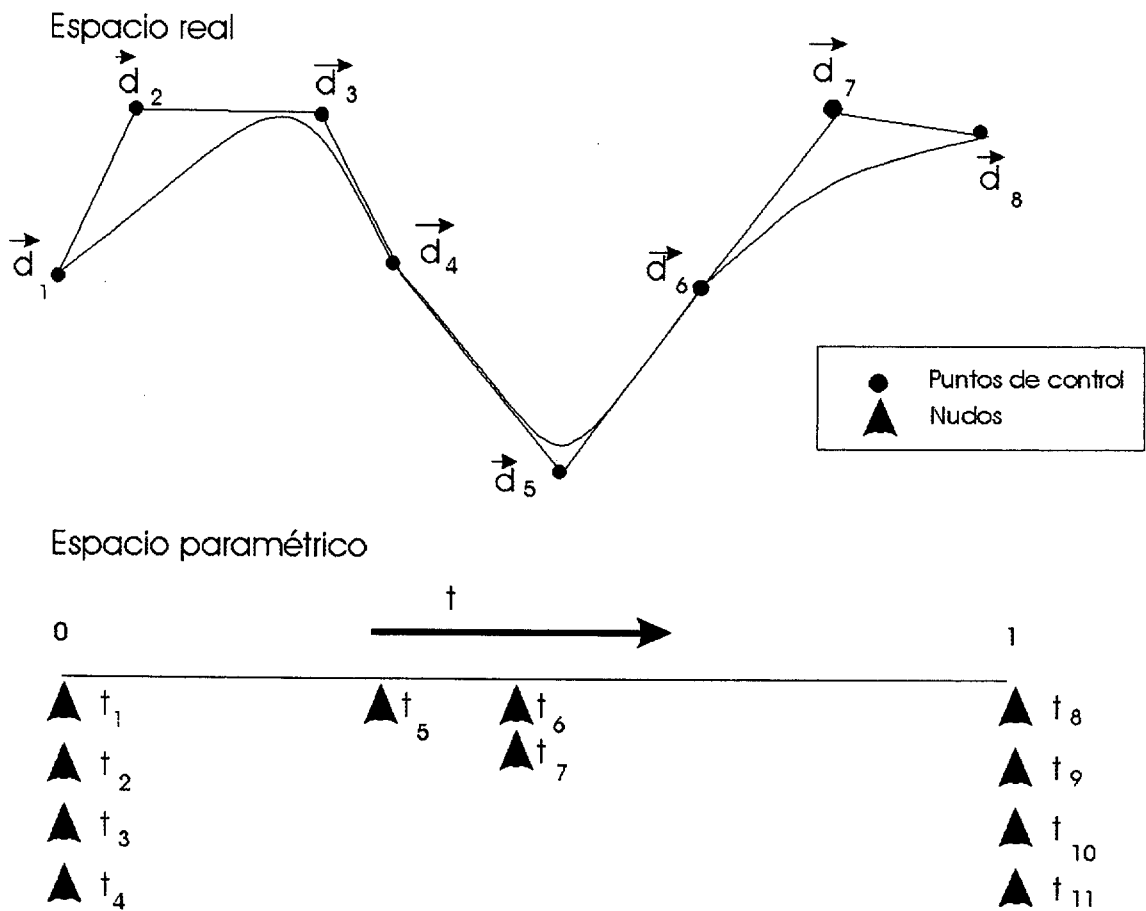


Figura 2.7 Curva NURBS de la figura anterior donde d_3 y d_5 tienen pesos mayores a d_1, d_4, d_6 y d_8 , y d_7 menor peso

El uso de estas curvas presenta las siguientes ventajas:

- Es posible representar cónicas
- Supone una herramienta más flexible ya que proporcional al diseñador mas grados de libertad. En muchos casos supone trabajar con curvas de menor grado.

Las curvas B-Spline racionales no uniformes son más conocidas como curvas NURBS.

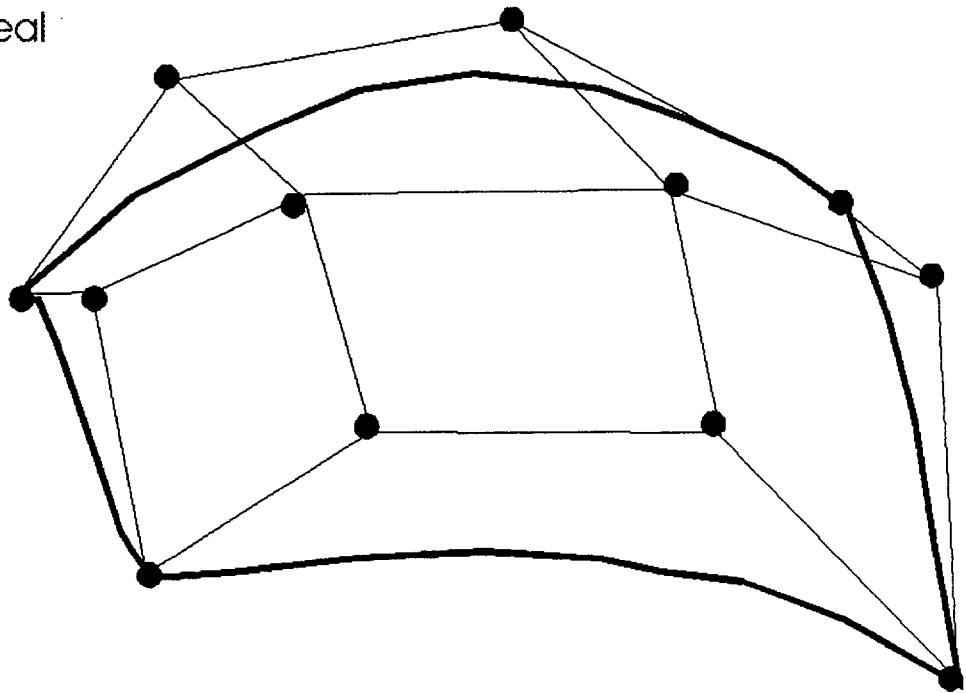
2.5 Superficies de Bezier racionales

Las superficies de Bezier [6] fueron introducidas a finales de la década de los 60. Se suelen definir como una generalización de las curvas de Bezier. La mayoría de sus propiedades pueden ser deducidas a partir de las curvas. La expresión matemática de una superficie de Bezier racional en función de los polinomios de Bernstein es:

$$\vec{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{b}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)} = \frac{\vec{P}(u, v)}{W(u, v)} \quad (2.9)$$

donde m y n son los grados de la superficie para las coordenadas paramétricas u y v respectivamente. En el caso de superficies, en vez de un polígono de control, se tiene una malla de puntos de control $\{\vec{b}_{ij}\}$ que tienen asociados sus correspondientes pesos $\{w_{ij}\}$. El número de puntos de control para cada coordenada paramétrica es igual al orden, por tanto, el número total de puntos de control es $(m+1) \times (n+1)$. El espacio paramétrico de las superficies es un cuadrado de lado la unidad cuyas coordenadas toman valores comprendidos entre 0 y 1: $0 \leq u, v \leq 1$

Espacio real



● Puntos de control

Espacio paramétrico

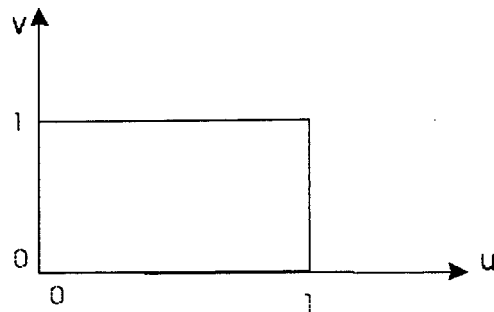


Figura 2.8 Ejemplo de superficie de Bezier

Algunas propiedades interesantes de estas superficies son:

- La forma de la superficie se aproxima a la malla de puntos de control que la define y esta contenida en la envolvente convexa de los puntos de control que la definen.
- Las curvas isoparamétricas de coordenada v constante son curvas racionales de Bezier de grado m contenidas en la superficie de la forma:

$$\vec{r}(u, v_0) = \frac{\sum_{i=0}^m w'_i \bar{b}'_i B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w'_i B_i^m(u)} \quad (2.10)$$

donde los puntos de control de la curva y sus pesos vienen dados por:

$$b'_i = \frac{\sum_{j=0}^n w_{ij} \bar{b}_{ij} B_j^n(v_0)}{\sum_{j=0}^n w_{ij} B_j^n(v_0)} \quad (2.11)$$

$$w'_i = \sum_{j=0}^n w_{ij} B_j^n(v_0) \quad (2.12)$$

Un razonamiento análogo se puede hacer para el caso de curvas isoparamétricas de u constante.

- Las curvas isoparamétricas $v_0 = 0$ y $v_0 = 1$ coinciden con las curvas frontera de la superficie de Bezier y vienen definidas por los puntos de control (y sus pesos) de la frontera correspondiente de la malla de puntos de control. Así, las curvas isoparamétricas $v_0 = 0$ y $v_0 = 1$ vienen dadas, respectivamente, por

$$\vec{r}(u,0) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{i0} \vec{b}_{i0} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{i0} B_i^m(u)} \quad (2.13)$$

$$\vec{r}(u,1) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{i1} \vec{b}_{i1} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{i1} B_i^m(u)} \quad (2.14)$$

Análogo razonamiento puede hacerse para las curvas isoparamétricas de coordenadas $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$.

- Los 4 puntos de la superficie cuyas coordenadas paramétricas son los vértices del dominio $((0,0),(1,0),(1,1),(0,1))$ coinciden con los 4 puntos vértices de la superficie y con los 4 puntos vértices de la malla de puntos de control: $\vec{b}_{00}, \vec{b}_{10}, \vec{b}_{11}, \vec{b}_{01}$ respectivamente.
- Invarianza ante transformaciones afines

Las derivadas paramétricas de una superficie de Bezier racional vienen dadas por

$$\frac{\partial^{r+s} \vec{r}}{\partial u^r \partial v^s} = \vec{r}_{r,s} = \frac{1}{W} \left[\vec{P}_{r,s} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \binom{r}{i} \binom{s}{j} W_{i,j} \vec{r}_{r-i,s-j} + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} W_{i,0} \vec{r}_{r-i,s} - \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} W_{0,j} \vec{r}_{r,s-j} \right] \quad (2.15)$$

donde

$$\vec{P}_{i,j} = \frac{m!n!}{(m-i)!(n-j)!} \sum_{k=0}^{m-i} \sum_{l=0}^{n-j} \Delta^{i,j} \vec{p}_{kl} B_k^{m-i}(u) B_l^{n-j}(v) \quad (2.16)$$

$$W_{i,j} = \frac{m!n!}{(m-i)!(n-j)!} \sum_{k=0}^{m-i} \sum_{l=0}^{n-j} \Delta^{i,j} w_{kl} B_k^{m-i}(u) B_l^{n-j}(v) \quad (2.17)$$

donde el operador Δ se define como

$$\begin{aligned} \Delta^{i,j} \vec{p}_{k,l} &= \Delta^{i-1,j} \vec{p}_{k+1,l} - \Delta^{i-1,j} \vec{p}_{k,l} \quad , \quad \text{si } i > 0 \\ \Delta^{i,j} \vec{p}_{k,l} &= \Delta^{i,j-1} \vec{p}_{k,l+1} - \Delta^{i,j-1} \vec{p}_{k,l} \quad , \quad \text{si } j > 0 \\ \Delta^{i,j} w_{k,l} &= \Delta^{i-1,j} w_{k+1,l} - \Delta^{i-1,j} w_{k,l} \quad , \quad \text{si } i > 0 \\ \Delta^{i,j} \vec{p}_{k,l} &= \Delta^{i,j-1} w_{k,l+1} - \Delta^{i,j-1} w_{k,l} \quad , \quad \text{si } j > 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\Delta^{0,0} \vec{p}_{k,l} = \vec{p}_{k,l} \quad , \quad \Delta^{0,0} w_{k,l} = w_{k,l}$$

$$\vec{p}_{i,j} = \vec{b}_{i,j} w_{i,j}$$

Las derivadas paramétricas primeras \vec{r}_u y \vec{r}_v son vectores tangentes en cada punto a las curvas isoparamétricas de v y u constante respectivamente.

El vector normal unitario en los puntos de la superficie se puede expresar en función de las derivadas paramétricas de la siguiente forma:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|} \quad (2.19)$$

donde \vec{r}_u y \vec{r}_v son las derivadas primeras respecto a las coordenadas paramétricas.

De la misma forma el elemento diferencial de superficie viene dado por:

$$ds(u, v) = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv \quad (2.20)$$

Existe un caso particular de superficies para las que las funciones $\hat{n}(u, v)$ y $ds(u, v)$ no están bien definidas en alguno de los puntos vértices del espacio paramétrico. Este caso se da cuando $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$ y el parche se dice degenerado en el punto correspondiente. Esta situación anómala se contemplará al final del capítulo.

Un tipo particular de superficies considerado fundamental para el diseño son las superficies regladas. Estas están formadas a partir de un conjunto de segmentos que unen los puntos de 2 curvas. Estos segmentos se consideran como una familia de líneas isoparamétricas. Un parche de Bezier racional es una superficie reglada si verifica una de las dos parejas de condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ w_{i1} &= w_{i0} \quad i = 1, \dots, m \\ m &= 1 \\ w_{1j} &= w_{0j} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.21)$$

En el primer caso los segmentos son líneas isoparamétricas de coordenada v constante y la superficie puede expresarse mediante una función lineal para la coordenada v de esta forma:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0(u) + v\vec{r}_1(u) \quad (2.22)$$

donde

$$\vec{r}_0(u) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{i0} \vec{b}_{i0} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{i0} B_i^m(u)} \quad (2.23)$$

$$\vec{r}_1(u) = \frac{\sum_{i=0}^m (w_{i1} \vec{b}_{i1} - w_{i0} \vec{b}_{i0}) B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m w_{i0} B_i^m(u)} \quad (2.24)$$

La función $\vec{r}_0(u)$ define la curva isoparamétrica $v=0$ y la función $\vec{r}_0(u) + \vec{r}_1(u)$ define la curva isoparamétrica $v=1$.

En el segundo caso la superficie es lineal para la coordenada u y $\vec{r}(u, v)$ puede escribirse así:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0(v) + u\vec{r}_1(v) \quad (2.25)$$

donde

$$\vec{r}_0(v) = \frac{\sum_{j=0}^n w_{0j} \vec{b}_{0j} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n w_{0j} B_j^n(v)} \quad (2.26)$$

$$\vec{r}_1(v) = \frac{\sum_{j=0}^n (w_{1j} \vec{b}_{1j} - w_{0j} \vec{b}_{0j}) B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n w_{0j} B_j^n(v)} \quad (2.27)$$

El modelado mediante superficies de Bezier tiene algunos inconvenientes:

- No presentan control local
- Si la superficie a modelar tiene forma compleja su representación como superficie de Bezier obliga a usar grados excesivamente altos para aplicaciones practicas.

La solución a estos inconvenientes, al igual que en las curvas, es la utilización de superficies de Bezier compuestas. Un conjunto de superficies compuestas unidas bajo ciertas condiciones de continuidad constituyen una superficie B-Spline. El hecho de que las superficies B-Spline verifiquen las dos propiedades anteriores y de que sean una generalización de las de Bezier ha hecho que, hoy en día, las B-Splines sean la herramienta más utilizada en los sistemas CAGD para el diseño de superficies.

2.6 Superficies B-Splines racionales

Análogamente al caso de los parches de Bezier las superficies B-Spline pueden introducirse como una generalización a 2 dimensiones de las curvas B-Spline racionales [6]. Así, su expresión matemática puede escribirse del siguiente modo

$$\vec{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} \vec{d}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)} \quad 2 \leq k \leq m+1, \quad 2 \leq l \leq n+1 \quad (2.28)$$

donde k y l son los ordenes de la superficie para las coordenadas paramétricas u y v respectivamente, \vec{d}_{ij} son los puntos de control de la malla que define la superficie, w_{ij} son los pesos asociados, m y n son el número de puntos de control para cada coordenada paramétrica y las funciones N son las llamadas bases B-Spline que se definieron en un apartado anterior.

En principio, el dominio paramétrico puede ser cualquier rectángulo aunque la mayoría de la bibliografía y de los programas comerciales asumen el convenio de que las coordenadas toma valores entre cero y uno: $0 \leq u, v \leq 1$

En el caso de superficies se tiene un vector de nudos para cada coordenada paramétrica $\{u_i\}_{i=1}^{m+k}$ y $\{v_i\}_{i=1}^{n+l}$:

$$\begin{aligned} 0 = u_1 = u_2 = \dots = u_k < u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \dots \leq u_m < u_{m+1} = \dots = u_{m+k} = 1 \\ 0 = v_1 = v_2 = \dots = v_k < v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \dots \leq v_m < v_{m+1} = \dots = v_{m+k} = 1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si para las dos coordenadas los nudos están equiespaciados la superficie se dice uniforme, en caso contrario se trata de una superficie B-Spline racional no uniforme también llamada NURBS.

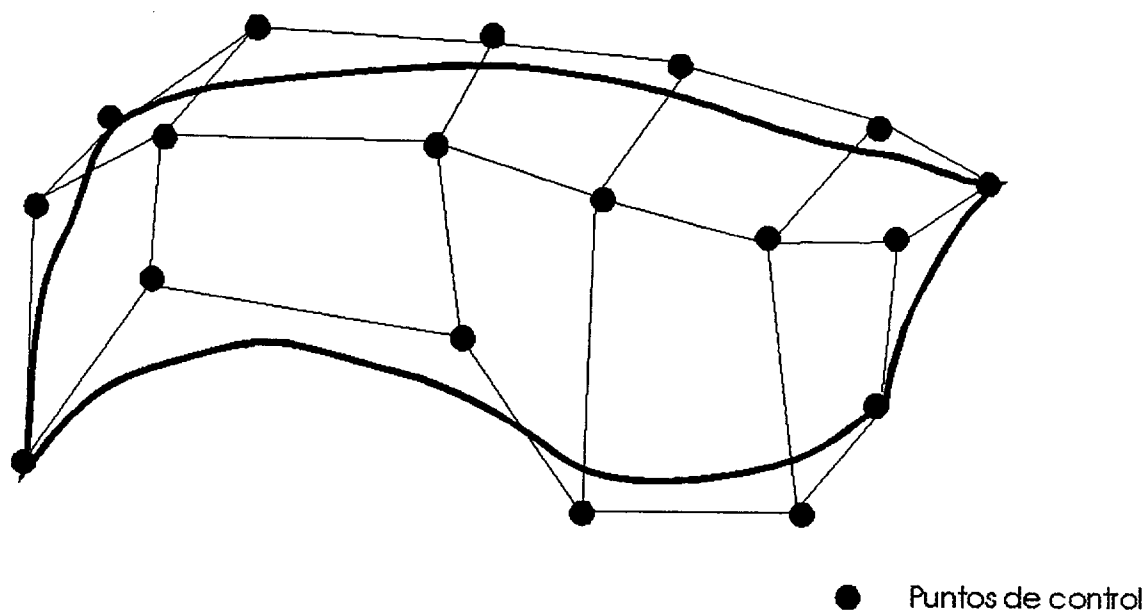


Figura 2.9 Ejemplo de una superficie B-Spline

Algunas propiedades importantes de estas superficies son:

- Son invariantes ante transformadas afines.
- En sus puntos está garantizada una continuidad C^{k-2} respecto a la coordenada paramétrica u y C^{l-2} para la coordenada v .
- La superficie está contenida en la envolvente convexa que los puntos de la malla de control que la define
- Control local: Un cambio en uno de los puntos de control sólo afecta a una región de la curva donde el punto tiene influencia

Las 4 curvas de la superficie son las curvas B-Spline cuyos puntos de control son los de las fronteras de la malla y sus órdenes y vectores de nudos son los de la coordenada paramétrica correspondiente de la superficie

2.7 Calculo de derivadas parametricas en curvas NURBS

Vimos como calcular derivadas paramétricas en curvas racionales de Bezier. En esta sección se verá como computar derivadas paramétricas en curvas NURBS. El procedimiento explicado a continuación es general en el sentido de que es valido para derivadas de orden arbitrario. Es también valido para obtener las coordenadas cartesianas de los puntos de las curvas porque las coordenadas cartesianas pueden verso como la derivada paramétrica de orden cero.

Supongamos que estamos interesados en el cálculo de:

$$\vec{r}(t) = \frac{\partial^r r(t)}{\partial t^r} \quad (2.30)$$

en un punto con coordenada paramétrica (tn).

La expresión de arriba indica la derivada paramétrica de orden r . Si $r=0$, esta expresión representa las coordenadas espaciales en el punto (tn).

Para calcular la expresión anterior se procede de la siguiente forma:

- Cálculo de las curvas de Bezier asociadas a la curva NURBS. Para hacer esto aplicamos el algoritmo de Cox-De Boor, que se verá más adelante.
- Determinación de la curva de Bezier donde el punto (tn) está localizado.

Como se dijo anteriormente, las curvas de Bezier están asociadas con el intervalo en el vector de nodos de la curva NURBS. Por ello, primero deberemos determinar dicho intervalo. Suponemos que tn pertenece al intervalo (t_i, t_{i+1}) . En otras palabras

$$t_i \leq tn \leq t_{i+1} \quad (2.31)$$

por lo que debemos considerar la descripción de la correspondiente curva de Bezier.

- Determinación de las coordenadas paramétricas del punto (tn) en el espacio paramétrico de la curva de Bezier

La coordenada paramétrica del punto en la correspondiente curva de Bezier está dada por:

$$tb = \frac{tn - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.32)$$

- Computación de la derivada paramétrica en la curva de Bezier

De la descripción de la correspondiente curva de Bezier calcularemos la derivada en t usando las ecuaciones vistas en el apartado de curvas de Bezier anterior.

- Calculo de la derivada en las curva NURBS usando la regla de la cadena.

De la derivada en la curva de Bezier y aplicando la regla de la cadena, la derivada en la curva NURBS en t puede calcularse como sigue

$$\vec{r}_r(t)|_m = \frac{d^r \vec{r}}{dt^r} \Big|_m = \frac{d^r \vec{r}_B}{\partial t^r} \Big|_m \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)^r} \quad (2.33)$$

donde $\frac{d^r \vec{r}_B}{\partial t^r}$ representa la derivada paramétrica en el parche de Bezier.

2.8 Cálculo de las derivadas parametricas en superficies NURBS

En una sección anterior se analizó como realizar el cálculo de las derivadas paramétricas en superficies racionales de Bezier. En la presente sección se explicará como calcular las derivadas paramétricas en superficies NURBS. El procedimiento explicado es general en el sentido de que es valido para derivadas de orden arbitrario. Es también válido para obtener las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la superficie debido a que dichas coordenadas pueden verso como la derivada paramétrica de orden cero.

Supongamos que se desea realizar el cálculo de

$$\vec{r}_{r,s}(u,v) = \frac{\partial^{r-s} r(u,v)}{\partial u^r \partial v^s} \quad (2.34)$$

en el punto de coordenadas paramétricas (u,v) . La expresión de arriba indica la derivada paramétrica de orden r con respecto a la coordenada u y la derivada paramétrica de orden s con respecto a la coordenada v . Si $r=s=0$, dicha expresión representa las coordenadas espaciales del punto.

Para calcular la derivada se debe seguir el siguiente procedimiento

- Cálculo de los parches de Bezier asociados con la superficie NURBS. Para hacer esto se aplica el algoritmo de Cox-De Boor, que se verá en la siguiente sección.
- Determinación del parche de Bezier donde se localiza el punto (u,v)

Como se dijo anteriormente, los parches de Bezier están asociados con los intervalos en el vector de nodos de las superficies NURBS. Por ello, primeramente se debe determinar dichos intervalos. Supongamos que u pertenece al intervalo (u_i, u_{i+1}) del vector de nodos de la coordenada u y v pertenece al intervalo (v_j, v_{j+1}) del vector de nodos de la coordenada v . En otras palabras

$$u_i \leq u \leq u_{i+1} \quad , \quad v_j \leq v \leq v_{j+1} \quad (2.35)$$

por lo que debemos considerar la descripción del correspondiente parche de Bezier.

- Determinación de las coordenadas paramétricas del punto (u,v) en el espacio paramétrico del parche de Bezier.

Las coordenadas paramétricas del punto en el correspondiente parche de Bezier (u_b, v_b) están dadas por

$$ub = \frac{un - u_i}{u_{i+1} - u_i} \quad , \quad vb = \frac{vn - v_j}{v_{j+1} - v_j} \quad (2.36)$$

- Determinación de la derivada paramétrica en el parche de Bezier.

De la descripción del correspondiente parche de Bezier se calcula la derivada paramétrica en el punto (ub,vb) usando la ecuación vista en una sección anterior.

- Cálculo de la derivada en la superficie NURBS usando la regla de la cadena.

De la derivada en el parche de Bezier y aplicando la regla de la cadena, la derivada en la superficie NURBS en (un,vn) se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{r}_{r,s}(u,v) = \frac{\partial^{r-s} \vec{r}}{\partial u^r \partial v^s} \Big|_{un,vn} = \frac{\partial^{r+s} \vec{r}_B}{\partial u^r \partial v^s} \Big|_{ub,vb} \frac{1}{(u_{i+1} - u_i)^r (v_{j+1} - v_j)^s} \quad (2.37)$$

donde $\frac{\partial^{r+s} \vec{r}_B}{\partial u^r \partial v^s}$ representa la derivada paramétrica en el parche de Bezier.

2.9 Cálculo de vectores normales unitarios en las superficies NURBS

El vector normal unitario en puntos de una superficie NURBS se puede expresar como una función de la derivada paramétrica de primer orden de la forma siguiente

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|}$$

donde \vec{r}_u es la derivada de primer orden con respecto a la coordenada u y \vec{r}_v es la derivada de primer orden con respecto a la coordenada v . Tales derivadas pueden calcularse usando la ecuación de la sección anterior para los caso de $r=1, s=0$ y $r=0, s=1$, respectivamente.

El vector normal define la llamada cara activa de la superficie, que es el lado de la superficie visto por los puntos exteriores al cuerpo.

2.10 Transformación de superficies NURBS en parches de Bezier

Para la descripción geométrica del blanco se utilizan superficies y curvas NURBS. Este esquema para la definición de cuerpos complejos presenta ventajas e inconvenientes. La principal ventaja es la posibilidad de modelar cuerpos complejos arbitrarios con una cantidad de información relativamente baja. El inconveniente más importante es la aparición de inestabilidades numéricas al interrogar los parches en el formato NURBS. Esto se salva transformando las superficies NURBS del modelo en parches racionales de Bezier y trabajando sobre este tipo de superficies.

Las bases que definen los parches de Bezier (polinomios de Bernstein), a diferencia de las bases que definen los NURBS, son estables y sencillas de evaluar con lo que el cálculo de los puntos y las derivadas paramétricas en superficies de Bezier es fácil. El inconveniente de trabajar con el formato de Bezier es el mayor número de superficies que aparecen en la descripción del modelo.

El método utilizado para la transformación de parches NURBS en superficies de Bezier racionales es el algoritmo de Cox-De Boor [6].

Una superficie NURBS está determinada por un grado y vector de nudos para cada coordenada paramétrica, una red de puntos de control y un conjunto de pesos asociados a los puntos de control. Un vector de nudos es una serie de números reales en el espacio paramétrico de la coordenada correspondiente. La multiplicidad de un nudo se define como el número de veces que aparece en el vector de nudos.

En 1972 Carl De Boor presentó su conocido algoritmo de inserción de nudos para la evaluación de puntos en curvas B-Spline. Este algoritmo dice que dada una curva B-Spline es posible introducir un nuevo nudo en el vector de nudos o aumentar la multiplicidad de uno primitivo sin que la forma de la curva se vea alterada. Así, si en el vector de nudos original se inserta otro nudo, $k-1$ de los puntos de control originales son reemplazados por k nuevos, donde k es el orden de la curva. Más generalmente, si un nudo es insertado s veces, $k-1$ puntos de control son reemplazados por $k-1+s$. Para evaluar un punto en la curva basta con insertar repetidamente un nudo, cuyo valor sea igual a la coordenada paramétrica para la que se desea calcular el punto, hasta que su multiplicidad sea igual al grado de la curva. El punto de control obtenido en la última inserción es un punto sobre la curva cuya coordenada paramétrica es la del nudo insertado.

Basándose en ese trabajo, W.Boehm desarrolló, en 1981, un algoritmo para obtener la descripción de una curva B-Spline como unión de un conjunto de curvas de

Bezier. El algoritmo se basa en el hecho de que si los nudos de una curva B-Spline tienen multiplicidad igual al grado de la curva, sus puntos de control coinciden con los de un conjunto de curvas de Bezier cuya unión forma la curva B-Spline. El grado de las curvas de Bezier coincide con el de la curva B-Spline original. Cada una de las curvas de Bezier obtenidas está asociada a un intervalo en el vector de nudos, por tanto, el número de curvas obtenidas coincide con el número de intervalos entre nudos distintos en el vector de nudos de la curva B-Spline

Como consecuencia, para obtener la descripción de una curva B-Spline en términos de curvas de Bezier basta con insertar nudos sobre los originales hasta que sus multiplicidades sean igual al grado. Es algoritmo de W.Boehm es fácilmente generalizable al caso de superficies.

El algoritmo de Cox-De Boor se basa en el proceso de inserción de nudos. Este proceso provoca la aparición de un nuevo nudo (que puede coincidir con uno de los ya existentes) y la modificación de los primitivos puntos de control y pesos. Además se genera una nueva fila o columna en la matriz de los puntos de control. Después de este proceso la forma de la superficie no varía.

El algoritmo inserta nudos en los primitivos valores de los vectores de ambas coordenadas paramétrica hasta que todos tengan multiplicidad igual al grado. Cuando la multiplicidad de los nudos coincide con el grado (para cada coordenada paramétrica) se cumple que los puntos de control de la superficie B-Spline también lo son del conjunto de superficies de Bezier que la forman. Estos parches de Bezier tienen grados iguales que el parche NURBS del que proceden y su unión es la superficie total.

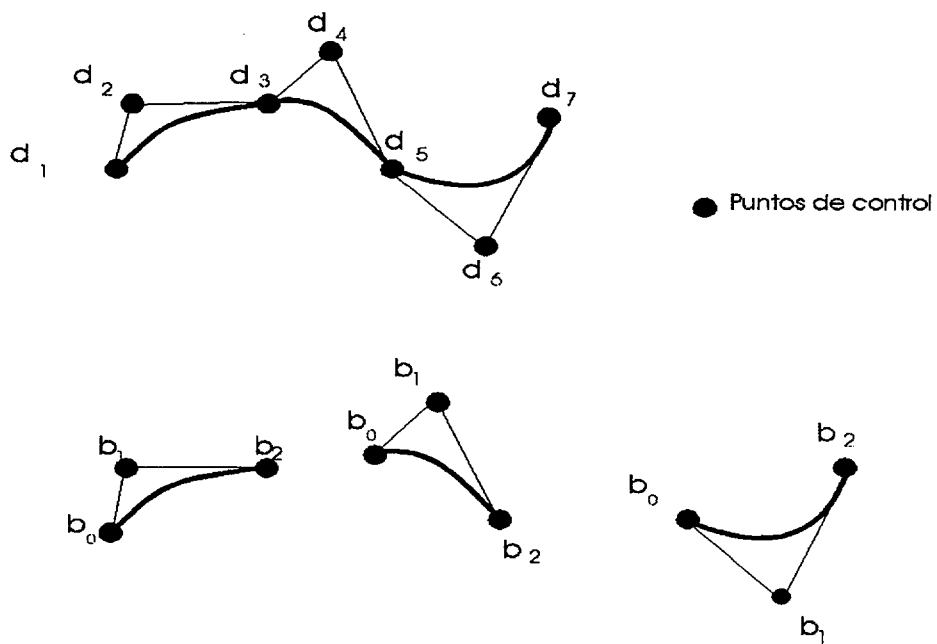


Figura 2.10 Representación de una curva NURBS como unión de curvas de Bezier racionales

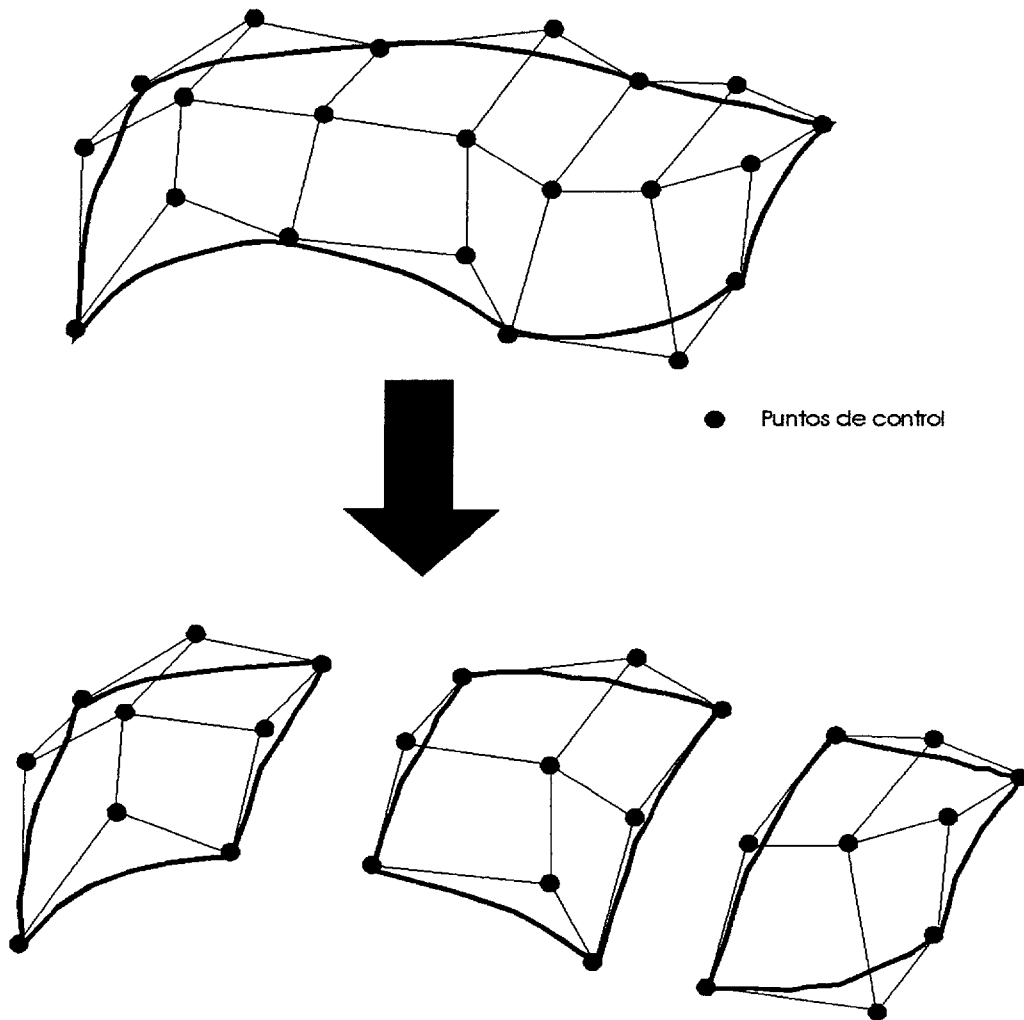


Figura 2.11 Representación de una superficie NURBS como unión de parches de Bezier racionales

Finalmente lo que se hace en las herramientas desarrolladas es emplear parches NURBS para modelizar el cuerpo, pero luego estos parches se transforman a parches de Bézier aplicando el algoritmo de Cox-De Boor para describir las funciones base del Método de los Momentos y calcular los términos de acoplo. Se hace esto porque numéricamente es más estable interrogar (obtener puntos, derivadas, radios de curvatura, etc...) sobre una superficie de Bézier que sobre la superficie NURBS de la que proviene.

2.11 Superficies degeneradas

Hasta ahora se tiene ya definido el método que se utilizará para representar la geometría de los cuerpos bajo estudio, que es el modelado mediante parches NURBS. También se conoce una serie de cálculos sobre dichos parches necesarios para el desarrollo de la teoría electromagnética necesaria para llevar a cabo la computación, como puede ser el vector normal o las derivadas de cualquier orden. Pero, como se destacó anteriormente, todo esto es válido si se trata de superficies sin puntos degenerados. Se hace preciso tratar este problema para tener capacidad de modelado de cualquier superficie.

Una superficie se dice que está degenerada [7] cuando todos los puntos de control de uno de sus cuatro contornos coinciden en un único punto en el espacio real. Esto quiere decir, que si se calcula la correspondencia en el espacio cartesiano los puntos resultantes de recorrer el espacio paramétrico por cada uno de sus contornos,

$$\begin{aligned} u=0, v \text{ variando entre } 0 \text{ y } 1 \text{ ó} \\ u=1, v \text{ variando entre } 0 \text{ y } 1 \text{ ó} \\ v=0, u \text{ variando entre } 0 \text{ y } 1 \text{ ó} \\ v=1, u \text{ variando entre } 0 \text{ y } 1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

en uno de ellos, en el espacio real se obtiene siempre el mismo punto. Un ejemplo de este tipo de superficies podría ser las superficies triangulares, cuando estas se modelan eligiendo para cada contorno en el espacio real, un contorno en el paramétrico, y se hace coincidir el contorno en el espacio paramétrico restante con un vértice de la superficie triangular. Esto queda reflejado en la figura 2.12.

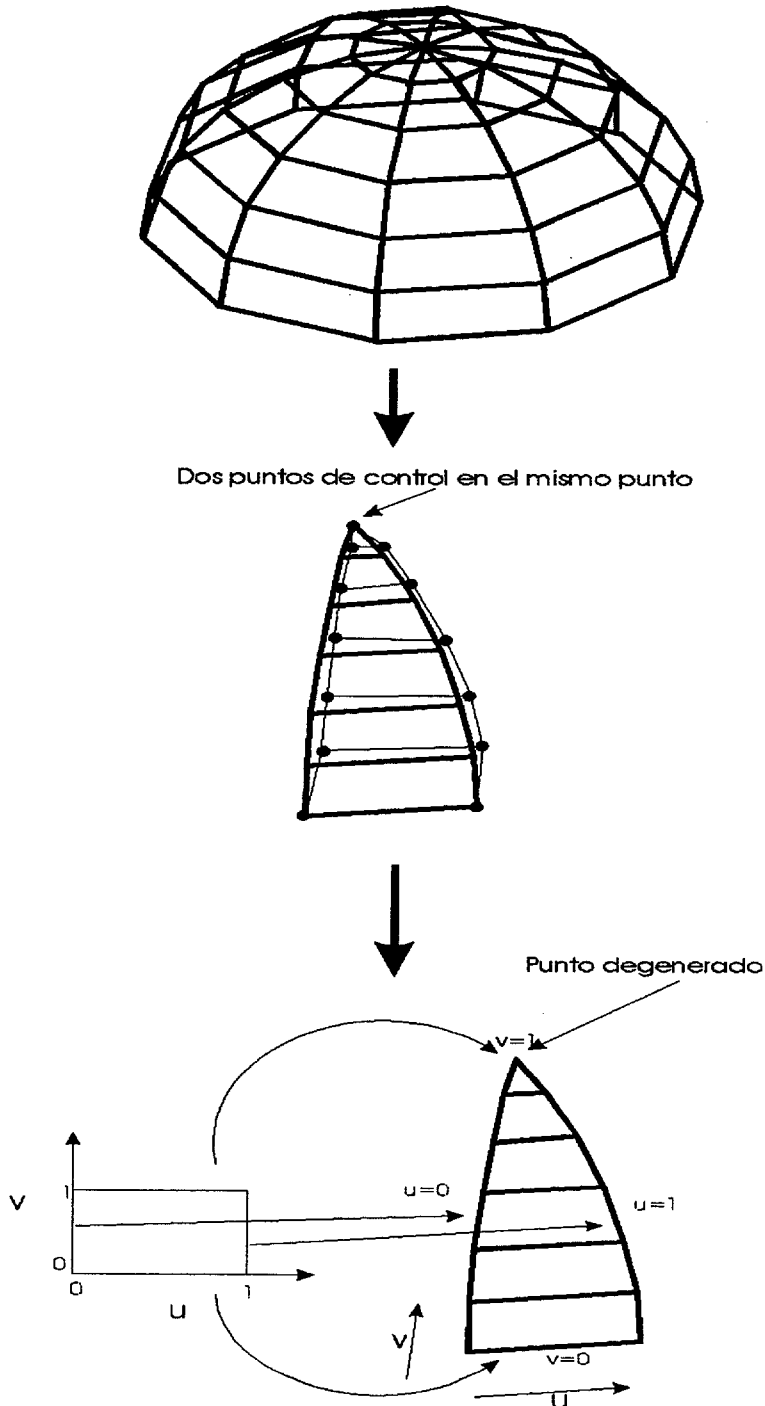


Figura 2.12 Superficie degenerada.

En el ejemplo de la figura, el contorno que define la coordenada $v=1$, u variando entre 0 y 1 es un único punto en el espacio real, que es el vértice superior. Este tipo de superficie por tanto, por su definición, sería una superficie degenerada.

El problema que representan las superficies degeneradas es que en el punto degenerado no se dan las condiciones matemáticas necesarias para poder calcular derivadas, vectores normales,... mediante los métodos abordados en este capítulo.

Existen dos posibles soluciones a adoptar ante el problema que suponen los puntos degenerados, que son utilizar una formulación o un modelado en el cual se puedan realizar los cálculos en dichos puntos o tratar de evitar dichos puntos.

La primera solución conllevaría adoptar otros métodos de modelado geométrico para obtener un caso más general que solucionara el problema particular de los puntos degenerados. Esta solución terminaría con todas las ventajas que posee el modelado mediante superficies NURBS, entre otras, la de ser un método ampliamente utilizado.

Se puede optar entonces por la segunda solución. Esta trata de conseguir, ante un cuerpo modelado con superficies NURBS, de las cuales alguna de ellas puede estar degenerada, un modelo también con superficies NURBS que represente de forma igualmente fiel el cuerpo inicial pero sin puntos degenerados.

Para conseguir esto se parte de una suposición inicial, que se cumple en la mayoría de modelos geométricos con superficies degeneradas que se encuentran en la práctica. Dicha suposición es que en un modelo geométrico de un cuerpo una superficie degenerada en un punto se encuentra rodeada de superficies geométricas que también se hayan degeneradas en el mismo punto.

Como ejemplo de la suposición anterior tenemos el caso de discos. En este tipo de cuerpos, el modelo puede constar de varias superficies que son sectores circulares y que son todos ellos degenerados en el punto central de la circunferencia.

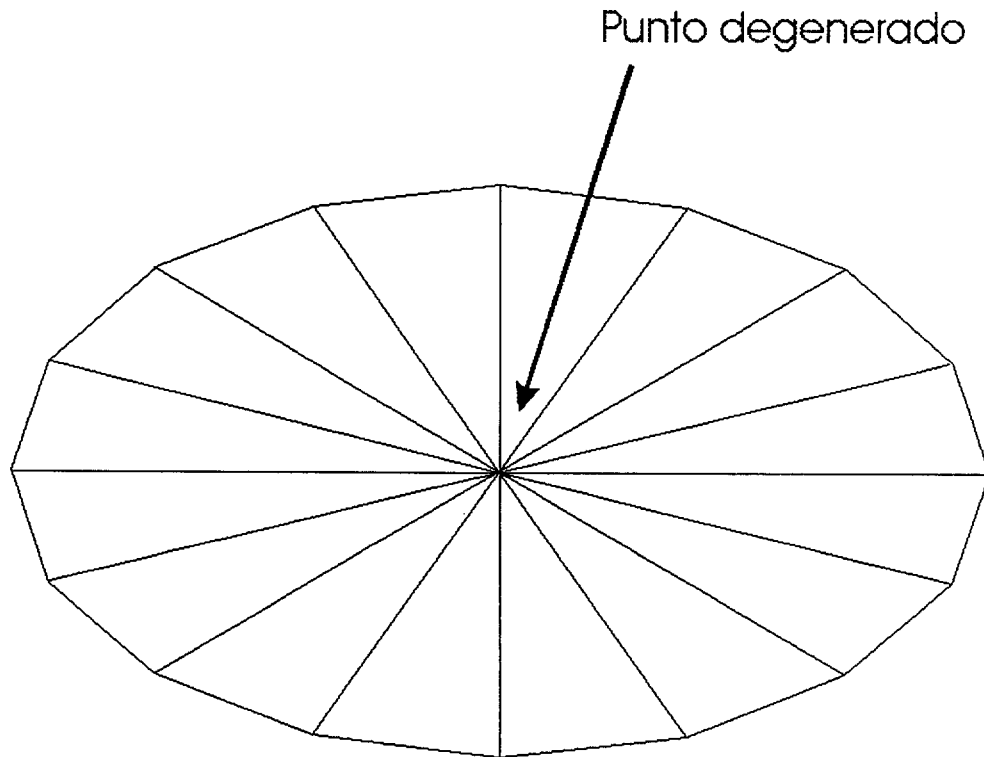


Figura 2.13 Disco compuesto por superficies degeneradas

Como se dijo anteriormente en esta suposición, que puede parecer muy particular inicialmente, se encuentran la mayoría de las superficies degeneradas que se incluyen en un modelado de cuerpos reales. Otro ejemplo de superficies comunes donde ocurre este caso son los conos, esferas,...

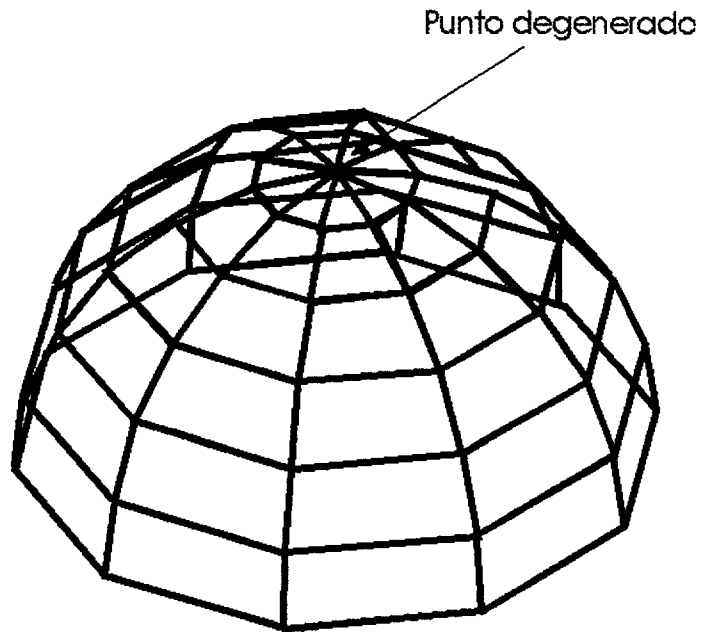


Figura 2.14 Semiesfera compuesta de superficies degeneradas
Punto degenerado

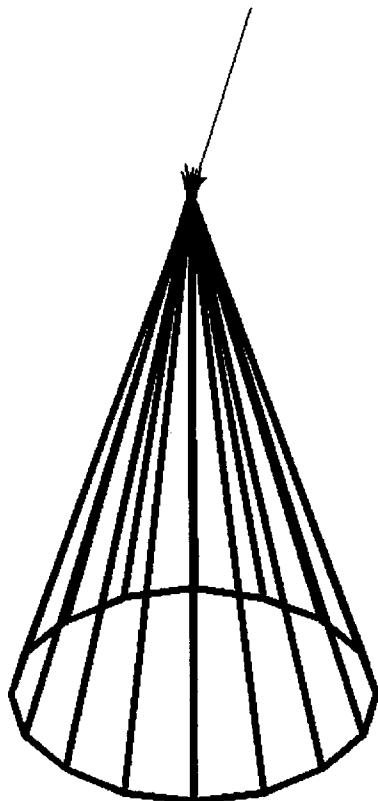


Figura 2.15 Cono compuesto por superficies degeneradas

La solución que se adopta ante superficies degeneradas que cumplen la suposición es la sustitución de todas estas superficies por una no degenerada. Para ello

se deben detectar todas las superficies degeneradas en el modelo que contienen el mismo punto degenerado, agruparlas y sustituirlas por una no degenerada con una geometría fiel a la que describían las superficies degeneradas iniciales.

Se realizó un preproceso geométrico que realizaba esta función, y se observaron las ventajas e inconvenientes que ofrecía el algoritmo. Los resultados gráficos obtenidos de tres figuras comunes en muchos diseños, como son la semiesfera, el cono y el disco, se muestran a continuación. Se debe destacar que la superficie sustituta es de orden 5x5 en todos los casos.

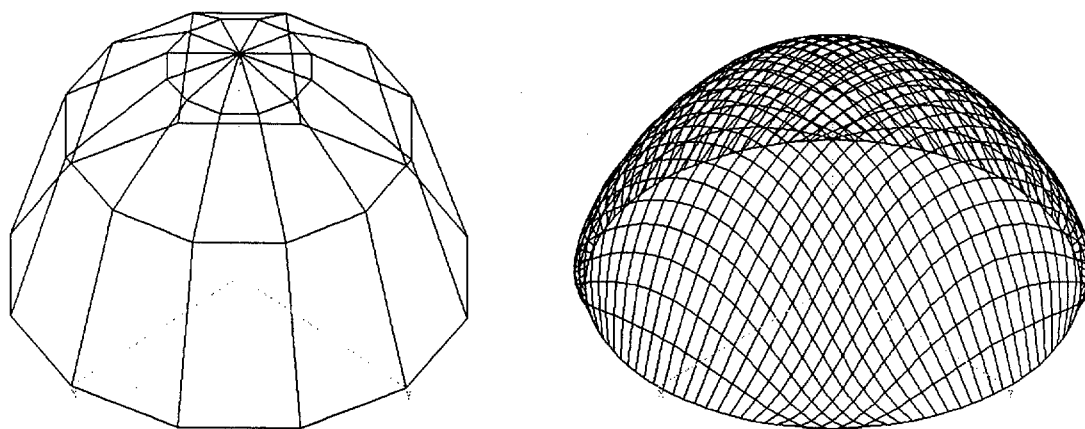


Figura 2.16. Semiesfera compuesta de superficies degeneradas y sustituta de orden 5x5

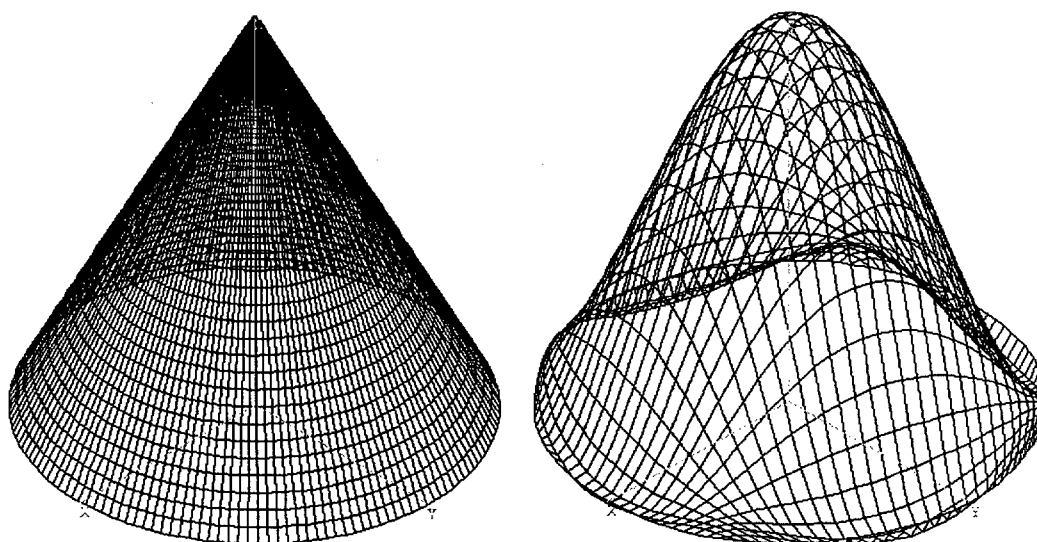


Figura 2.17. Cono compuesta de superficies degeneradas y sustituta de orden 5x5

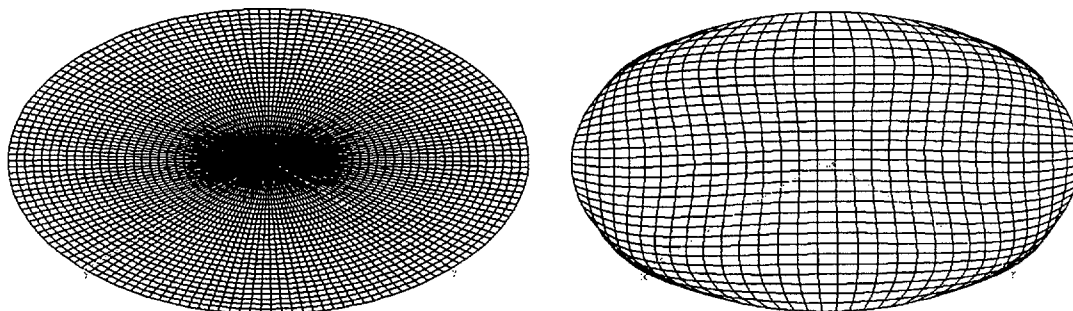


Figura 2.18. Disco compuesta de superficies degeneradas y su sustituta de orden 5x5

En cuanto al tiempo de cálculo empleado y la precisión alcanzada en función del orden de la superficie sustituta se llegaron a las conclusiones siguientes:

- Si la superficie sustituta tiene un orden grande, consecuentemente aumentará el tiempo de cálculo al tratar dicha superficie. Pero existe otro efecto que es el aumento de las oscilaciones debido al mayor orden de los polinomios que definen la superficie.
- Si la superficie sustituta posee un orden menor, el tiempo de cálculo será también menor. No aparecerán las oscilaciones que se producían en el caso anterior, pero por el contrario se corre el riesgo de que la superficie geométrica resultante no siga de forma tan fiel a la geometría inicial, si esta consta de muchos detalles.

Es por este motivo de vital importancia escoger bien el orden de la superficie sustituta para obtener buenos resultados.

Una vez que conocemos el modelo geométrico empleado continuaremos en el siguiente capítulo analizando la teoría asociada a los programas MONURBS y SIMCOR que no es otra que la técnica numérica de baja frecuencia conocida como Método de los Momentos.

- [1] W. Boehm. "Generating the Bezier points of B-Spline curves and Surfaces"
Computed Aided Design 13 (16), 1981, pp.365-366.
- [2] G. Baker, J.C.Kelly, W.Conroy, IGES 5.1 Recommended Practices Guide,
IGES/PDES Organization, National Computer Graphics Association, Fairfax,1992.
- [3] S. Coons: "Surfaces for Computed Aided Design" Technical Report. Massachusetts
Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts,1964
- [4] P. Bezier: "The Mathematical basis of UNISURF CAD System", Butterworths,
London,1986.
- [5] L. Valles, "*Aplicación de Técnicas Híbridas Basadas en el Método de los Momentos
para el Análisis de Antenas en Presencia de Geometrías Arbitrarias Eléctricamente
Grandes Modeladas con Superficies NURBS*", Tesis Doctoral, Universidad de
Cantabria, Santander, Octubre 1995.
- [6] G. Farin. "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical
Guide". Academic Press, 1988.
- [7] E. Garcia, "*Desarrollo de un método basado en Física Óptica para el cálculo de RCS
en Cavidades*", Proyecto Fin de Carrera, Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares,
Julio 2001.

3. Método de los Momentos

De entre las técnicas numéricas rigurosas existentes, el Método de los Momentos (*Method of Moments*, MoM) es una de las de mayor popularidad y potencia. El MoM se basa en la formulación integral de las ecuaciones. Mediante este método las corrientes incógnita se expresan en función de un conjunto de funciones base y posteriormente se puede obtener un sistema de ecuaciones lineales promediando con un serie de funciones de prueba. Además todos los posibles efectos están ya incorporados en la propia formulación del método: campos reflejado y difractado, difracción-reflexión y reflexión-difracción, *creeping waves*, etc.

A lo largo de este capítulo veremos el Método de los Momentos aplicado al *scattering* electromagnético y también atenderemos a los problemas de los que adolece el método y que son precisamente los que han motivado este trabajo.

3.1.- Ecuación Integral

A lo largo de la formulación desarrollada a continuación se han adoptado ciertas suposiciones que muchas veces tienen su razón de ser en el análisis del problema que se tiene entre manos:

- el material que conforma la estructura donde la antena está embarcada es un conductor perfecto (*PEC, Perfect Electric Conductor*) lo que traslada el problema del dominio volumétrico en 3D al dominio superficial, al tiempo que fija unas determinadas condiciones de contorno.
- las dimensiones de la geometría están por encima del tamaño considerado de resonancia, es decir, se intenta cubrir el margen de operación frecuencial de Baja Frecuencia. En este margen, las técnicas de Alta Frecuencia no pueden actuar debido a que las aproximaciones asintóticas pierden su validez; en definitiva se está hablando de tamaños eléctricos comprendidos entre las decenas y centenas de λ^2 . Aunque la herramienta resulta válida para todas las frecuencias, pero donde realmente presenta ventajas su uso es a estas frecuencias.
- las antenas se encuentran embarcadas sobre estructuras tales como aviones, barcos, satélites, edificios, etc.; se puede asumir que todos estos cuerpos están conformados por superficies de forma arbitraria.

El problema general que resuelve MONURBS y SIMCOR consiste en encontrar los campos dispersados cuando tanto las fuentes –localizadas en un punto del espacio– como las propiedades geométricas y físicas del medio son conocidas. Se puede ver más claramente a continuación:

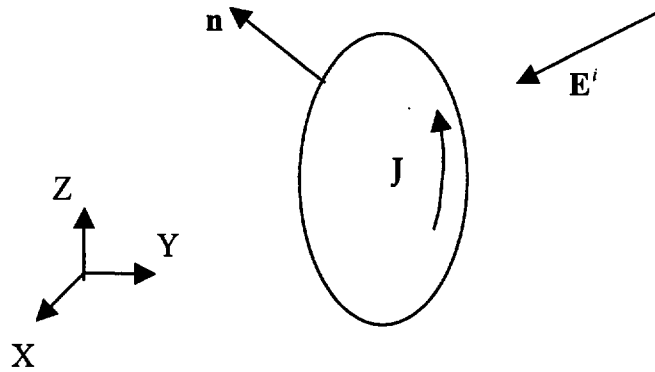


Figura 3.1 Problema general a resolver

En la figura 3.1 un campo incidente E^i creado por una distribución de corriente J^i localizada en algún punto del espacio induce sobre la superficie de un cuerpo perfectamente conductor unas corrientes J que a su vez generan un campo dispersado E^s . De esta forma el campo total E^t en cualquier punto del espacio será la suma del campo incidente y el dispersado. Dado que el campo dispersado dependerá de las corrientes inducidas en la superficie del objeto, el primer paso consistirá en la obtención de estas corrientes.

En nuestro caso las propiedades físicas del medio serán conocidas, pues supondremos que los cuerpos que conforman la estructura son perfectamente conductores y que nos encontramos en el espacio libre. Asimismo supondremos para los campos electromagnéticos una dependencia temporal de la forma $e^{j\omega t}$.

Para calcular la distribución de corrientes inducida sobre la superficie de una estructura conductora en presencia de unas determinadas fuentes, es necesario el planteamiento de una ecuación integral que relacione la excitación con los campos producidos, a través de unas condiciones de contorno apropiadas.

La base para la formulación de las técnicas integrales se encuentra en el *teorema de equivalencia*. Siguiendo este principio electromagnético, el medio original es sustituido por el espacio libre, para lo cual se añade al análisis una serie de corrientes equivalentes que compensan dicha sustitución. En definitiva, las corrientes reales que

radiar campo en presencia del objeto son sustituidas por otras equivalentes que radian el mismo campo pero en condiciones de espacio libre. Una vez que dichas distribuciones de corrientes equivalentes sean conocidas, el campo radiado o dispersado por la estructura se calcula empleando típicas integrales de radiación. La figura 3.1 representa gráficamente este teorema cuando el material que constituye la estructura es un conductor eléctrico perfecto.

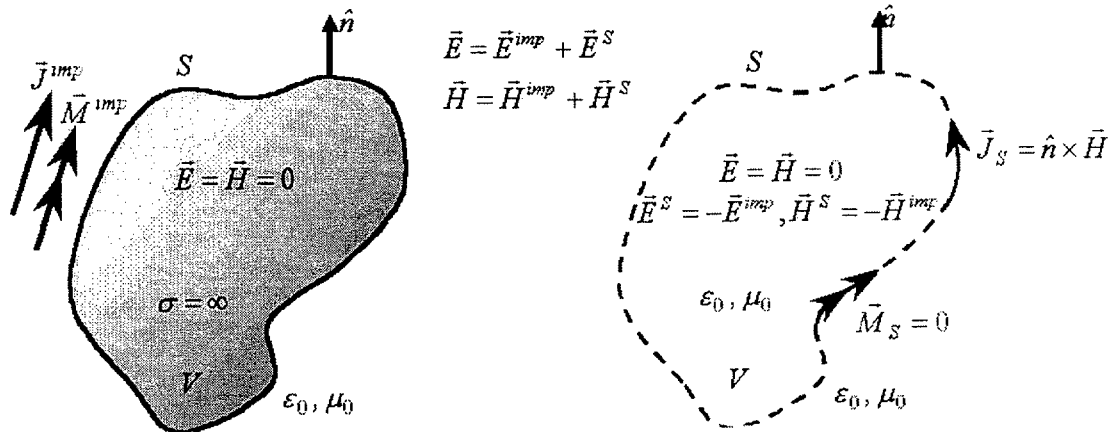


Figura 3.2.- Principio de Equivalencia para un cuerpo perfectamente conductor.

donde, \vec{J}^{imp} y \vec{M}^{imp} son las densidades de corriente eléctrica y magnética radiadas por la antena, es decir, aquellas que son conocidas en el planteamiento del problema y que producen unos campos impresos \vec{E}^{imp} y \vec{H}^{imp} . Por otro lado, \vec{J}_s y \vec{M}_s son las denominadas corrientes equivalentes que fluyen por la superficie de la estructura a analizar. \vec{M}_s es definitivamente nula, ya que es directamente proporcional a la componente tangencial del campo eléctrico que se desvanece en presencia de un medio perfectamente conductor, así que la densidad de corriente eléctrica \vec{J}_s será la única incógnita a determinar en la resolución del problema. Para ello, en la solución equivalente, el campo total debe satisfacer las condiciones de contorno en las superficies en las que existan dichas corrientes equivalentes.

$$\vec{r} \in S \Rightarrow \begin{aligned} \vec{M}_s(\vec{r}) &= -\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{J}_s(\vec{r}) &= \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) \end{aligned} \quad \text{en PEC} \quad (3.1)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie con sentido definido hacia el exterior de la misma y $\vec{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$ representa el vector de posición de un punto situado sobre la superficie del cuerpo donde se deben verificar las condiciones de contorno. En la expresión (3.1) el campo eléctrico y magnético incluye tanto a las componentes de campo impresas $(\vec{E}^{imp}, \vec{H}^{imp})$ como las radiadas (\vec{E}^s, \vec{H}^s) por las nuevas corrientes equivalentes:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}^{imp}(\vec{r}) + \vec{E}^s(\vec{r}) = \vec{E}_{imp}(\vec{r}) + L_E[\vec{J}_S] \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}^{imp}(\vec{r}) + \vec{H}^s(\vec{r}) = \vec{H}_{imp}(\vec{r}) + L_H[\vec{J}_S]\end{aligned}\quad (3.2)$$

Para resolver el problema sólo es necesario plantear una de las dos expresiones anteriores del teorema de equivalencia superficial donde L_E y L_H son los operadores lineales que dan cuenta respectivamente del campo eléctrico y magnético debidos a las corrientes \vec{J}_S . Estas expresiones representan dos de las más populares ecuaciones integrales para el análisis de cuerpos conductores:

- la ecuación integral del campo eléctrico (*EFIE, Electric Field Integral Equation*) basada en la condición de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico. Esta ecuación es la que resuelve la herramienta MONURBS.
- la ecuación integral del campo magnético (*MFIE, Magnetic Field Integral Equation*) relacionada con la condición de contorno que vincula la componente tangencial del campo magnético con la densidad de corriente inducida. Esta ecuación es la que resuelve la herramienta SIMCOR. Esta tiene en común con el MONURBS que la incógnita a resolver es la misma, y que ambas utilizan el método de los momentos.

Para la búsqueda de los operadores L_E y L_H se pueden utilizar las expresiones de los campos en función del potencial escalar (Φ) y del potencial vector (\vec{A}) además de la relación que existe ente ellos a través de la condición de Lorentz:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \nabla\Phi(\vec{r}) \quad \Phi = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla\vec{A} \quad (3.3)$$

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla\vec{A}(\vec{r}))$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

donde el potencial vector (\vec{A}) para el caso de corrientes superficiales localizadas en puntos cuyo vector de posición es $\vec{r}' = r'_x\hat{x} + r'_y\hat{y} + r'_z\hat{z}$, se definen como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' \quad (3.4)$$

Simplificando las expresiones para los operadores tenemos:

$$L_E[\vec{J}_s, \vec{M}_s] |_{\vec{M}_s=0} = \vec{E}_s(\vec{r}) |_{\vec{M}_s=0} = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla\vec{A}(\vec{r})) \quad (3.5)$$

$$L_H[\vec{J}_s, \vec{M}_s] |_{\vec{M}_s=0} = \vec{H}_s(\vec{r}) |_{\vec{M}_s=0} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

Las ecuaciones integrales particularizadas para un PEC se convierten en:

- EFIE:

$$-\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times \vec{E}_{imp}(\vec{r}) = -\hat{n} \times L_E [\vec{J}_S]$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_{imp}(\vec{r}) = \hat{n} \times \left[\frac{j\omega\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_S(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds' + \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \iint_S \nabla' \vec{J}_S(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds' \right]$$

- MFIE:

$$\vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}_{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times L_H [\vec{J}_S]$$

$$\vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}_{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times \left[\nabla \times \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{J}_S(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds' \right]$$

(3.6)

donde ∇ y ∇' son, respectivamente, los gradientes con respecto a las coordenadas de observación (sin primar) y a las coordenadas de fuente (primado); finalmente, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ es la función de Green en espacio libre para un radiador o dispersor 3D [1] definida por:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z - r'_z)^2} \quad (3.7)$$

Las ecuaciones mostradas anteriormente en (3.6) se denominan integro-diferenciales, debido a que los operadores que actúan sobre la incógnita del problema \vec{J}_S aparecen en el integrando de la ecuación. La EFIE queda encuadrada dentro de las ecuaciones integrales de *Fredholm de 1ª especie* [2]. Este tipo de ecuaciones resultan más complicadas de resolver debido a que la incógnita, la corriente, aparece únicamente en el integrando de la ecuación y además se ve afectada por el operador divergencia. Esta ecuación considera potenciales debido tanto a las corrientes (primera integral) como a las cargas (segunda integral) y será la ecuación que se tratará de resolver numéricamente con el MoM.

La MFIE, catalogada como una ecuación integral de *Fredholm de 2ª especie* [2], tiene una formulación más sencilla y presenta una estructura típica para ser resuelta utilizando un esquema iterativo. El único problema que presenta la MFIE es a la hora de estudiar estructuras abiertas.

Dando un paso más en el desarrollo de la MFIE, e intercambiando diferenciación e integración se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')) &= G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla \times \vec{J}_s(\vec{r}') + \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_s(\vec{r}') \\ \nabla \times \vec{J}_s(\vec{r}') &= 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\nabla \times (\vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')) = \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_s(\vec{r}')$$

con lo que la ecuación integral queda ahora como:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}_{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times \left[\frac{1}{4\pi} \iint_S \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_s(\vec{r}') ds' \right] \tag{3.9}$$

desarrollando el gradiente de la función de Green [1] tenemos:

$$\nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla \left(\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = - \left(\frac{1+jkR}{R^2} \right) e^{-jkR} \hat{R} \quad R = |\vec{r}-\vec{r}'|, \hat{R} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{3.10}$$

y la expresión final para la MFIE queda:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}_{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times \left[- \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1+jkR}{R^2} \right) e^{-jkR} [\hat{R} \times \vec{J}_s(\vec{r}')] ds' \right] \tag{3.11}$$

Una vez resuelta la ecuación integral (EFIE o MFIE) hay que calcular el campo radiado por la corriente inducida y con ello definir adecuadamente los diagramas de

radiación para realizar un diseño óptimo de las antenas embarcadas. Es necesario que los campos obtenidos en la solución cumplan la condición de radiación de Sommerfeld [3]. Esto se consigue convolucionando las corrientes con funciones de Green que cumplen dicha condición de radiación, es decir, los campos se propagan desde la fuente hacia el exterior y se atenúan con la distancia para conservar la potencia total del frente de onda. La figura 3.3 muestra el sistema asociado al estudio de campo lejano donde se determina la dirección de observación \vec{r} (especificada por las coordenadas esféricas θ y ϕ) y la densidad de corriente eléctrica situada en un punto \vec{r}' de la superficie S .

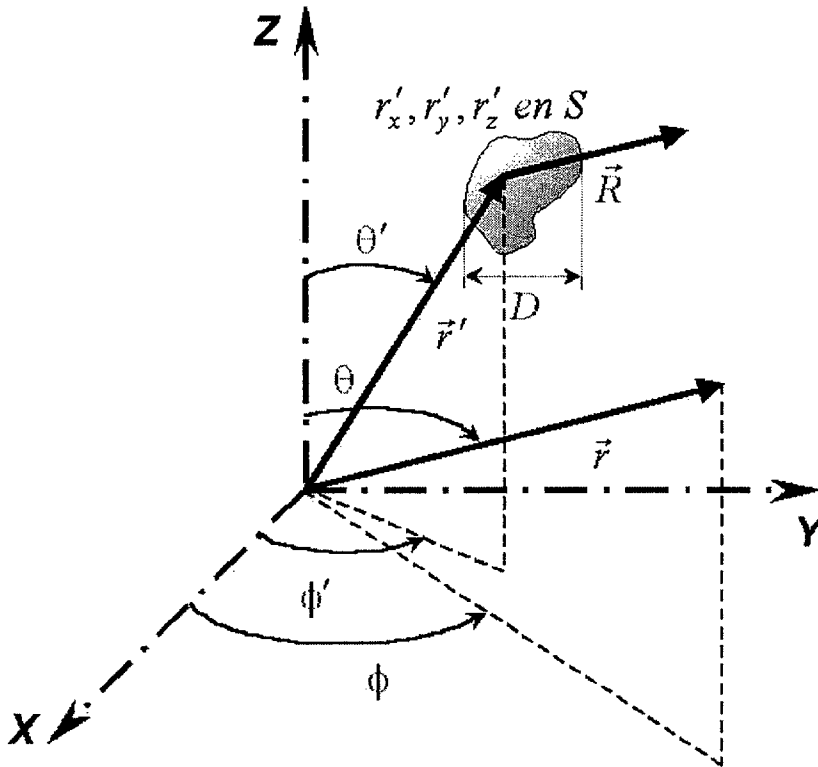


Figura 3.3.- Sistema de coordenadas para el análisis de antenas en condiciones de campo lejano.

Un punto de observación se encuentra bajo condiciones de campo lejano cuando se verifica que $r \geq 2D^2/\lambda$ siendo $r = |\vec{r}|$, D la dimensión máxima de la estructura y λ la longitud de onda del análisis. Bajo condiciones de campo lejano, se desprecian los términos que contribuyen con dependencia $1/r^2$, $1/r^3$, $1/r^4$, etc. La distancia que aparece en la función de Green también se aproxima por:

$$R = |\vec{R}| \Rightarrow \begin{matrix} r - \hat{r} \cdot \vec{r}'(1) \\ r(2) \end{matrix} \quad (3.12)$$

donde (1) es la variación de fase y (2) la variación de amplitud.

Con esto, el campo radiado por una distribución de corriente eléctrica \vec{J}_S en un punto situado en campo lejano queda definido por:

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})) \xrightarrow{\text{CampoLejano}} \vec{E}_S(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) \quad (3.13)$$

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \iint_S \vec{J}_S(\vec{r}') e^{jk\vec{r}\vec{r}'} ds'$$

3.2.- Método de los Momentos.

De manera general, resolver de forma numérica un problema físico supone:

- Expresar de forma matemática las relaciones que ligan las magnitudes físicas que intervienen en el problema.
- Convertir el problema matemático en un problema numérico.

La primera parte ya la tenemos hecha puesto que (3.6) y (3.11) son las ecuaciones que relacionan el campo impreso, la geometría y la densidad de corriente inducida en la superficie del cuerpo mediante la EFIE y la MFIE, respectivamente. Para la segunda parte emplearemos el Método de los Momentos [4]. Para ello debemos pensar que ambas ecuaciones se pueden expresar de forma compacta como

$$L(F) = Y \quad (3.14)$$

Donde L es el operador lineal que actúa sobre la incógnita F , e Y es conocido. Estableciendo paralelismos con las ecuaciones integrales de campo, L es el operador integro-diferencial que actúa sobre la incógnita $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ e Y es el campo impreso $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ en EFIE y $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ en MFIE.

El MoM resuelve ecuaciones del tipo de (3.14) convirtiéndolas en un sistema de ecuaciones algebraicas. Actúa en dos pasos. En primer lugar aproxima la incógnita mediante un conjunto finito de funciones base conocidas $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_N\}$:

$$F = \sum_{n=1}^N I_n B_n \quad (3.15)$$

donde $\{I_1, I_2, I_3, \dots, I_N\}$ son los coeficientes que ponderan a cada una de las funciones base y que deberán ser determinados. Nótese que si $N=\infty$ tendríamos una representación exacta de F pero no podríamos alcanzar una solución numérica por lo que hay que truncar. Puesto que L es lineal podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^N I_n L(B_n) = Y \quad (3.16)$$

Esta ecuación es un sistema de ecuaciones con N incógnitas. Para resolverlo interviene el segundo paso del Método de los Momentos que consiste en definir un nuevo grupo de funciones $\{W_1, W_2, W_3, \dots, W_N\}$, que llamaremos funciones prueba, y realizar el producto interno de (3.16) con cada una de las nuevas funciones:

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle W_m, L(B_n) \rangle = \langle W_m, Y \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

donde aparece el producto interno que se define en el dominio D del operador L como:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x) g^*(x) dx \quad (3.18)$$

siendo $g^*(x)$ el complejo conjugado de $g(x)$. Nos podemos percatar de que (3.17) ya es un sistema de N ecuaciones con N incógnitas aunque esto se ve más claro con la siguiente notación:

$$[Z][I] = [V] \quad (3.19)$$

en la que,

$$[Z] = \begin{bmatrix} \langle W_1, L(B_1) \rangle & \langle W_1, L(B_2) \rangle & \dots & \langle W_1, L(B_N) \rangle \\ \langle W_2, L(B_1) \rangle & \langle W_2, L(B_2) \rangle & \dots & \langle W_2, L(B_N) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle W_N, L(B_1) \rangle & \langle W_N, L(B_2) \rangle & \dots & \langle W_N, L(B_N) \rangle \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} \langle W_1, Y \rangle \\ \langle W_2, Y \rangle \\ \vdots \\ \langle W_N, Y \rangle \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De modo que con el MoM hemos conseguido reducir la ecuación integro-diferencial (3.6 ó 3.11) a un sistema de ecuaciones como el de (3.14). Si la matriz $[Z]$ no es singular la solución se hallar calculando la matriz inversa:

$$[I] = [Z]^{-1}[V] \quad (3.22)$$

no obstante, puesto que esta es una tarea complicada se suele recurrir a métodos iterativos. Tanto la herramienta MONURBS (herramienta que utiliza el método de los momentos para el cálculo de EFIE) como la herramienta SIMCOR (MFIE) emplean el Método del Gradiente Conjugado [5][6] para la resolución del sistema de ecuaciones, pero más adelante dedicaremos un capítulo a ver éste y otros métodos iterativos.

3.3.- Funciones base y funciones prueba

Hemos visto que la discretización que lleva a cabo el Método de los Momentos hace uso de un conjunto de funciones base y un conjunto de funciones prueba. Las primeras tienen como objetivo realizar un muestreo de las incógnitas, mientras que las segundas verifican posteriormente el cumplimiento de las condiciones de contorno sobre puntos o zonas discretas de la superficie de la estructura.

Antes de ver los diferentes tipos que hay de ambas funciones y de mostrar cuáles fueron las elegidas en las herramientas desarrolladas vamos a introducir un concepto importante en la discretización de un cuerpo modelado por parches de Bézier: el concepto de lado:

3.3.1.- Discretización de corriente y concepto de lado

Nuestra intención con este apartado es indicar qué significa físicamente la discretización, es decir, cómo se aplica a una superficie modelada con parches. Pongamos para ello un sencillo ejemplo.

Supongamos que queremos calcular la RCS de una placa plana de dimensiones 1×1 longitudes de onda y que está modelada por un único parche NURBS. Aplicar el Método de los Momentos no es en esencia más que muestrear. Vamos a tomar por simplicidad 3 divisiones por longitud de onda.

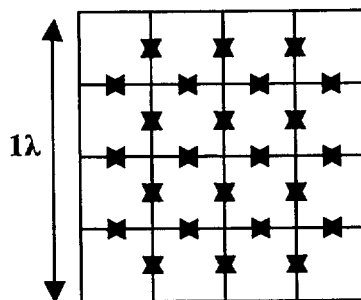


Figura 3.4.- Discretización en un parche plano

En la figura vemos una subdivisión en 16 subparches según mallado regular. Para discretizar la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ se muestrea en los puntos que ahí aparecen. Es decir, a la hora de obtener la corriente inducida en la placa se asociará una función base y una función prueba a cada uno de los puntos señalados con estrellitas. Estos puntos son los centros de cada *lado* del modelo. Los lados del modelo serán los contornos de cada uno de los subparches en que se ha dividido el parche origen, pero no aquéllos que estén contenidos en el contorno del parche origen. Vemos que en nuestro ejemplo hay 24 lados.

El caso plano que hemos visto es una particularidad de un caso general en el que tengamos una superficie curva modelada por un parche NURBS curvo. Entonces habrá primero que ir al dominio paramétrico marcado por u y v , para una vez allí realizar las divisiones pertinentes según la precisión que queramos obtener [5][6]. Hay que tener en cuenta que los lados en una superficie NURBS son isoparamétricos, es decir, constantes en u o constantes en v . Una vez realizada la división hay que regresar al dominio real. Este proceso se ve en la figura 3.5:

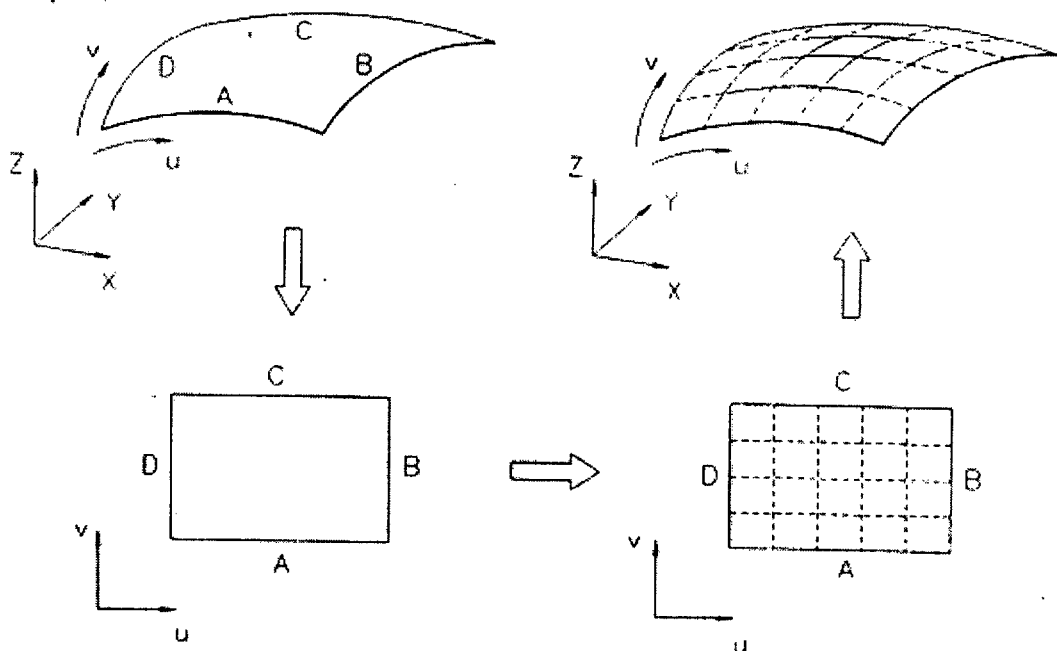


Figura 3.5.- Proceso de subdivisión de una superficie NURBS

3.3.2.- Funciones base

Hay varios tipos de funciones base pero todas se pueden encuadrar en alguna de las siguientes categorías:

1.- Funciones base de dominio completo:

Son aquellas funciones que toman un valor distinto de cero en todo el dominio de la función considerada. La principal ventaja radica en que se requiere un menor número de términos para representar la función incógnita. Por contra es necesario conocer la forma aproximada de la misma. Ejemplos de este tipo son las funciones seno y coseno.

$$B_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.23)$$

2.- Funciones base de subdominio:

En esta ocasión las funciones toman un valor distinto de cero solo en una parte del dominio de definición de la función incógnita. Lo que se suele hacer es dividir el dominio en una serie de subdominios sobre los que se definen estas funciones. Dentro de este grupo encontramos las funciones *rooftop* que son las que emplea MONURBS y SIMCOR en una versión adaptada. Puesto que como acabamos de ver en el apartado anterior las funciones de base se definen sobre los lados del modelo es muy común referirse a los lados también como subdominios. Además con las funciones de subdominio tenemos la ventaja de que no es necesario conocer a priori la forma aproximada de la función incógnita, aunque harán falta más términos para lograr una buena aproximación. Funciones de este tipo son, para el caso unidimensional, las funciones delta, las funciones pulso o las funciones triángulo. Generalmente la elección de un determinado tipo de funciones base depende del modelado geométrico por eso es muy común encontrar funciones *rooftop* para modelado por parches rectangulares [7] y triángulos de Rao para modelado por parches triangulares [8].

3.3.2.1.- Funciones *rooftop* sobre superficies paramétricas

En primer lugar hablaremos de los *rooftops* planares. Fueron introducidos por Wilton [7][9] y son las funciones base utilizadas cuando la estructura es modelada por medio de parches rectangulares planos. No es la intención de este trabajo explicar con gran detalle este tipo de función base, sino simplemente ver sus características más importantes antes de extenderlas al caso general en que los parches puedan ser curvos. Así, tal y como se aprecia en la siguiente figura los *rooftops* planares se definen sobre cada lado del modelo y se extienden a lo largo de los dos subparches que lo forman -en la figura por claridad solo se muestran unos pocos *rooftops*-.

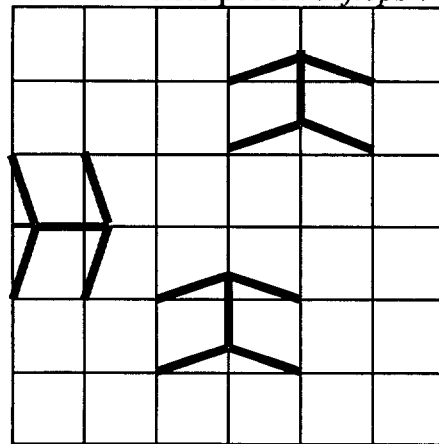


Figura 3.6.- Funciones *rooftop* planares

Para extender estas funciones a superficies paramétricas nos vamos a basar en la siguiente figura:

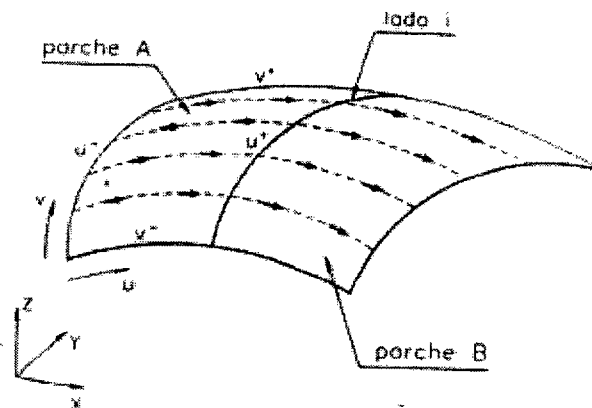


Figura 3.7.- Lado *i* como contorno común del parche *A* y *B*

El lado *i* está compartido por los dos parches *A* y *B*. A continuación, se asocia una función base a este lado de forma que se extienda sólo una pareja de parches

adyacentes. De esta forma, suponiendo que el lado i es una curva isoparamétrica $u=constante$, la corriente fluirá del parche A al B siguiendo líneas isoparamétricas $v=constante$ tal como se muestra en la figura. La divergencia de esta corriente debe ser constante para garantizar una densidad de carga constante en cada uno de los parches que forman el lado. Así, la carga total asociada a los parches A y B es $-1/jw$ y $1/jw$, respectivamente.

Suponiendo que el lado en curso es una curva de tipo u^+ ($u=l$) para el parche A , la corriente asociada al lado i en este parche puede obtenerse a partir de

$$\mathbf{J}(u, v) = \mathbf{J}_i^A(u, v)\mathbf{e}_u(u, v) \quad (3.24)$$

donde $\mathbf{e}_u(u, v)$ es la derivada parcial de la superficie paramétrica con respecto a u y $\mathbf{J}_i^A(u, v)$ se obtiene a partir de la ecuación de continuidad (3.5) forzando que la carga total asociada al parche A sea $-1/jw$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(u, v) = \frac{1}{S_A} \quad (3.25)$$

donde S_A es el área del parche A .

Se puede demostrar [6] que, haciendo uso del operador de divergencia, a partir de (3.25) se halla $\mathbf{J}_i^A(u, v)$ como:

$$\mathbf{J}_i^A(u, v) = \frac{1}{S_A \sqrt{g(u, v)}} \int_0^u \sqrt{g(u, v)} du \quad (3.26)$$

donde

$$g^2(u, v) = [\mathbf{e}_u(u, v) \cdot \mathbf{e}_u(u, v)][\mathbf{e}_v(u, v) \cdot \mathbf{e}_v(u, v)] - [\mathbf{e}_u(u, v) \cdot \mathbf{e}_v(u, v)]^2 \quad (3.27)$$

Puede verse en (3.26) que $J_i^A(u, v)$ se anula en $u^- (u=0)$ y que toma su máximo en $u^+ (u=1)$. Este es el mismo comportamiento que tenían los *rooftops* planares. De hecho los *rooftops* planares son un caso particular en el que las curvas paramétricas tienen grado 1.

Se pueden seguir procedimientos análogos para calcular la expresión de $J_i^A(u, v)$ cuando el lado de la curva sea u y para los distintos tipos de curva en el parche B .

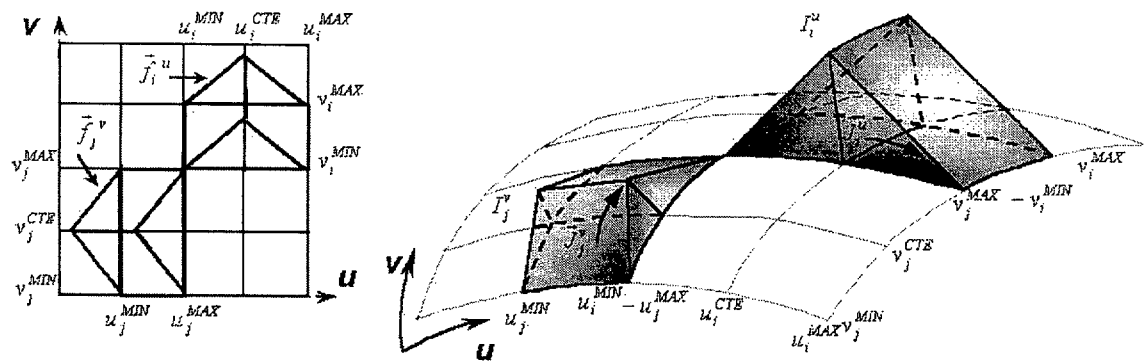


Figura 3.8.- Funciones base de corriente para las direcciones de muestreo u y v .

Las funciones *rooftops* presentadas se usan como funciones base que discretizan la corriente tanto en el MONURBS (EFIE) como en el SIMCOR (MFIE).

3.3.3.- Funciones prueba

En el estudio de antenas embarcadas, la superficie que rodea a la antena puede tener geometrías totalmente arbitrarias. Este hecho provoca el uso de funciones peso, puesto que las Condiciones de Contorno (CC) sólo se pueden imponer de manera exacta cuando la geometría bajo análisis presenta una forma canónica [3]. Las funciones peso o prueba (*weighting* o *testings functions*) se introducen para establecer de forma aproximada estas condiciones de contorno cuando la estructura sea arbitraria y con ello, poder resolver la ecuación integral. De modo que su papel es clave a la hora de poder

analizar superficies arbitrarias, de ahí que con este trabajo se pretenda mejorar esta parte de la herramienta, para poder estudiar todo tipo de superficies.

Según sea la tipología de la función peso utilizada aparecen diferentes métodos:

- Método de *colocación* o *point-matching*:

Las condiciones de contorno se imponen sobre un conjunto finito de puntos de la superficie:

$$CC(\vec{r}_i)_{calculado} \Big|_s - CC(\vec{r}_i)_{real} \Big|_s = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

Este método no es aconsejable ya que no asegura el cumplimiento de las condiciones de contorno entre los puntos discretos. Evidentemente, el obtener este muestreo sobre puntos discretos implica que las funciones peso sean las conocidas deltas de Dirac:

$$W_n(u, v) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) = \begin{cases} 1 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_n \\ 0 \Rightarrow \vec{r} \neq \vec{r}_n \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad \vec{r}_n = \vec{r}_n(u, v) \quad (3.29)$$

- Método de *mínimos cuadrados*:

En este caso no se fuerza el cumplimiento de la condición de contorno en puntos concretos sino que se minimiza de forma global el error cuadrático medio cometido sobre la estructura:

$$\left\{ \int_s |CC(\vec{r}_i)_{calculado} - CC(\vec{r}_i)_{real}|^2 ds \right\}_{\text{mínimo}} \quad (3.30)$$

- Método de los *residuos ponderados* o de los *momentos*

Como tercera opción, este método minimiza la desviación media de las condiciones de contorno sobre la estructura completa. Para ello se hace nulo el error ponderándolo con unas ciertas funciones peso $W_i(\vec{r})$:

$$\int_S [CC(\vec{r}_i)_{calculado} - CC(\vec{r}_i)_{real}] \cdot W_i(\vec{r}) ds = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

Una variante sería el método Galerkin donde la función peso es la misma que la función base utilizada para representar la incógnita.

La función conocida como *cuchilla* o *razor-blade* [7] tiene un buen comportamiento cuando se emplean funciones tejado para representar la densidad de corriente. Sin embargo, estas funciones se modifican para que se adapten a la naturaleza curva de las superficies bajo estudio [5]. A la hora de trabajar con estas funciones prueba, hay que tener en cuenta que tipo de condición de contorno se desea imponer: componente tangencial del campo eléctrico (EFIE, en el MONURBS) ó componente tangencial del campo magnético (MFIE, en el SIMCOR). En la siguiente figura se ve como son estas funciones cuchilla para cada una de esas condiciones.

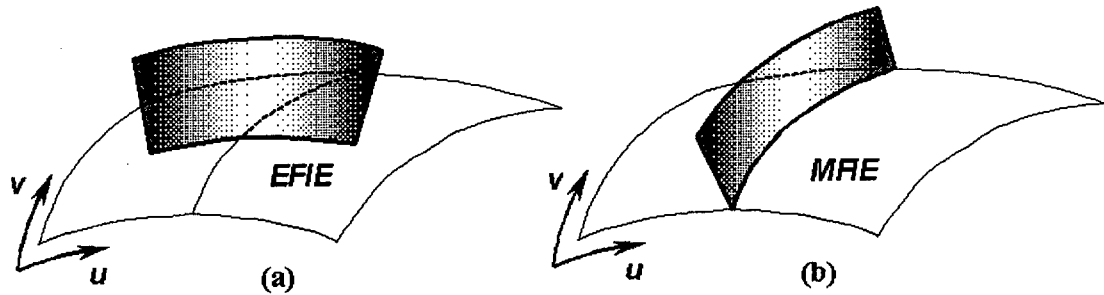


Figura 3.9.- Funciones peso tipo cuchilla: a) EFIE, b) MFIE.

El campo eléctrico presenta su mayor componente en la dirección de la corriente, por lo que en la EFIE, la función cuchilla se define paralelamente a la dirección de la corriente. Sin embargo, la función base introducida en la MFIE es perpendicular a la tradicionalmente utilizada en la EFIE. En la MFIE, la corriente inducida viene dada por:

$$\vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) \perp \vec{J}_S(\vec{r}) \quad \vec{H}(\vec{r}) \perp \hat{n}(\vec{r}) \quad (3.32)$$

Teniendo esto en cuenta, la componente de campo magnético tangencial que más influye en el cumplimiento de la condición de contorno, tendrá orientación

transversal a la de la corriente $\vec{J}_S(\vec{r})$, justificando así la nueva función peso introducida.

Desarrollemos a continuación la formulación matemática de estas funciones prueba para el caso de la EFIE y de la MFIE, respectivamente.

- Funciones prueba de EFIE

La aproximación por tramos rectos facilita la adaptación a parches curvos de la función cuchilla e impone que la función prueba se desarrolle de forma independiente en cada parche A y B .

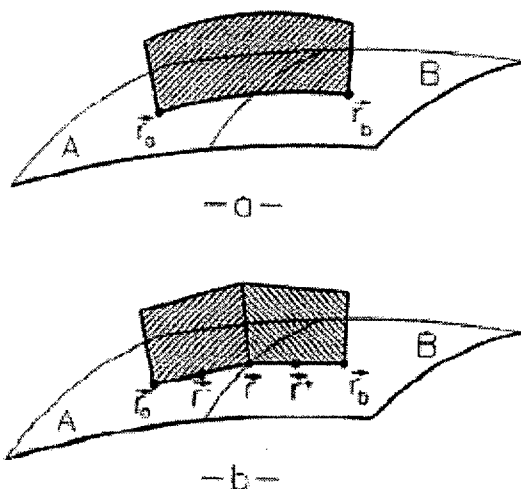


Figura 3.10.- Función prueba de EFIE asociada al subdominio i : a) Forma rigurosa. b) Aproximación por tramos rectos

$$W_i = \begin{cases} W_i^A & \text{en } A \\ W_i^B & \text{en } B \end{cases} \quad (3.33)$$

Fijándonos en A la función prueba se define en el tramo de curva isoparamétrica que une el centro del parche A con el centro del lado i . Además dependiendo del tipo de lado que éste sea (u^+, u^-, v^+, v^-) respecto al parche, el tramo de curva se expresará de diferente forma:

- Si el lado i es u^+ de A

$$W_i^A = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 0.5 \text{ y } 0.5 \geq u \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.34)$$

- Si el lado i es u de A

$$W_i^A = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 0.5 \text{ y } 0 \geq u \leq 0.5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.35)$$

De manera análoga obtendríamos W_i^A cuando i es v^+ o v^- y W_i^B en cualquiera de los cuatro casos.

- Funciones prueba de MFIE

La expresión matemática de las funciones peso W_i^u y W_j^v es la siguiente:

$$W_i^u(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} u = u_i^{CTE} \\ v_i^{MIN} \leq v \leq v_i^{MAX} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$W_j^v(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} u_j^{MIN} \leq u \leq u_j^{MAX} \\ v = v_j^{CTE} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Para las funciones prueba definidas en (3.36) y suponiendo que queremos discretizar o promediar el campo magnético que existe en el subdominio con corriente tipo u y función prueba asociada W_u^i :

$$\langle \vec{H}, W_i^u(u, v) \rangle = \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} \vec{H}(u_i^{CTE}, v) (W_i^u(u_i^{CTE}, v))^* dv = \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} \vec{H}(u_i^{CTE}, v) dv \quad (3.37)$$

El caso de corriente tipo v , con función peso W_j^v , sería análogo, habría que elegir como variable de integración a la coordenada u y los límites de integración serían ahora u_j^{MIN} y u_j^{MAX} .

Como mencionamos en el apartado 3.1, se precisa que la estructura bajo análisis sea eléctricamente grande. Una vez cumplido este requisito, se debe realizar una discretización de la corriente lo suficientemente fina para que se pueda cumplir que:

- la variación del campo magnético a lo largo del dominio de definición de cada función peso debe ser lenta por lo que tomando su valor en el centro del subdominio sería suficiente
- la estructura debe tener radios de curvatura grandes en función de λ como para que los subdominios con longitud $\lambda/8$ o $\lambda/10$ se puedan considerar localmente planos.

Teniendo en cuenta estos requisitos, el concepto de producto interno se puede simplificar y formular dando carácter vectorial a la función peso asociada a cada subdominio. Siguiendo con el ejemplo de discretización sobre el subdominio con función peso W_u^i , el producto interno se puede transformar en:

$$\begin{aligned} \text{Punto central} \rightarrow (u_i^{CTE}, v_i^{MED}) &= \left(u_i^{CTE}, \frac{v_i^{MIN} + v_i^{MAX}}{2} \right) \\ \langle \vec{H}, W_i^u(u, v) \rangle &= \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} \vec{H}(u_i^{CTE}, v) dv = \vec{H}(u_i^{CTE}, v_i^{MED}) \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} dv \\ &= \vec{H}(u_i^{CTE}, v_i^{MED}) \Delta l_i = \vec{H}(u_i^{CTE}, v_i^{MED}) \cdot \vec{W}_i^u(u, v) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para un caso general, la discretización sobre el subdominio 'i' se reduce a:

$$\langle \vec{H}, W_i \rangle = \vec{H}(\vec{r}_i) \cdot \vec{W}_i \quad (3.39)$$

donde \vec{r}_i es el punto central del subdominio y las funciones prueba simplificadas \vec{W}_i se definen para cada tipo de corriente, u o v , como:

$$\begin{aligned} \vec{W}_i^u(u, v) &= \Delta l_i \hat{i}(\vec{r}_i) & \Delta l_i &= \left| \vec{r}(u_i^{CTE}, v_i^{MAX}) - \vec{r}(u_i^{CTE}, v_i^{MIN}) \right| \\ & & \vec{r}_i &= \vec{r} \left(u_i^{CTE}, \frac{v_i^{MAX} + v_i^{MIN}}{2} \right) \\ \vec{W}_j^v(u, v) &= \Delta l_j \hat{i}(\vec{r}_j) & \Delta l_j &= \left| \vec{r}(u_j^{MAX}, v_j^{CTE}) - \vec{r}(u_j^{MIN}, v_j^{CTE}) \right| \\ & & \vec{r}_j &= \vec{r} \left(\frac{u_j^{MAX} + u_j^{MIN}}{2}, v_j^{CTE} \right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Los vectores $\hat{i}(\vec{r}_i)$ y $\hat{i}(\vec{r}_j)$ son vectores unitarios tangentes a la superficie en el punto medio del subdominio y en la dirección paramétrica adecuada para cumplir el criterio de signos asociado a la expresión (3.35). La figura 3.11 muestra estos vectores, así como las distancias Δl_i y Δl_j :

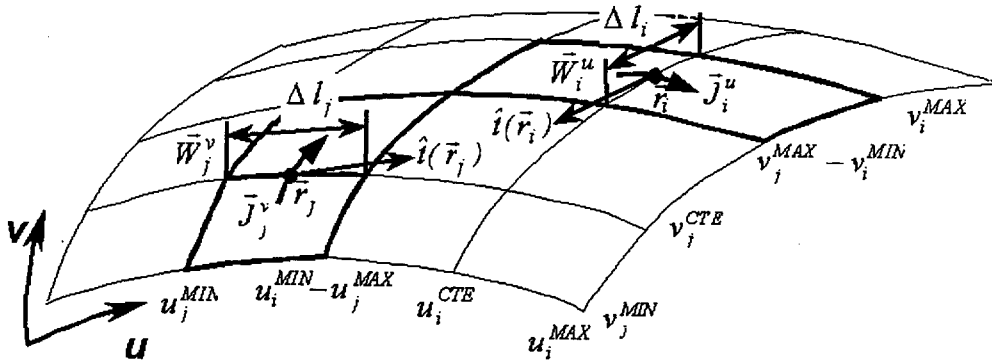


Figura 3.11.- Funciones base simplificadas para cada tipo de subdominio.

Como se puede comprobar en (3.39), el producto interno se ha transformado en un producto escalar entre la magnitud vectorial y la función prueba. Al ser esta última un vector en la dirección tangente a la superficie en el punto medio del subdominio, en el proceso de discretización se obtiene, en un único cálculo, la componente tangencial del campo magnético muestreada sobre cada subdominio que es sobre la que se establece la MFIE.

$$MFIE \text{ general} \Rightarrow \vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}^{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_{tang}^{imp}(\vec{r}) + L_{H,tang} [\vec{J}_S] \quad (3.41)$$

$$MFIE \text{ discretizada} \Rightarrow \langle \vec{J}_S, W_i \rangle = \langle \vec{H}^{imp}, W_i \rangle + \langle L_H [\vec{J}_S], W_i \rangle$$

El promedio $\langle \vec{J}_S, W_i \rangle$ proporciona la corriente total en amperios que atraviesa cada subdominio que es directamente la definición del coeficiente I_i en la expansión de corriente:

$$I_i = \langle \vec{H}^{imp}, W_i \rangle + \langle L_H [\vec{J}_S], W_i \rangle = \vec{H}^{imp}(\vec{r}_i) \cdot \vec{W}_i + L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \cdot \vec{W}_i \quad (3.42)$$

3.4.- Matriz de impedancias

Una vez que tenemos definidas las funciones base y prueba necesarias en el Método de los Momentos se puede obtener la matriz de impedancias o matriz de acoplos. Lo que se persigue es el cálculo del segundo miembro de la ecuaciones (3.6) y (3.11), convenientemente promediado para cada uno de los subdominios en los que se ha discretizado la geometría. Si tenemos N lados, el sistema de ecuaciones de (3.14) tiene N ecuaciones con N incógnitas y la matriz Z tiene orden N .

El acoplo entre dos subdominios i y j es un elemento de la matriz Z que se denota por Z_{ij} y se toma como criterio que bajo esta notación el lado j es el lado activo y el lado i es el lado víctima de forma que en j se localiza la fuente de la función de Green cuando se promedia en el subdominio i .

A continuación se detallan las expresiones que se utilizan en el MONURBS y en el SIMCOR para el cálculo de la matriz de acoplos de cada herramienta.

3.4.1.- Matriz de impedancias de EFIE

El acoplo entre dos términos, Z_{ij} , se puede descomponer en un término inductivo y un término capacitivo:

$$Z_{ij} = Z_{ij}^{ind} + Z_{ij}^{cap} \quad (3.43)$$

3.4.1.1.- Término inductivo

Depende de la corriente de la función base asociada al lado j formado por los parches C y D:

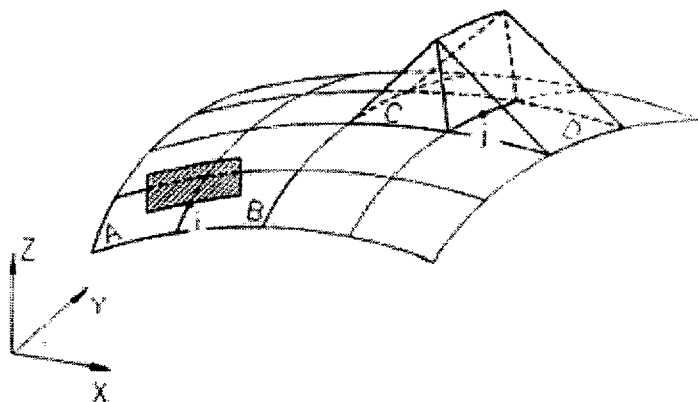


Figura 3.12.- Acoplo inductivo

$$Z_{ij}^{ind} = \int_{r_a}^{r_b} \left[\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{S_j^C} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_j^C(\mathbf{r}') dS' + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{S_j^D} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_j^D(\mathbf{r}') dS' \right] dl \quad (3.44)$$

Dado que las integrales que se extienden sobre la superficie de los parches C y D varían lentamente respecto al punto de observación \mathbf{r} , (3.45) se puede escribir como

$$Z_{ij}^{ind} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \int_{S_j^C} G(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}') \mathbf{J}_j^C(\mathbf{r}') dS' + (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}) \cdot \int_{S_j^D} G(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \mathbf{J}_j^D(\mathbf{r}') dS' \right] \quad (3.45)$$

donde, según la figura 3.12, \mathbf{r} es el vector de posición del centro del lado i y \mathbf{r}^- y \mathbf{r}^+ , los vectores de posición de los puntos centrales de los tramos rectos con los que se aproxima la función prueba.

3.4.1.2.- Término capacitivo

El valor de este término depende únicamente de la carga del *rooftop* j y se puede calcular según la siguiente expresión

$$Z_{ij}^{cap} = \int_{r_a}^{r_b} \left[-\frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \nabla \int_{S_j^C} \frac{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{S_j^C} dS' + \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \nabla \int_{S_j^D} \frac{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{S_j^D} dS' \right] d\mathbf{l} \quad (3.46)$$

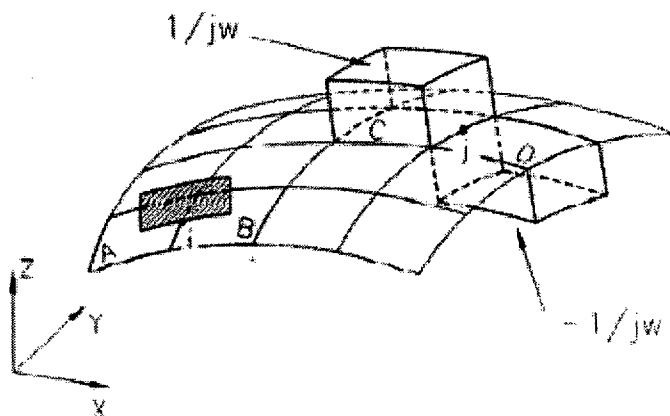


Figura 3.13.- Acoplo capacitivo

Como (3.46) implica el cálculo de un gradiente, al promediar con la función prueba asociada al subdominio i , se puede poner como:

$$Z_{ij}^{cap} = P^C(\mathbf{r}_b) - P^C(\mathbf{r}_a) - [P^D(\mathbf{r}_b) - P^D(\mathbf{r}_a)] \quad (3.47)$$

donde por ejemplo $P^C(\mathbf{r}_b)$ se calcula como

$$P^C(\mathbf{r}_b) = \frac{-1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \int_{S_j^C} \frac{G(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}')}{S_j^C} dS' \quad (3.48)$$

y de igual forma se calcularían el resto de términos de (3.46).

3.4.2.- Matriz de impedancias de MFIE

Para desarrollar el operador que interviene en la MFIE se hace uso de la expresión del potencial vector \vec{A} :

$$L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_S(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (3.49)$$

Aplicando identidades vectoriales, se llega a que el operador que interviene en la MFIE una vez que se ha particularizado para el subdominio observación i viene dado por:

$$L_H^{riguroso} [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} = \vec{H}_S(\vec{J}_i) - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \iint_{S_j} \frac{1+jkR}{R^2} e^{-jkR} [\hat{R} \times \vec{J}_j(\vec{r}')] ds' \quad (3.50)$$

donde $R = |\vec{r}_i - \vec{r}'|$, $\hat{R} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}'}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}$, \vec{r}' es el punto de integración y \vec{r}_i es el punto central del subdominio observación i y \hat{n}_i es el vector normal a la superficie en ese

punto. Como se puede observar, el acoplo con el propio subdominio de corriente $\vec{H}_S(\vec{J}_i)$, donde $\vec{r}_i = \vec{r}'$, tiene un tratamiento especial que se explica a continuación.

En el caso de evaluar el acoplo de una función de corriente consigo misma, es decir, cuando en (3.50) $j = i$, o lo que es lo mismo $\vec{r} = \vec{r}'$, el gradiente de la función de Green (3.8) presenta una singularidad.

La figura 3.14 muestra un esquema de la geometría y la distribución de los campos que ayudará en la deducción del operador debido a la propia corriente. Este caso se ha particularizado para la corriente \vec{J}^u pero evidentemente, para \vec{J}^v el estudio sería análogo.

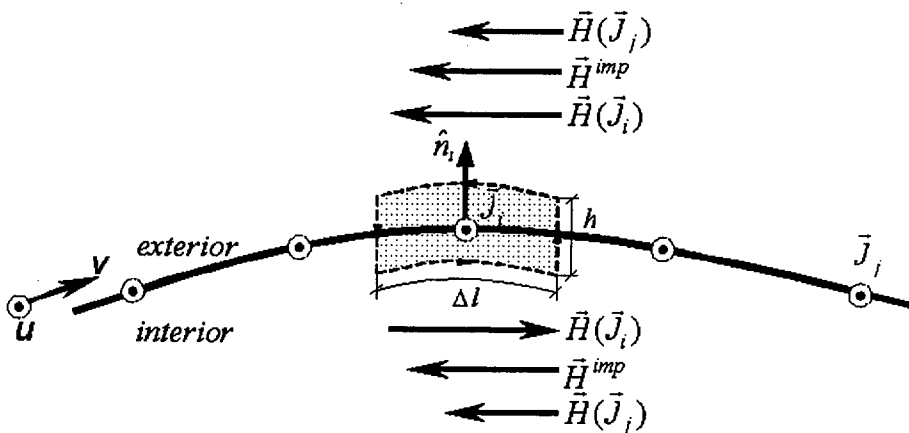


Figura 3.14.- Evaluación del operador cuando $j=i$.

La deducción del término cuando $j=i$ está relacionada con la circulación del campo magnético en torno a la corriente para la caja de dimensiones Δl y h , donde se debe tener en cuenta que en el límite, $h \rightarrow 0$. Para evaluar la corriente \vec{J}_i debida a la zona sombreada, el propio subdominio, se necesita conocer el campo magnético tanto fuera como dentro de la estructura:

$$\begin{aligned} \vec{H}_S^{exterior}(\vec{r}_i) &= \vec{H}^{imp} + \vec{H}_S(\vec{J}_j)_{j \neq i} + \vec{H}_S(\vec{J}_i) \\ \vec{H}_S^{interior}(\vec{r}_i) &= \vec{H}^{imp} + \vec{H}_S(\vec{J}_j)_{j \neq i} - \vec{H}_S(\vec{J}_i) \end{aligned} \quad (3.51)$$

con lo que la expresión para la corriente \vec{J}_i vendrá dada por:

$$\vec{J}_i = \hat{n}_i \times \vec{H}^{total}(\vec{r}_i) \Big|_{\Delta l} = \hat{n}_i \times \left[\vec{H}_S^{exterior}(\vec{r}_i) - \vec{H}_S^{interior}(\vec{r}_i) \right] \Big|_{\Delta l} = 2 \hat{n}_i \times \vec{H}_S(\vec{J}_i) \quad (3.52)$$

Con este razonamiento se llega a la conclusión de que el campo magnético radiado por el propio subdominio de corriente es [1]:

$$j=i \Rightarrow L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_S(\vec{r}) = \frac{1}{2} [\vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \hat{n}_i] = \frac{I_i}{2} (\vec{f}_i(\vec{r}_i) \times \hat{n}_i) \quad (3.53)$$

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

Esta expresión es la misma que la deducida cuando se extrae la singularidad de la integral que aparece en el operador L_H . Dicha integral se descompone en la contribución de la singularidad y el valor principal de Cauchy [3]:

$$\iint_S I(\vec{r}, \vec{r}') ds' = \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{S_a} I(\vec{r}, \vec{r}') ds' + \iint_{S \text{ valor principal}} I(\vec{r}, \vec{r}') ds' \rightarrow I(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_S(\vec{r}') \quad (3.54)$$

donde S_a es un círculo de radio $a \rightarrow 0$ definido sobre el plano tangente a la superficie en el punto \vec{r} . El valor del gradiente de la función de Green en la singularidad es conocido [3]:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \iint_{S_{a^\pm}} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') ds' = \begin{cases} -\left(1 - \frac{\Omega_0}{4\pi}\right) \hat{n} & \text{en } S_{a^+} \rightarrow \text{cara exterior de } S \\ \frac{\Omega_0}{4\pi} \hat{n} & \text{en } S_{a^-} \rightarrow \text{cara interior de } S \end{cases} \quad (3.55)$$

Ω_0 es el ángulo sólido cubierto por el exterior de la superficie en el punto \vec{r} , si la superficie es suave, es decir, sin aristas o vértices, el valor que toma Ω_0 es 2π , con lo que el gradiente de la función de Green en la singularidad es:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \iint_{S_{a^\pm}} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') ds' = \begin{cases} -\frac{1}{2} \hat{n} & \text{en } S_{a^+} \rightarrow \text{cara exterior de } S \\ \frac{1}{2} \hat{n} & \text{en } S_{a^-} \rightarrow \text{cara interior de } S \end{cases} \quad (3.56)$$

y el valor del acoplo en la singularidad $j = i$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \iint_{S_{a^\pm}} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_S(\vec{r}') ds' = \begin{cases} -\frac{1}{2} \hat{n}_i \times \vec{J}_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \hat{n}_i & \text{en } S_{a^+} \\ \frac{1}{2} \hat{n}_i \times \vec{J}_i(\vec{r}_i) = -\frac{1}{2} \vec{J}_i(\vec{r}_i) \times \hat{n}_i & \text{en } S_{a^-} \end{cases} \quad (3.57)$$

que en la cara exterior de S , que es donde se evalúa el operador en este caso, coincide con (3.53).

En conclusión, el operador para este acoplo queda como:

$$L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \approx \frac{I_i}{2} (\vec{f}_i(\vec{r}_i) \times \hat{n}_i) \quad R = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|; \quad \hat{R} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3.58)$$

A su vez, la MFIE quedaría como:

$$\vec{J}_S(\vec{r}_i) \approx \hat{n}_i \times \vec{H}^{imp}(\vec{r}_i) + \hat{n}_i \times L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \quad (3.59)$$

Al discretizar la MFIE sobre la geometría, aplicando las funciones prueba (3.42), se obtienen los coeficientes I_i necesarios para describir la solución.

3.4.2.1.- Introducción a la nueva función peso:

Las funciones prueba anteriores utilizadas en la MFIE presentan ciertos inconvenientes en algunos casos. Si se analiza la colocación de las funciones prueba indicada anteriormente se observa que el acoplo (campo magnético que un lado induce en otro) entre dos lados que pertenezcan al mismo plano es nulo, debido a que el

rotacional del potencial \vec{A} es cero. Debido a la elección de la función prueba anterior, se pueden presentar problemas como el descrito a continuación.

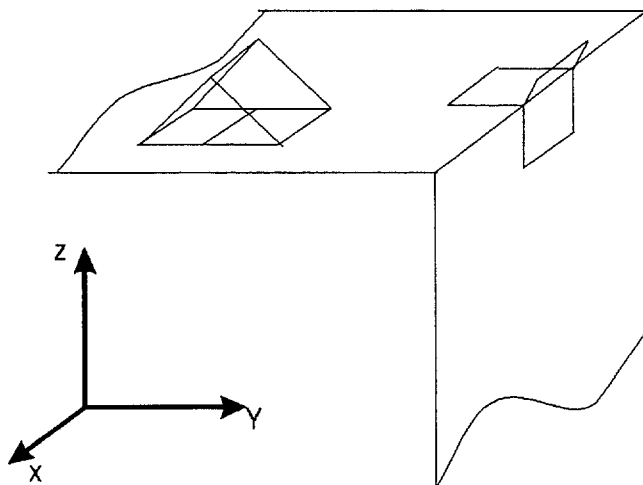


Figura 3.15.-Acoplo entre dos subdominios

El problema que presentaban estas funciones se manifestaban en los lados en los cuales haya un cambio notable en la dirección del vector normal de los subdominios que lo forman (ej, en una arista). En el ejemplo de la figura, al estar colocada la función peso de ese modo, obtenemos que el acoplo es nulo, ya que la función cuchilla se aplica a un lado que pertenece al mismo plano que el subdominio fuente y como ya se ha visto, el rotacional del potencial \vec{A} , en ese caso, es cero, por lo que el resultado que se obtendría sería que el acoplo es nulo.

Este es un resultado erróneo, puesto que se advierte que un subdominio de observación se encuentra en una situación no coplanar con el subdominio fuente, con lo cual, si que físicamente existe acoplo entre esos subdominios.

De modo que el hecho de considerar nulos los acoplos en situaciones como la anterior, puede provocar resultados erróneos, ya que se están analizando mal los acoplos en las aristas de las superficies.

Para solventar este tipo de problemas, en este trabajo se estudia y realiza la introducción de una nueva función peso basada en la anterior. La nueva función peso

será también del tipo *cuchilla*, con la modificación de que será una cuchilla doble por cada rooftop, situándose cada una dentro de los subdominios de observación. De modo que problemas como el anterior son evitados, puesto que la colocación que se realiza de las dos cuchillas provoca que la situación anterior sea ahora como vemos en la siguiente figura:

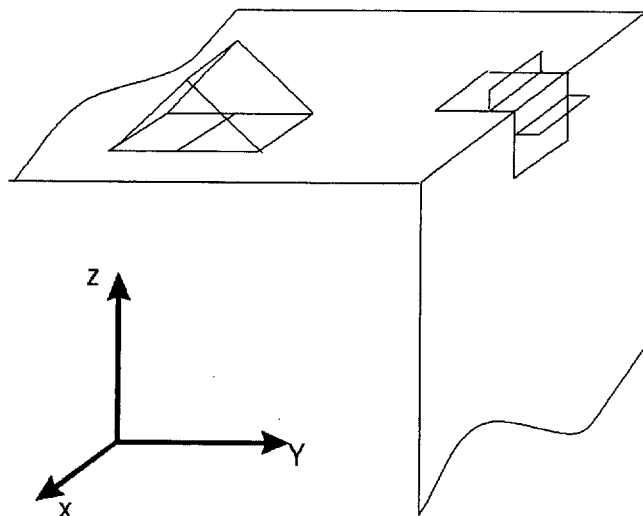


Figura 3.16.- Acoplo entre dos subdominios utilizando doble cuchilla

Como se observa en esta figura, una de las cuchillas está en un subdominio coplanar con el subdominio fuente, por lo que este no presentará acoplo, sin embargo la otra cuchilla está en el otro subdominio que no es coplanar con el subdominio fuente, por lo que está si presenta acoplo, de manera que el acoplo total será la suma de los dos, por lo que se obtiene un resultado correcto.

La colocación de cada una de las cuchillas dentro de su correspondiente subdominio no es arbitraria, puesto que se busca un punto óptimo para su colocación. Dicho punto se obtiene atendiendo a las funciones base utilizadas en el problema, rooftops planos. Como se observa en la figura 3.17 en cada subdominio hay un triángulo del rooftop en la dirección de la corriente. Se elige el punto de colocación de cada cuchilla en el centro de gravedad de dicho triángulo.

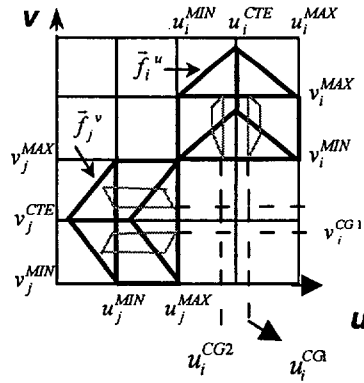


Figura 3.17.- Colocación de las cuchillas en cada tipo de subdominio.

donde v_i^{CGi} se corresponden con la posición de las cuchillas (tanto la denominada como 1 y la denominada como 2) para los subdominios cuyo rooftop está orientado con dirección u , mientras que los u_j^{CGi} son los mismos puntos para los subdominios con rooftops con dirección v .

La forma de las nuevas funciones peso para cada subdominio la podemos ver claramente en la figura 3.18.

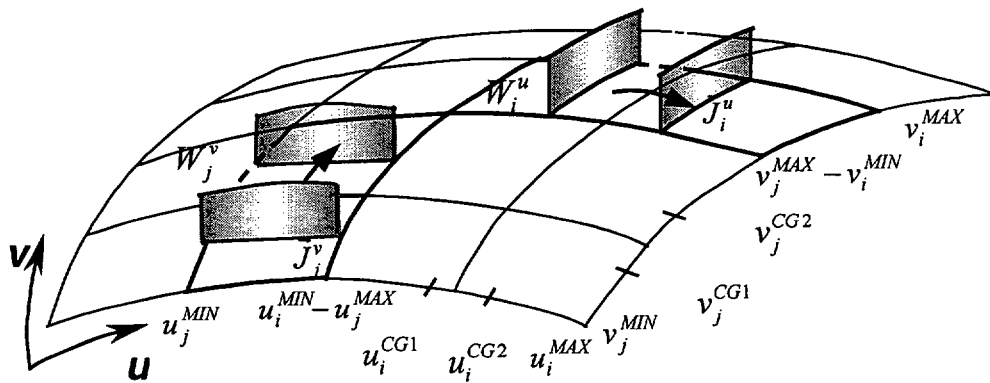


Figura 3.18.- Nuevas funciones peso para cada tipo de subdominio.

Atendiendo a la gráfica anterior, podemos definir matemáticamente las nuevas funciones peso W_i^u y W_j^v como :

$$W_i^u(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} u = u_i^{CG1} \\ u = u_i^{CG2} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad v_i^{MIN} \leq v \leq v_i^{MAX} \quad (3.60)$$

$$W_j^v(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} v = v_j^{CG1} \\ v = v_j^{CG2} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad u_j^{MIN} \leq u \leq u_j^{MAX}$$

Para facilitar las expresiones matemáticas que se plantearán a continuación se definirán las funciones W_i^u y W_j^v compuestas por dos funciones cuchillas simples cada una. Estas nuevas funciones serán X_i^{u1} , X_i^{u2} , para W_i^u , y X_j^{v1} , X_j^{v2} para W_j^v . Donde la expresión matemática de cada una de estas funciones es:

$$X_i^{u1}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} u = u_i^{CG1} \\ v_i^{MIN} \leq v \leq v_i^{MAX} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$X_i^{u2}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} v_i^{MIN} \leq v \leq v_i^{MAX} \\ u = u_i^{CG2} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.61)$$

$$X_j^{v1}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} v = v_j^{CG1} \\ u_j^{MIN} \leq u \leq u_j^{MAX} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$X_j^{v2}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} u_i^{MIN} \leq u \leq u_i^{MAX} \\ v = v_j^{CG2} \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Para las funciones prueba definidas en (3.60) la discretización o promediado del campo magnético que existe entre cada tipo de subdominio y su función prueba asociada se obtienen las siguientes expresiones.

- Subdominio con corriente tipo u y función prueba asociada W_i^u :

$$\langle \bar{H}, W_i^u(u, v) \rangle = \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} [\bar{H}(u_i^{CG1}, v) (X_i^{u1}(u_i^{CG1}, v))^* + \bar{H}(u_i^{CG2}, v) (X_i^{u2}(u_i^{CG2}, v))^*] dv$$

$$\langle \bar{H}, W_i^u(u, v) \rangle = \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} \bar{H}(u_i^{CG1}, v) dv + \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} \bar{H}(u_i^{CG2}, v) dv \quad (3.62)$$

- Subdominio con corriente tipo v y función prueba asociada W_j^v :

$$\langle \bar{H}, W_j^v(u, v) \rangle = \int_{u_j^{MIN}}^{u_j^{MAX}} [\bar{H}(u, v_j^{CG1}) (X_j^{v1}(u, v_j^{CG1}))^* + \bar{H}(u, v_j^{CG2}) (X_j^{v2}(u, v_j^{CG2}))^*] du$$

$$\langle \bar{H}, W_j^v(u, v) \rangle = \int_{u_j^{MIN}}^{u_j^{MAX}} \bar{H}(u, v_j^{CG1}) du + \int_{u_j^{MIN}}^{u_j^{MAX}} \bar{H}(u, v_j^{CG2}) du \quad (3.63)$$

Teniendo en cuenta las suposiciones de estructura eléctricamente grande, los productos internos se pueden simplificar, dotando de carácter vectorial a cada cuchilla, de la forma

- Subdominios según u :

$$\text{Punto central cuchilla 1} \rightarrow (u_i^{CG1}, v_i^{MED}) = \left(u_i^{CG1}, \frac{v_i^{MIN} + v_i^{MAX}}{2} \right) \quad (3.64)$$

$$\text{Punto central cuchilla 2} \rightarrow (u_i^{CG2}, v_i^{MED}) = \left(u_i^{CG2}, \frac{v_i^{MIN} + v_i^{MAX}}{2} \right) \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{H}, W_i^u(u, v) \rangle &= \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} (\bar{H}(u_i^{CG1}, v) + \bar{H}(u_i^{CG2}, v)) dv = (\bar{H}(u_i^{CG1}, v_i^{MED}) + \bar{H}(u_i^{CG2}, v_i^{MED})) \int_{v_i^{MIN}}^{v_i^{MAX}} dv \\
 &= (\bar{H}(u_i^{CG1}, v_i^{MED}) + \bar{H}(u_i^{CG2}, v_i^{MED})) \Delta l_i = (\bar{H}(u_i^{CG1}, v_i^{MED}) \cdot \bar{X}_i^{u1}(u, v) + \bar{H}(u_i^{CG2}, v_i^{MED}) \cdot \bar{X}_i^{u2}(u, v))
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

- Subdominios según v

$$\text{Punto central cuchilla 1} \rightarrow (u_j^{MED}, v_j^{CG1}) = \left(\frac{u_j^{MIN} + u_j^{MAX}}{2}, v_j^{CG1} \right) \tag{3.67}$$

$$\text{Punto central cuchilla 2} \rightarrow (u_j^{MED}, v_j^{CG2}) = \left(\frac{u_j^{MIN} + u_j^{MAX}}{2}, v_j^{CG2} \right) \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{H}, W_j^v(u, v) \rangle &= \int_{u_j^{MIN}}^{u_j^{MAX}} (\bar{H}(u, v_j^{CG1}) + \bar{H}(u, v_j^{CG2})) du = (\bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG1}) + \bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG2})) \int_{u_j^{MIN}}^{u_j^{MAX}} du \\
 &= (\bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG1}) + \bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG2})) \Delta l_i = (\bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG1}) \cdot \bar{X}_j^{v1}(u, v) + \bar{H}(u_j^{MED}, v_j^{CG2}) \cdot \bar{X}_j^{v2}(u, v))
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Para un caso general, la discretización sobre el subdominio "i" se reduce a :

$$\langle \bar{H}, W_i(u, v) \rangle = \bar{H}(r_i^1) \cdot \bar{X}_i^1 + \bar{H}(r_i^2) \cdot \bar{X}_i^2 \tag{3.70}$$

donde r_i^1 y r_i^2 se corresponden con los puntos centrales de las cuchillas y las funciones

pruebas simplificadas \bar{X}_i^1 y \bar{X}_i^2 se definen para cada tipo de corriente, u o v, como:

- Tipo u:

$$\bar{W}_i^u(u, v) = \bar{X}_i^{u1}(u, v) + \bar{X}_i^{u2}(u, v) \tag{3.71}$$

$$\bar{X}_i^{u1}(u, v) = \Delta l_i \hat{r}(\bar{r}_i) \quad \Delta l_i = |\bar{r}(u_i^{CG1}, v_i^{MAX}) - \bar{r}(u_i^{CG1}, v_i^{MIN})|$$

$$\bar{r}_i = \bar{r} \left(u_i^{CG1}, \frac{v_i^{MAX} + v_i^{MIN}}{2} \right)$$

$$\bar{X}_i^{u2}(u, v) = \Delta l_i \hat{r}(\bar{r}_i) \quad \Delta l_i = |\bar{r}(u_i^{CG2}, v_i^{MAX}) - \bar{r}(u_i^{CG2}, v_i^{MIN})|$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} \left(u_i^{CG2}, \frac{v_i^{MAX} + v_i^{MIN}}{2} \right)$$

- Tipo v:

$$\vec{W}_i^v(u, v) = \vec{X}_i^{v1}(u, v) + \vec{X}_i^{v2}(u, v) \quad (3.72)$$

$$\vec{X}_i^{v1}(u, v) = \Delta l_i \hat{t}(\vec{r}_i) \quad \Delta l_i = \left| \vec{r}(u_i^{MAX}, v_i^{CG1}) - \vec{r}(u_i^{MIN}, v_i^{CG1}) \right|$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} \left(\frac{u_i^{MAX} + u_i^{MIN}}{2}, v_i^{CG1} \right)$$

$$\vec{X}_i^{v2}(u, v) = \Delta l_i \hat{t}(\vec{r}_i) \quad \Delta l_i = \left| \vec{r}(u_i^{MAX}, v_i^{CG2}) - \vec{r}(u_i^{MIN}, v_i^{CG2}) \right|$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} \left(\frac{u_i^{MAX} + u_i^{MIN}}{2}, v_i^{CG2} \right)$$

Los vectores $\hat{t}(\vec{r}_i)$ y $\hat{t}(\vec{r}_j)$ son vectores unitarios tangentes a la superficie en el punto medio de cada cuchilla y en la dirección paramétrica adecuada para cumplir el criterio de signos asociado a la expresión (3.32).

Como se puede comprobar en (3.62) y (3.63), el producto interno se ha transformado en un producto escalar entre la magnitud vectorial y la función prueba. Al estar compuesta esta última por dos vectores en la dirección tangente a la superficie en el punto medio de cada cuchilla, en el proceso de discretización se obtiene, en un único cálculo, la componente tangencial del campo magnético muestreada sobre cada subdominio sobre la que se establece la MFIE.

El hecho de introducir dos funciones cuchilla provoca que el muestreo sea en dos puntos de los subdominios asociados a cada lado, mientras que anteriormente solo se muestreaba en un punto para cada lado, el cual coincidía con el centro de este. Por tanto, el muestreo realizado ahora es más preciso.

De manera que la expresión de la MFIE discretizada queda:

$$MFIE \text{ general} \Rightarrow \vec{J}_S(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}^{imp}(\vec{r}) + \hat{n} \times L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_{tang}^{imp}(\vec{r}) + L_{H,tang} [\vec{J}_S]$$

$$MFIE \text{ discretizada} \Rightarrow \langle \vec{J}_S, W_i \rangle = \langle \vec{H}^{imp}, W_i \rangle + \langle L_H [\vec{J}_S], W_i \rangle \quad (3.73)$$

El promedio $\langle \vec{J}_S, W_i \rangle$ proporciona la corriente total en amperios que atraviesa cada subdominio que es directamente la definición del coeficiente I_i en la expansión de corriente:

$$I_i = \langle \vec{H}^{imp}, W_i \rangle + \langle L_H [\vec{J}_S], W_i \rangle = \vec{H}^{imp}(\vec{r}_i) \cdot \vec{W}_i + L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \cdot \vec{W}_i \quad (3.74)$$

Debido a la inclusión de estas nuevas funciones prueba, con respecto a las utilizadas anteriormente, se introducen novedades en el cálculo el acoplo de un subdominio consigo mismo. Intervienen en total cuatro factores:

- el acoplo de cada uno de los subdominios consigo mismo.
- el acoplo de cada subdominio con el otro.

quedando conformado el autoacoplo del subdominio en cuatro términos, de manera que para un subdominio k queda como se ve a continuación:

$$L_H [\vec{J}_S] = \left(\frac{I_{k11}}{2} (\vec{f}_{k11}(\vec{r}_{k1}) \times \hat{n}_{k1}) \right) + \left(\frac{I_{k22}}{2} (\vec{f}_{k22}(\vec{r}_{k2}) \times \hat{n}_{k2}) \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{1+jkR_{12}}{R_{12}^2} e^{-jkR_{12}} \left[\hat{R}_{12} \times \vec{J}_j(\vec{r}'_2) \right] ds' - \frac{1}{4\pi} \frac{1+jkR_{21}}{R_{21}^2} e^{-jkR_{21}} \left[\hat{R}_{21} \times \vec{J}_j(\vec{r}'_1) \right] ds' \quad (3.75)$$

donde los términos los dos primeros sumandos de la expresión se corresponden con el acoplo de cada subdominio consigo mismo, mientras que los otros dos sumandos se corresponden con el acoplo que el subdominio 1, ejerce sobre el 2 y viceversa.

Aparte de la singularidad que supone el autoacoplo de un subdominio consigo mismo, el hecho de utilizar dos cuchillas genera otra singularidad que no aparecía anteriormente.

En los casos en los que los rooftops fuente y observación tengan la misma dirección y sean contiguos, como se ve en la figura 3.19, un subdominio es compartido por el rooftop fuente y por el de observación:

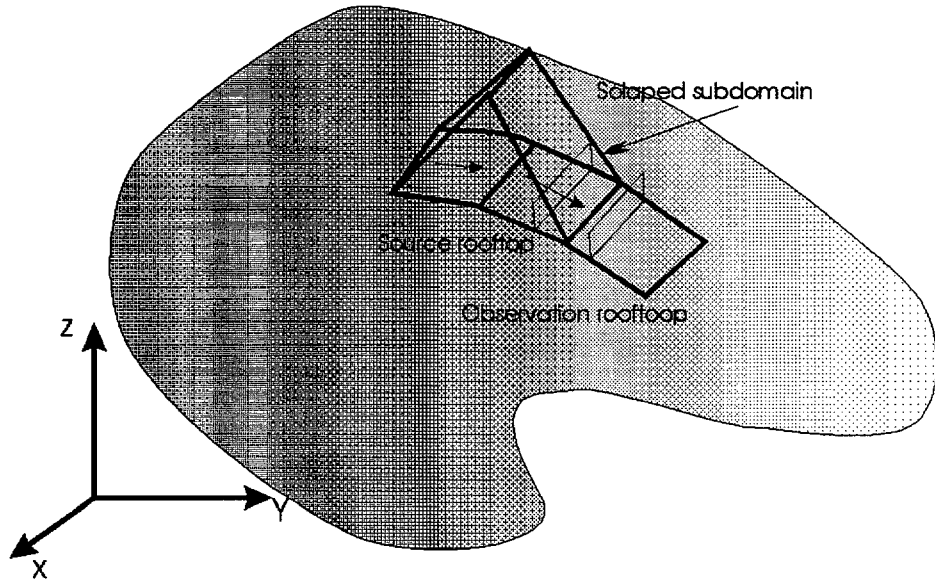


Figura 3.19.- Acoplo con el subdominio contiguo.

En los casos como el anterior, el subdominio que “pertenece” tanto al rooftop fuente como al rooftop observación, se denomina subdominio *solapado*.

El problema que ocasiona una situación como esta es que la densidad de corriente del rooftop fuente en el subdominio solapado circula por debajo de la función cuchilla asociada al subdominio de observación, lo que provoca una singularidad.

En el caso del subdominio solapado, se obtiene la corriente que el subdominio fuente genera sobre el mismo (mediante autoacoplos) y se pondera el valor de esa corriente por la situación geométrica de la función cuchilla en el rooftop compartido.

Las cuchillas se sitúan de manera que estén en el centro de gravedad del rooftop perteneciente al subdominio al que están asociadas. Dicho punto se denominaba x_{CGi} , donde x es u ó v , según corresponda. Por tanto, el elemento por el que se pondera el autoacoplo se corresponde con el centro de la función corriente de la fuente ($f_{CENTRAL}$) menos la situación de la cuchilla en el subdominio solapado (x_{CGi}). De manera que este

factor de ponderación se corresponde con la distancia de la cuchilla en el subdominio solapado respecto del subdominio fuente.

$$x_{SOLAPE} = f_{CENTRAL} - x_{CGi} \quad (3.76)$$

El modo de operar será igual que en el cálculo del autoacoplo, pero ponderado por la situación de la cuchilla en el subdominio solapado respecto al subdominio fuente (x_{SOLAPE}).

$$\vec{r} = \vec{r}'_{SOLAPAMIENTO} \Rightarrow L_{H_SOLAPE} \left[\vec{J}_S \right] = x_{SOLAPE} \cdot \left[\frac{I_{FUENTE}}{2} \left(\vec{f}_{FUENTE} (\vec{r}_{FUENTE}) \times \hat{n}_{FUENTE} \right) \right] \quad (3.77)$$

De manera que cuando $\vec{r} = \vec{r}'_{SOLAPAMIENTO}$ el autoacoplo se calcula de una forma especial, y hay que incluir esta circunstancia en la expresión general del operador de la MFIE.

Teniendo todo esto en cuenta, el operador particularizado para las funciones base utilizadas se calcula como una suma de tres operadores, el primero debido al autoacoplo del subdominio bajo estudio ($L_{H_AUTOACOPLO}$), otro debido a la existencia de subdominios solapados ($L_{H_SOLAPAMIENTO}$) y un tercero que engloba el acoplo de todos los demás subdominios sobre el subdominio en cuestión (L_{H_GLOBAL}), quedando la expresión del siguiente modo:

$$L_H \left[\vec{J}_S \right] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_k} = L_{H_AUTOACOPLO} + L_{H_SOLAPAMIENTO} + L_{H_GLOBAL} \quad (3.78)$$

3.4.2.2.- Validación de la nueva función peso

Para ver de un modo claro como las nuevas funciones prueba corrigen este efecto, se va a estudiar una estructura representando las corrientes que se generaran en las superficies de dicha estructura.

La estructura bajo estudio en este caso es una estructura canónica. Se trata de un cubo de 1λ . A la geometría del problema se le pone como alimentación una onda plana incidiendo normalmente sobre la cara superior (con dirección $\theta=180$) y con el campo eléctrico polarizado según la dirección del eje.

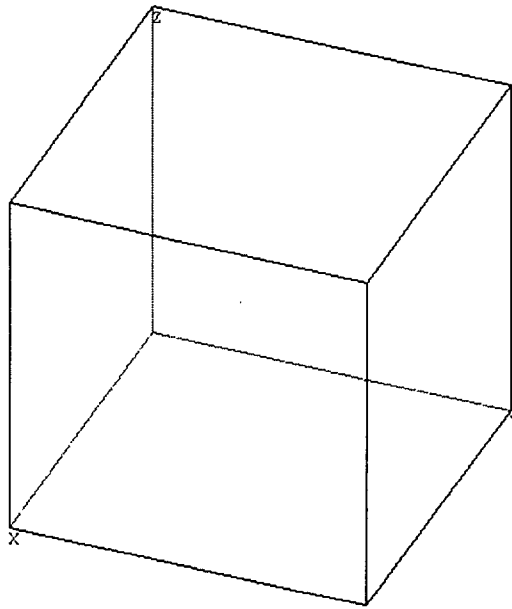


Figura 3.20.- Representación geométrica del cubo bajo estudio

Las corrientes sobre la cara superior que se obtienen con el SIMCOR (por cada rooftop únicamente se considera una única cuchilla situada en el centro del lado) son las mostradas a continuación:

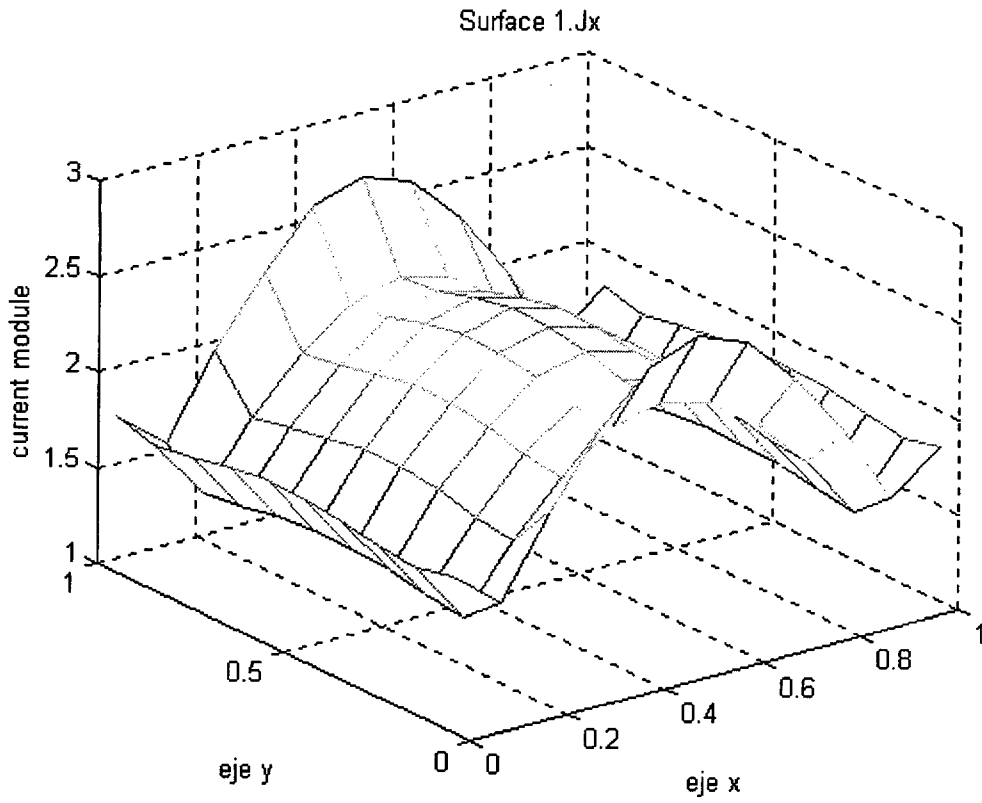


Figura 3.21.- Representación del módulo la corriente con dirección x sobre la superficie superior

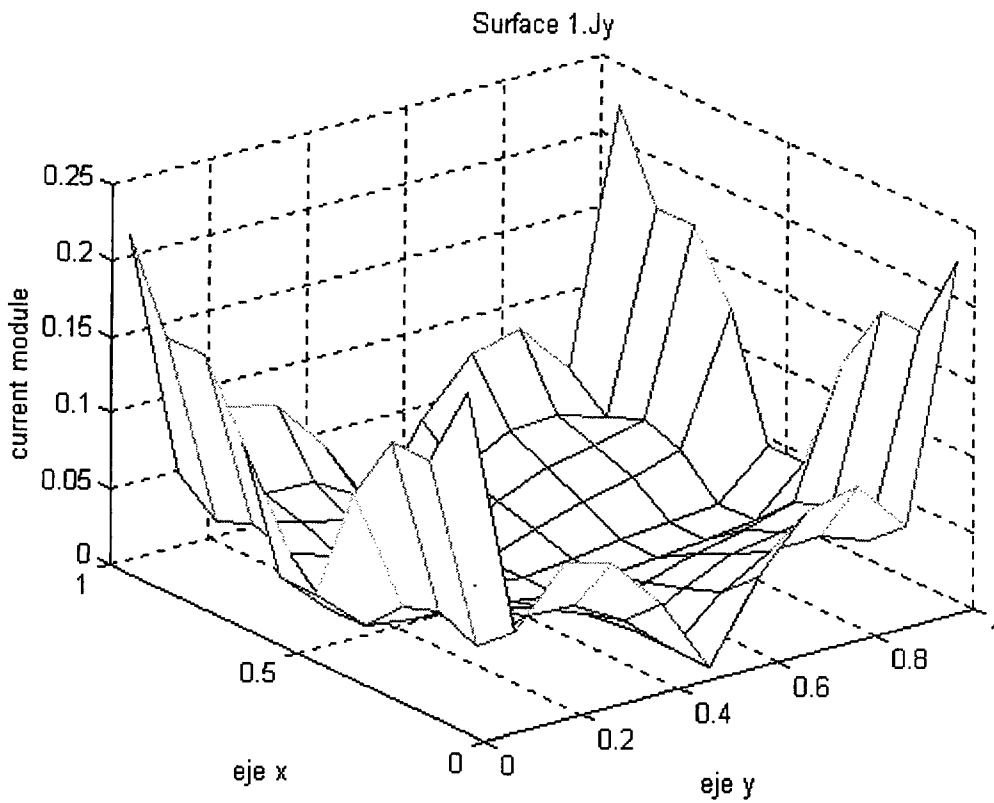


Figura 3.22.- Representación del módulo la corriente con dirección y sobre la superficie superior

Observando las gráficas se ve claramente que los valores que toma la función corriente en los puntos cercanos a las aristas son muy distantes de los que tenía en puntos próximos a los anteriores, presentando cambios muy grandes en el valor del módulo en dichos puntos. Esta situación no tiene explicación física

Las corrientes que se obtienen con la funciones prueba descritas en el apartado anterior son las mostradas a continuación:

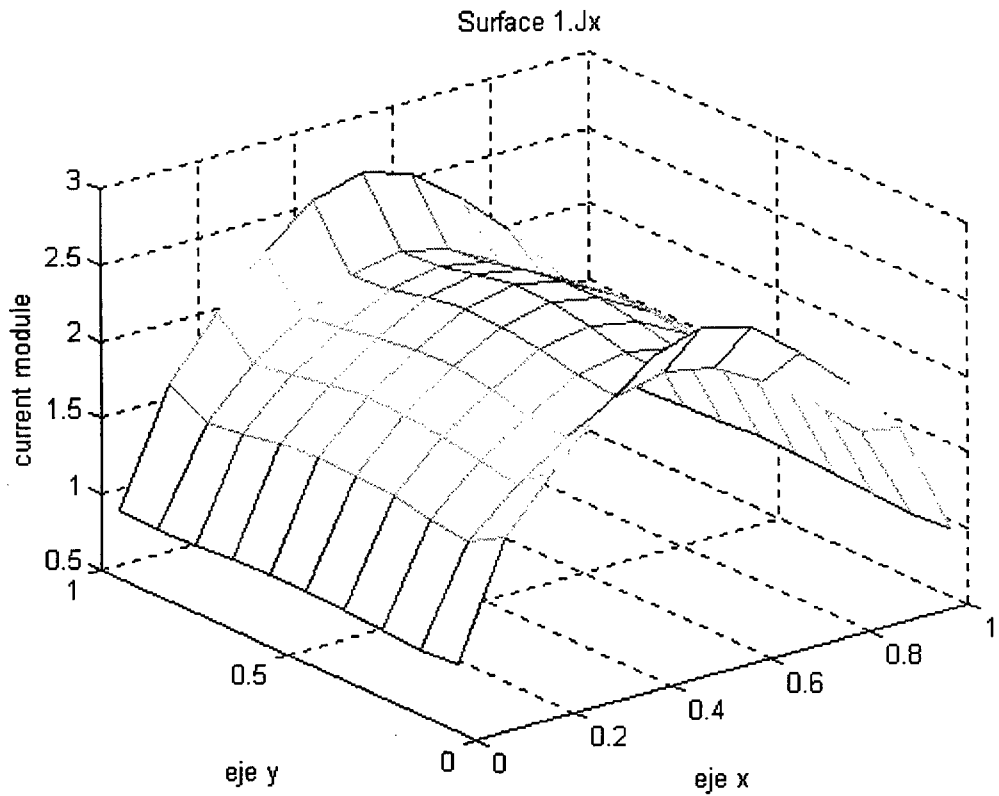


Figura 3.23.- Representación del módulo la corriente con dirección x sobre la superficie superior

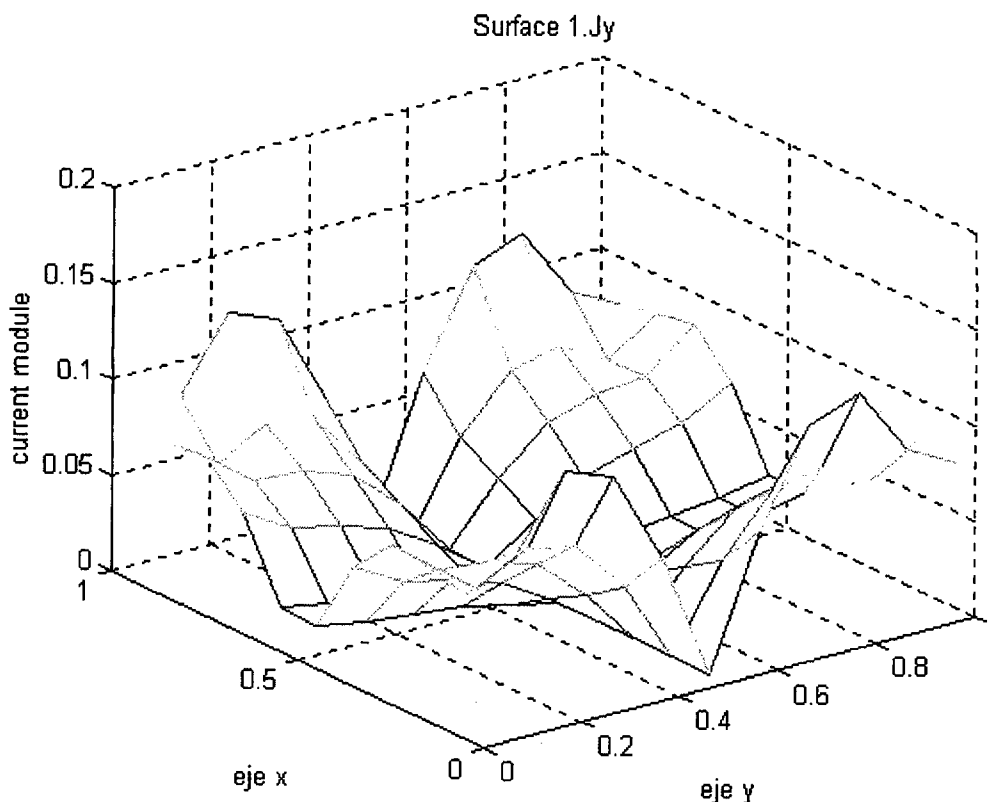


Figura 3.24.- Representación del módulo la corriente con dirección y sobre la superficie superior

Se observa que en los puntos anteriormente mencionados, la función densidad de corriente no sufre ningún cambio de valor brusco, sino que presenta una forma más continua, más acorde con lo que ocurre en la realidad, puesto que no tiene sentido físico que en puntos separados solo algunas centesimas de landa y que reciben la misma alimentación se produzca unas variaciones tan grandes en el módulo de la corriente.

Como se ve, con la modificación introducida se obtienen distintos resultados que son mas aproximados a la realidad en todos los puntos de la superficie.

3.5.- Problemas en el MONURBS y SIMCOR

No solo en las aplicaciones MONURBS y SIMCOR, sino en cualquier otra que implemente un Método de los Momentos, encontraremos dos dificultades fundamentales: cálculo de la matriz de impedancias y resolución del sistema de

ecuaciones. El inconveniente está en que son las dos etapas del MoM que más recursos consumen, entendiendo como recursos sobre todo, el tiempo y la capacidad de memoria.

La obtención de la matriz de impedancias es el proceso más crítico en cualquier programa basado en MoM, dado que es en este proceso en el que se va a demandar mayor tiempo de cálculo y durante el cual se va a almacenar la matriz que requiere mayores cantidades de memoria. Si el número de incógnitas es N la matriz Z es de $N \times N$, luego es fácil imaginar que cuando el caso que se quiere analizar tiene una gran cantidad de lados los problemas de tiempo y memoria van a ser muy graves, no siendo infrecuente el no poder analizar un caso por escasez de memoria. Para solucionar este problema se propone en los siguientes capítulos el Método de Momentos Dipolares y el Método de Multipolos [10] como alternativa para el cálculo de Z . Veremos que con estos métodos, el tamaño efectivo de la matriz de impedancias se puede reducir.

El segundo problema supone gran consumo de tiempo. Si N es muy grande alcanzar la solución del sistema de ecuaciones es una tarea costosa. La técnica numérica para la resolución del sistema de ecuaciones empleada en MONURBS y SIMCOR es el Método del Gradiente Conjugado (*CGM*), técnica de contrastada fiabilidad que sin embargo pierde eficacia ante problemas grandes. Además el *CGM* necesita por su formulación almacenar la matriz adjunta de Z con el problema adicional de espacio que esto representa. Por todo ello en el capítulo 6 se buscaran alternativas al *CGM* que además se adapten perfectamente a los cambios que supondrá la introducción del Método de Momentos Dipolares y/o el Método de Multipolos.

- [1] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [2] P.P.Zabreyko, A.I.Koshelev, M.A.Krasnosel'skii, S.G.Mikhlin, L.S.Rakovshchik, V.Ya. Stet'senko, *Integral Equations-A Reference Text*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1975.
- [3] A.Cardama, Ll.Jofre, J.M:Rius, J.Romeu, S.Blanch, *Antenas*, Edicions UPC, Barcelona, 1993.
- [4] R.F. Harrington. "Field computation by Moment Method". New York, McMillan. 1986
- [5] F. Rivas Peña "Aplicación del Método de los Momentos para el análisis electromagnético de cuerpos de geometría arbitraria modelados por parches NURBS". Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria, Noviembre de 1994.
- [6] L. Valle López. "Aplicación de técnicas híbridas basadas en el método de los momentos para el análisis de Antenas en presencia de geometrías arbitrarias eléctricamente grandes modeladas con superficies NURBS". Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria, Octubre de 1995.
- [7] A.W. Glisson, D.R. Wilton. "Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces", IEEE Trans. on Ant. and Prop., Vol AP-28, No 5, September 1980, pp 593-603
- [8] S.M. Rao. "Electromagnetic scattering and radiation of arbitrarily-shaped surfaces by triangular patch modelling". Tesis doctoral. Universidad de Missisipi. Agosto 1980.
- [9] S.M. Rao, D.R. Wilton, A.W. Glisson. "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape". IEEE Trans. on Antennas and Prop., pp 409-418, 1982.
- [10] W.C. Chew, J.M. Jin, E. Michielssen, J.M. Song- "Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic" Norwood, MA. Artech-House, 2001

4. Aproximación de los Momentos Dipolares

En la expresión de la MFIE (3.6) y la EFIE (3.11), aparece el operador Z que da cuenta del acoplo electromagnético entre las diferentes partes del cuerpo a analizar. Al representar la incógnita \vec{J}_S mediante N funciones base, el operador debe calcularse N^2 veces. Cuando se analizan estructuras de dimensiones eléctricas grandes, el número de incógnitas crece de forma polinómica con la según f^2 . Evidentemente, todo esfuerzo enfocado a simplificar el cálculo del operador revierte en un proceso de diseño de la antena embarcada mucho más ágil. En el presente trabajo se utilizan simplificaciones en el cálculo del acoplo electromagnético obteniendo como resultado expresiones cerradas que potencian el cálculo eficiente de los operadores Z involucrados. En toda labor de ingeniería se debe llegar a una solución de compromiso entre la exactitud del resultado y el tiempo invertido en obtenerlo y este es el objetivo perseguido en el presente desarrollo.

4.1.- Aproximación de momentos dipolares aplicado a la MFIE

Cuando la corriente superficial se representa utilizando un esquema basado en subdominios, el operador se evalúa únicamente en puntos discretizados. En un caso genérico, atendiendo a la discretización realizada se representa en la figura 4.1.

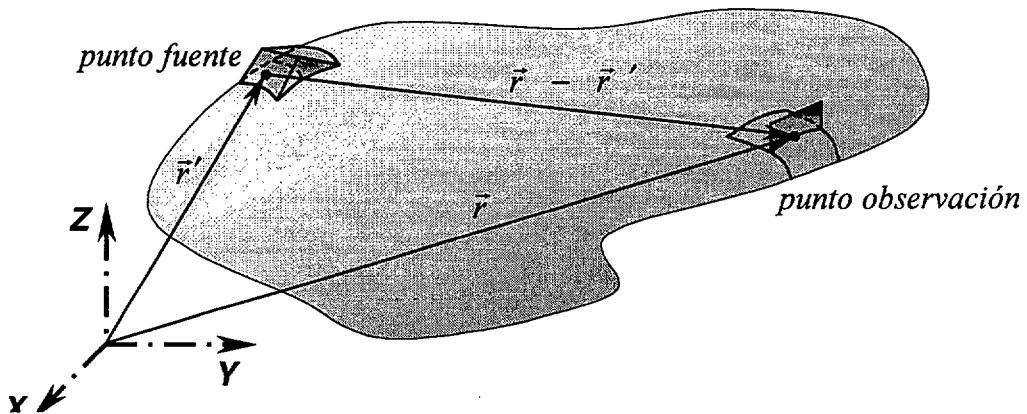


Figura 4.1.- Sistema de referencia absoluto para el cálculo del operador de la MFIE.

Al utilizar la doble cuchilla como función de test se deben tener en cuenta dos puntos en cada subdominio, tanto fuente como observación, dichos puntos son los centros de cada cuchilla, definidos en la figura como \vec{r}_1 y \vec{r}_2 para el subdominio de observación y \vec{r}_1' y \vec{r}_2' para el subdominio fuente.

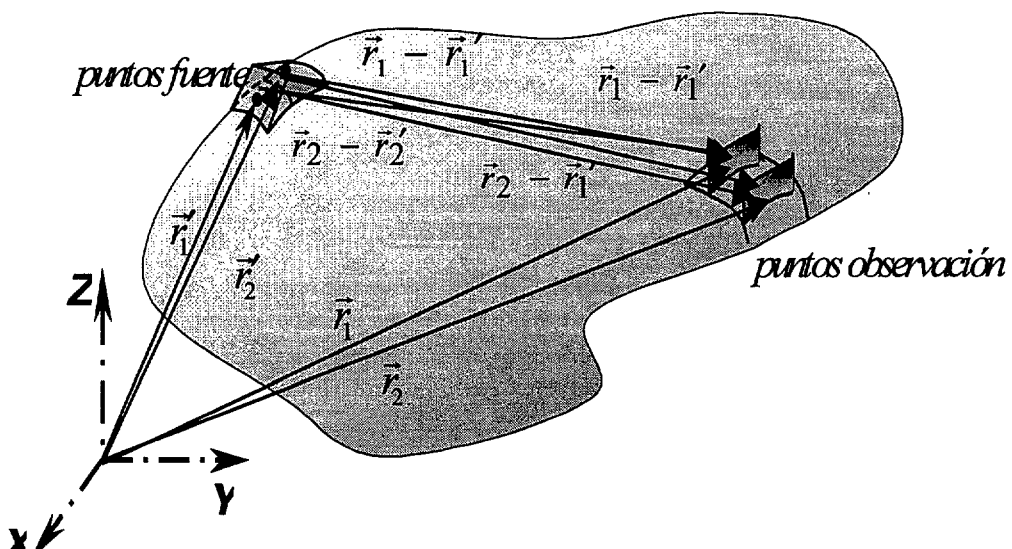


Figura 4.2.- Sistema de referencia absoluto para el cálculo del operador de la MFIE con doble cuchilla.

Si en cada cálculo del operador se adopta un sistema de referencia local centrado en la fuente del acoplo (X',Y',Z') , figura 4.3, se verifican las siguientes suposiciones:

- para cada subdominio de corriente, la longitud de onda es varias veces superior que la dimensión de la región ocupada por la fuente cuyo tamaño oscila entre $\lambda/8$ y $\lambda/10$:

$$k|\vec{r}'| \ll 1 \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (4.1)$$

- al analizar estructuras grandes, también se puede asumir que los puntos fuente y observación de la función de Green van a estar generalmente bastante alejados:

$$|\vec{r}_i| \gg |\vec{r}'_i| \Rightarrow |\vec{r}_i - \vec{r}'_i| \cong |\vec{r}_i| \qquad \vec{r}_i, \vec{r}'_i \in S \qquad (4.2)$$

$$i = 1,2$$

$$i' = 1,2$$

Esto, para un acoplo, lo podemos ver en la gráfica (4.3)

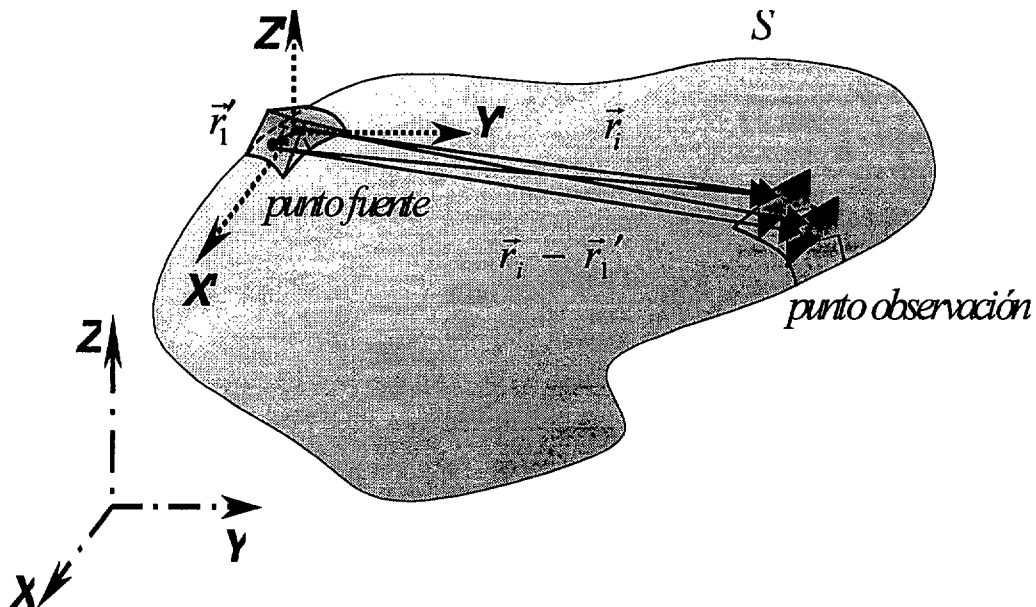


Figura 4.3.- Sistema de referencia local a la fuente para el cálculo del operador de MFIE

Atendiendo a las suposiciones (4.1) y (4.2), la función de Green en el espacio libre, para uno de los cuatro acoplos que intervienen, después de realizar su expansión en series de Taylor y retener los dos primeros términos, se puede aproximar por [1]:

$$\frac{e^{-jk|\vec{r}_i - \vec{r}'_i|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_i|} \approx e^{-jk r_i} \left(1 + jk \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}'_i}{r_i} \right) \frac{1}{r_i} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}'_i}{r_i^2} \right) \quad r_i = |\vec{r}_i| \quad (4.3)$$

$$i = 1, 2$$

$$i' = 1, 2$$

Una vez despreciado el término en $1/r^4$ y siendo sustituida en la expresión que relaciona el potencial A con la corriente superficial, permite obtener la siguiente expresión para el potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\iint_S \vec{J}_s(\vec{r}') ds' + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') ds' \right] \quad (4.4)$$

que se corresponde con la expresión general del potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$ entre una fuente y un punto de observación separado \vec{r} de la fuente. Como en este caso, tenemos dos puntos de observación y dos fuentes, el potencial vector total \vec{A}_{TOTAL} , para un subdominio cualquiera tendrá una expresión compuesta de cuatro términos debidos a el efecto de cada una de las dos fuentes sobre cada uno de los dos puntos de observación:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{TOTAL} &= \vec{A}(\vec{r}_{11}) + \vec{A}(\vec{r}_{12}) + \vec{A}(\vec{r}_{21}) + \vec{A}(\vec{r}_{22}) \approx \\ &\approx \left[\left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \left[\iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_1) ds' + \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{r_1} + jk \right) \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_1) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}'_1) ds' \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \left[\iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_2) ds' + \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{r_1} + jk \right) \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_2) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}'_2) ds' \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \left[\iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_1) ds' + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{r_2} + jk \right) \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_1) (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}'_1) ds' \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \left[\iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_2) ds' + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{r_2} + jk \right) \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_2) (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}'_2) ds' \right] \right) \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

Fijándonos en la definición del momento dipolar eléctrico \vec{p} y magnético \vec{m} de una distribución de corriente eléctrica [2]:

$$\vec{p} = \frac{1}{j\omega} \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}'_i) ds' \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{r}'_i \times \vec{J}_s(\vec{r}'_i) ds' \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

y después de aplicar una serie de desarrollos matemáticos, la expresión (4.5) también puede ponerse como:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{TOTAL} &= \vec{A}(\vec{r}_{11}) + \vec{A}(\vec{r}_{12}) + \vec{A}(\vec{r}_{21}) + \vec{A}(\vec{r}_{22}) \approx \\ &\approx \left[\left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \left[j\omega \vec{p}_1 + \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{r_1} + jk \right) (\vec{m}_1 \times \vec{r}_1) \right] \right) + \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \left[j\omega \vec{p}_2 + \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{r_1} + jk \right) (\vec{m}_2 \times \vec{r}_1) \right] \right) \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \left[j\omega \vec{p}_1 + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{r_2} + jk \right) (\vec{m}_1 \times \vec{r}_2) \right] \right) + \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \left[j\omega \vec{p}_2 + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{r_2} + jk \right) (\vec{m}_2 \times \vec{r}_2) \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cuando se analiza detenidamente la expresión (4.7) se puede observar lo siguiente:

- La contribución del momento eléctrico \vec{p} es un factor $\omega = 2\pi f$ veces superior a la del magnético \vec{m} . Además, la contribución de \vec{m} se ve afectada por factores $1/r, 1/r^2$ que hacen disminuir su efecto en relación al de \vec{p} donde, después de adoptar el sistema de referencia local a la fuente, r_i es la distancia existente entre los centros de los subdominios fuente y los centros de las cuchillas del subdominio de observación de la función de Green.
- La magnitud de \vec{m} , a su vez, está relacionada con distribuciones de corriente que se presentan en forma de lazos cerrados. En el análisis de antenas embarcadas es poco probable encontrar un comportamiento de este tipo por lo que se puede suponer que el valor de \vec{m} va a ser muy pequeño.

En conclusión, se puede desestimar la contribución del momento dipolar magnético sin que ello implique cometer un error importante en el cálculo del potencial vector:

$$\vec{A}_{TOTAL} = \vec{A}(\vec{r}_{11}) + \vec{A}(\vec{r}_{12}) + \vec{A}(\vec{r}_{21}) + \vec{A}(\vec{r}_{22}) \approx \left[\left(\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}_1 \right) + \left(\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}_1 \right) + \left(\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}_2 \right) \right] \quad (4.8)$$

Como resultado, a efectos del cálculo del potencial vector, cada función base de corriente es sustituida por el valor del momento dipolar eléctrico correspondiente.

La evaluación del potencial vector en un punto \vec{r} debido al resto de la geometría se simplifica resultando:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^{N=N_u+N_v} \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-jk r_{ni}}}{r_{ni}} \vec{p}_{ni}(\vec{r}_{ni}) \quad r_{ni} = |\vec{r} - \vec{r}_{ni}| \quad (4.9)$$

De modo que, para evaluar el potencial vector en un subdominio, tenemos que tener en cuenta el potencial vector en dos puntos, uno por cada cuchilla, quedando la expresión:

$$\vec{A}_{SUB} \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N=N_u+N_v} \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-jk r_{nij}}}{r_{nij}} \vec{p}_{ni}(\vec{r}_{nij}) \right) \quad \begin{array}{l} r_{nij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_{ni}| \\ i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array} \quad (4.10)$$

donde \vec{r}_j es el centro geométrico de cada una de las cuchillas del subdominio observación y \vec{r}_{ni} es el centro geométrico de aplicación de los momentos dipolares en el subdominio i del lado fuente n de la función de Green, y la expresión del momento dipolar eléctrico para el subdominio n es:

$$\vec{p}_n(\vec{r}_n) = \frac{1}{j\omega} \iint_{S_n} \vec{J}_n(\vec{r}') ds' = \frac{I_n}{j\omega} \iint_{S_n} \vec{f}_n(\vec{r}') ds' = I_n \vec{p}_n^\diamond \quad (4.11)$$

$$\vec{p}_n^\diamond(\vec{r}_n) = \frac{1}{j\omega} \left[\iint_{S_n^1} \vec{f}_n(\vec{r}') ds' + \iint_{S_n^2} \vec{f}_n(\vec{r}') ds' \right]$$

Aplicando un enfoque computacional, los vectores \vec{p}_n^\diamond se pueden calcular inicialmente en un preproceso. Posteriormente, y con la evolución en la resolución de la ecuación integral, los coeficientes I_n se modificarán para satisfacer las condiciones de contorno impuestas en el problema pero el vector \vec{p}_n^\diamond permanecerá constante.

4.2 Aproximación del operador de MFIE

Para desarrollar el operador que interviene en la MFIE se hace uso de la expresión del potencial vector \vec{A} en función del momento dipolar eléctrico \vec{p} (4.10):

$$\begin{aligned}
 L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_S = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}(\vec{r}_1') \right] + \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}(\vec{r}_2') \right] + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}(\vec{r}_1') \right] + \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}(\vec{r}_2') \right] \right) = \\
 &= \frac{j\omega}{4\pi} \left(\nabla \times \left[\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}(\vec{r}_1') \right] + \nabla \times \left[\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \vec{p}(\vec{r}_2') \right] + \nabla \times \left[\frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}(\vec{r}_1') \right] + \nabla \times \left[\frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \vec{p}(\vec{r}_2') \right] \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aplicando las siguientes identidades vectoriales:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\psi \vec{A}) &= \nabla \psi \times \vec{A} + \psi \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \psi = \psi(r) = \frac{e^{-jkr}}{r}; \quad \vec{A} = f(\vec{p}(\vec{r}')) = f(I \vec{p}^\circ(\vec{r}')) \\
 \nabla \psi &= \psi'(r) \hat{r} \Rightarrow \psi'(r) = \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} = -\frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

y teniendo en cuenta que el momento dipolar depende sólo de las coordenadas de la fuente \vec{r}' con lo que $\nabla \times \vec{p}(\vec{r}') = 0$, finalmente, el operador es expresado como:

$$\begin{aligned}
 L_H [\vec{J}_S] = \vec{H}_S &= \\
 &= \frac{-j\omega}{4\pi} \left[\left(\frac{e^{-jk r_{11}}}{r_{11}} \left(\frac{1}{r_{11}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{11} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_1') \right) \right) + \left(\frac{e^{-jk r_{12}}}{r_{12}} \left(\frac{1}{r_{12}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{12} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_2') \right) \right) + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{e^{-jk r_{21}}}{r_{21}} \left(\frac{1}{r_{21}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{21} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_1') \right) \right) + \left(\frac{e^{-jk r_{22}}}{r_{22}} \left(\frac{1}{r_{22}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{22} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_2') \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\vec{r}_{ij} \neq \vec{r}'_i \quad \rightarrow \quad r_{ij} \neq 0$

donde, \hat{r}_{ij} ($i, j = 1, 2$) es un vector unitario en la dirección que une los puntos centrales del punto de aplicación de los momentos dipolares del subdominio fuente y los centros de las cuchillas del subdominio de observación y r_{ij} es precisamente la distancia existente entre esos puntos.

El operador que interviene en la MFIE sin y con aproximación del momento dipolar eléctrico y una vez que se ha particularizado para el subdominio observación k viene dado por:

$$L_H^{rig} [\bar{J}_S] \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_k} = \left(\begin{aligned} & \bar{H}_S(\bar{J}_k) + \bar{H}_S(\bar{J}_{solape}) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n \neq Solape}}^N \sum_{i=1}^2 \iint_{S_j} \frac{1 + jkR_{kjni}}{R_{kjni}^2} e^{-jkR_{kjni}} \left[\hat{R}_{kjni} \times \bar{J}_{nj}(\bar{r}'_{ni}) \right] ds' \end{aligned} \right) \quad (4.15)$$

$$L_H^{aprox} [\bar{J}_S] \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_k} \approx \left(\begin{aligned} & \bar{H}_S(\bar{J}_k) + \bar{H}_S(\bar{J}_{solape}) - \\ & - \frac{j\omega}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n \neq Solape}}^N \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-jkR_{kjni}}}{R_{kjni}} \left(\frac{1}{R_{kjni}} + jk \right) I_{ni} \left(\hat{R}_{kjni} \times \bar{p}_{ni}^\diamond(\bar{r}'_{ni}) \right) \end{aligned} \right) \quad (4.16)$$

$$R_{kjni} = \left| \bar{r}_{kj} - \bar{r}'_{ni} \right|, \quad \hat{R}_{kjni} = \frac{\bar{r}_{kj} - \bar{r}'_{ni}}{\left| \bar{r}_{kj} - \bar{r}'_{ni} \right|}$$

$$\bar{r}'_{ni} = \begin{cases} \text{punto de integración} & \text{para } L_H^{\text{riguroso}} \\ \text{centro cuchilla } i \text{ en el subdom.fuente } n' & \text{para } L_H^{\text{aproximado}} \end{cases}$$

donde \bar{r}_{kj} ($j = 1, 2$) es el punto central de cada cuchilla del subdominio de observación k y \hat{n}_{kj} ($j = 1, 2$) es el vector normal a la superficie en dichos puntos. Como se puede observar, el acoplo con el propio subdominio de corriente $\bar{H}_S(\bar{J}_k)$, donde $\bar{r}_{kj} = \bar{r}'_{ni}$, tiene un tratamiento especial que será explicado más adelante, al igual que ocurre con los subdominios solapados, como se verá a continuación.

Para el cálculo del autoacoplo, la expresión se modifica resultando la siguiente:

$$\begin{aligned}
 L_H \left[\vec{J}_S \right] = & \left(\frac{I_{k11}}{2} \left(\vec{f}_{k11}(\vec{r}_{k11}) \times \hat{n}_{k1} \right) \right) + \left(\frac{I_{k22}}{2} \left(\vec{f}_{k22}(\vec{r}_{k22}) \times \hat{n}_{k2} \right) \right) - \\
 & \frac{j\omega}{4\pi} \left[\left(\frac{e^{-jkr_{k12}}}{r_{k12}} \left(\frac{1}{r_{k12}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{k12} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_1') \right) \right) + \left(\frac{e^{-jkr_{k21}}}{r_{k21}} \left(\frac{1}{r_{k21}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{k21} \times \vec{p}^\circ(\vec{r}_2') \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde los términos los dos primeros sumandos de la expresión se corresponden con el acoplo de cada subdominio consigo mismo, mientras que los otros dos sumandos se corresponden con el acoplo que el subdominio 1, ejerce sobre el 2 y viceversa.

El cálculo del acoplo con un subdominio solapado mantiene la expresión vista en el capítulo del Método de los Momentos

$$\vec{r} = \vec{r}'_{SOLAPAMIENTO} \quad \Rightarrow \tag{4.18}$$

$$L_{H_SOLAPE} \left[\vec{J}_S \right] = x_{SOLAPE} \cdot \left[\frac{I_{FUENTE}}{2} \left(\vec{f}_{FUENTE}(\vec{r}_{FUENTE}) \times \hat{n}_{FUENTE} \right) \right]$$

Teniendo todo esto en cuenta, el operador particularizado para las funciones base utilizadas y después de aplicar la aproximación de los momentos dipolares queda como una suma de tres operadores, el primero debido al autoacoplo del subdominio bajo estudio ($L_{H_AUTOACOPLO}$), otro debido a la existencia de subdominios solapados ($L_{H_SOLAPAMIENTO}$) y un tercero que engloba el acoplo de todos los demás subdominios sobre el subdominio en cuestión (L_{H_GLOBAL}), quedando la expresión del siguiente modo:

$$L_H \left[\vec{J}_S \right] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_k} = L_{H_AUTOACOPLO} + L_{H_SOLAPAMIENTO} + L_{H_GLOBAL} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_k} = & \left[\begin{aligned} & \frac{-j\omega}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk r_{k12}}}{r_{k12}} \left(\frac{1}{r_{k12}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{k12} \times \vec{p}^\diamond(\vec{r}'_1) \right) \right) + \\ & \frac{-j\omega}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk r_{k21}}}{r_{k21}} \left(\frac{1}{r_{k21}} + jk \right) I \left(\hat{r}_{k21} \times \vec{p}^\diamond(\vec{r}'_2) \right) \right) \\ & + \left(\frac{I_{k11}}{2} \left(\vec{f}_{k11}(\vec{r}_{k11}) \times \hat{n}_{k1} \right) \right) + \\ & \left(\frac{I_{k22}}{2} \left(\vec{f}_{k22}(\vec{r}_{k22}) \times \hat{n}_{k2} \right) \right) \end{aligned} \right] + \\
& \left[x_{SOLAPE} \cdot \left[\frac{I_{FUENTE}}{2} \left(\vec{f}_{FUENTE}(\vec{r}_{FUENTE}) \times \hat{n}_{FUENTE} \right) \right] \right] - \\
& \left[\frac{j\omega}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n \neq Solape}}^N \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-jk R_{kjni}}}{R_{kjni}} \left(\frac{1}{R_{kjni}} + jk \right) I_{ni} \left(\hat{R}_{kjni} \times \vec{p}^\diamond(\vec{r}'_{ni}) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$R_{kjni} = \left| \vec{r}_{kj} - \vec{r}'_{ni} \right|, \quad \hat{R}_{kjni} = \frac{\vec{r}_{kj} - \vec{r}'_{ni}}{\left| \vec{r}_{kj} - \vec{r}'_{ni} \right|}$$

A su vez, la expresión de la MFIE sería:

$$\vec{J}_S(\vec{r}_i) \approx \hat{n}_i \times \vec{H}^{imp}(\vec{r}_i) + \hat{n}_i \times L_H [\vec{J}_S] \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i} \tag{4.21}$$

Al discretizar la MFIE sobre la geometría, aplicando las funciones prueba, se obtienen los coeficientes I_i necesarios para describir la solución.

4.3.- Aproximación de momentos dipolares aplicado a la EFIE.

Idéntico razonamiento se puede utilizar para el cálculo del operador de la EFIE [3] en subdominios alejados utilizando la aproximación de momentos dipolares. El sistema de referencia pasaría a ser el mostrado en la figura siguiente en el cual el único cambio que existe son las funciones prueba que en esta ocasión se definen paralelas a la dirección de la corriente, como se hacía en el MONURBS.

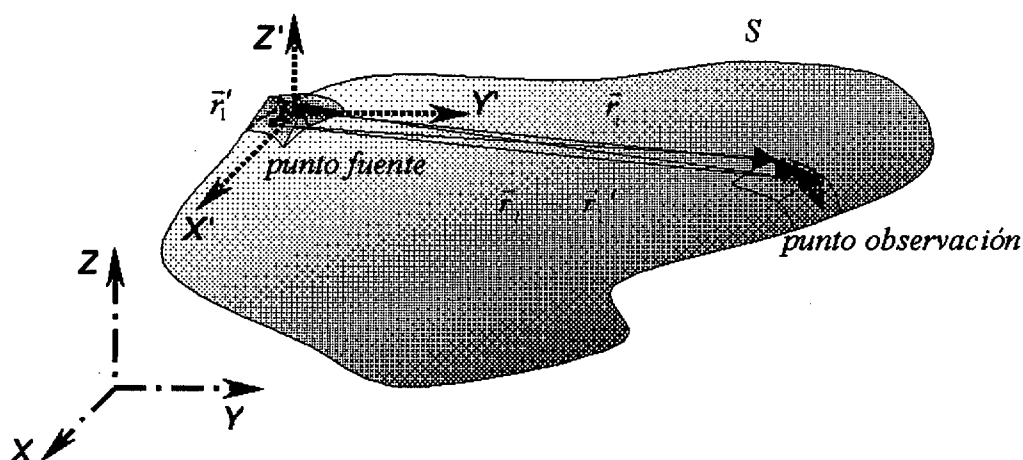


Figura 4.4.- Sistema de referencia local a la fuente para el cálculo del operador de EFIE

Para desarrollar el operador que interviene en la EFIE se hace uso de la expresión campo scattering en función del potencial vector \vec{A} , y esta magnitud en función del momento dipolar eléctrico \vec{p} (4.7):

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})) \quad (4.26)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^{N=N_u+N_v} \frac{e^{-jk r_n}}{r_n} \vec{p}_n(\vec{r}_n) \quad r_n = |\vec{r} - \vec{r}_n| \quad (4.27)$$

Desarrollando estas expresiones de manera análoga a la mostrada en el capítulo anterior se obtiene el operador de la EFIE en función de los momentos dipolares.

Cuando la distancia entre el subdominio observación y el fuente es tal que no se pueda aplicar las aproximaciones de momentos dipolares, se usa la siguiente expresión:

$$L_E [\vec{J}_s]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left(\sum_{j=1}^N \iint_S \vec{f}_n(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds' + \right. \\ \left. + \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \iint_S \nabla' \cdot \vec{f}_n(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds' \right) \quad (4.22)$$

donde \vec{f}_n es la función base en el subdominio fuente n.

En caso contrario, se utiliza la expresión de la aproximación de momentos dipolares.

$$L_E [\vec{J}_s]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = \frac{\omega\eta}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_{far}} \left\{ \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{j}{r} + \frac{1}{kr^2} \right] [(\hat{R} \cdot \vec{p}_j(\vec{r}')) \cdot \hat{R}] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{k}{2} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{kr^2} \right] (\hat{R} \times \vec{p}_j(\vec{r}') \times \hat{R}) \right\} \quad (4.23)$$

donde $\hat{R} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}'}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}$ y N_{far} es el numero de subdominios donde se aplica la aproximación.

[1] S.Piedra, J.E.Fernández, J.Basterrechea, M.F.Cátedra, "A Quasi-Static Tool for the EMI/EMC Analysis of Analog Circuits: Parasitic Extractor Tool and Simulator of EMI Parameters (PET+SEP)", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol.EMC-40, No.2, pp.127-138, May 1998.

[2] J.A.Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1941.

[3] E. García, F. Saez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. "A Novel Approach for the Computation of the EFIE with a Low Computational Cost". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 4 pags. en CDROM. Onio, USA, 22-27 Junio 2002.

5. Método Rápido de los Multipolos

Para tratar de solucionar el problema del cálculo de la matriz de acoplos cuando el caso que se trata es grande se puede aplicar también el Método Rápido de los Multipolos (*Fast Multipole Method, FMM*). El *FMM* fue sugerido por Rokhlin para encontrar solución rápida a la ecuación integral de *scattering* en problemas de Helmholtz [1] y como se expondrá a continuación, se trata de una técnica que simplifica el producto matriz-vector, que es el cuello de botella en métodos iterativos como el gradiente conjugado, mediante un esquema de divide y vencerás (reducir el problema grande a problemas de menor dimensión) seguido de un procedimiento de transmisión en tres pasos en lugar de en uno.

5.1.- Introducción.

Antes de explicar de manera más rigurosa como funciona el *FMM* vamos intentar buscar una idea intuitiva de cuál es su propósito. Tengamos como escenario un caso de *scattering* típico que queremos resolver empleando el MoM. En él, debemos calcular el acoplo de cada subdominio de la estructura bajo análisis con todos los demás subdominios, incluyéndose a sí mismo. Supongamos una estructura muy grande eléctricamente, de N subdominios. Para calcular la interacción que genera un

subdominio fuente en todo el escenario se tendrán que calcular N acoplos, y para calcular la interacción de todos los subdominios, se deberán obtener los $N*N$ acoplos.

Introduzcamos la idea que explica de forma intuitiva la filosofía que persigue la técnica de los multipolos. Imaginemos que dividimos la estructura bajo análisis en subestructuras más pequeñas. Si tenemos N subdominios en el escenario bajo análisis, lo dividimos en M grupos de $P=N/M$ subdominios cada grupo o subestructura.

Dentro de cada una de estas subestructuras, se puede nombrar un subdominio virtual que tiene una función especial. Cuando consideramos los subdominios del grupo como fuentes que radian hacia otras subestructuras, el resultado de estas P radiaciones se modela como una única radiación de este subdominio virtual. Es decir, este subdominio virtual “recoge” la forma de radiar de todos los subdominios de su grupo y la transforma como una única forma de radiar propia, pero con comportamiento equivalente.

La otra función de este subdominio virtual es que, cuando los subdominios de su grupo actúan como subdominios de observación o víctima de radiaciones de fuentes externas al grupo, este subdominio se encarga de recoger esta radiación externa y distribuir su efecto a todos los subdominios de su grupo en una forma equivalente a la que tendrían si se le calculara el acoplo de la fuente externa a cada subdominio directamente.

Dentro de cada grupo, como son subestructuras pequeñas eléctricamente no parece necesario acudir al subdominio virtual para calcular acoplos.

Pasemos ahora a analizar las ventajas que tiene la introducción de los subdominios virtuales respecto a la forma tradicional de cálculo.

Para el cálculo de las interacciones entre subdominios del mismo grupo, la forma tradicional y la forma planteada resultan iguales ya que el modo de cálculo sería igual. En ambos métodos, el número de cálculos que hay que hacer es $P*P$.

Veamos el cálculo de los acoplos entre dos grupos distintos. De la forma tradicional, si se tienen P subdominios en el grupo fuente y P subdominios en el grupo observación, el número de acoplos a calcular sería de $P*P$. Con el nuevo método, el número de acoplos a calcular sería de P acoplos de los subdominios fuente con su subdominio virtual (a esta fase se le llama fase de agregación), más otro acoplo del subdominio virtual del grupo fuente con el subdominio virtual del grupo observación (a esta fase se le llama fase de translación), más P acoplos del subdominio virtual

observación con cada subdominio del grupo observación(a esta fase se le llama fase de desagregación). Se observa que se ha reducido de una dependencia cuadrática P^2 a una dependencia lineal $P+1+P= 2P+1$.

Intuitivamente se puede deducir que cuanto mayor sea la estructura a analizar, mayor será el factor N^2 en comparación con el factor casi lineal que se alcanza con este nuevo método.

La idea que persigue el FMM es esta. El método se basa en un complejo desarrollo matemático que puede llegar a ocultar la sencillez del objetivo que se expone. Debemos, pues, tener en cuenta este objetivo y no perderlo de vista a la hora de abordar el análisis matemático.

No se oculta que el *FMM* guarda similitudes con las redes telefónicas, en las que las líneas de abonados individuales se multiplexan para su transporte entre centrales lejanas y se demultiplexan en destino, mientras que si las llamadas son locales no hay necesidad de multiplexar y demultiplexar. El tiempo ha mostrado a las redes telefónicas como eficientes, así que es bastante probable que el *FMM* muestre también buenas prestaciones.

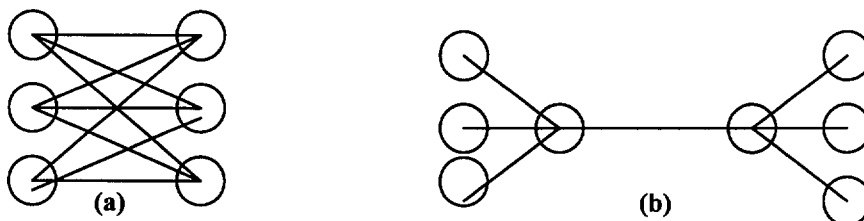


Figura 5.1 Analogía con el sistema telefónico. (a) Método riguroso para el cálculo del acoplo. (b) Método Rápido de los Multipolos

5.2.- Método Rápido de los Multipolos bidimensional.

Aunque en el caso más general el *FMM* se aplicará a problemas 3D, el artilugio matemático necesario para explicar el *FMM* en tres dimensiones es más complicado matemáticamente. El caso bidimensional es esencialmente igual pero presenta un trasfondo matemático menos engorroso. Por este motivo comenzaremos explicando el *FMM* en 2D [2] y así nos resultará luego más fácil explicar el problema general tridimensional.

5.2.1.- Presentación del problema

Antes de adentrarnos en el Método Rápido de los Multipolos, vamos a enmarcar el problema al que trata de dar solución, y para ello emplearemos un ejemplo sencillo de Método de los Momentos (MoM) para discretizar un problema de *scattering* en 2D. Consideremos un cuerpo conductor de dos dimensiones cuyo eje está alineado con el eje z , y una onda electromagnética incidente con un campo eléctrico \mathbf{E} paralelo al eje z . En electromagnetismo el problema de *scattering* en 2D se puede tratar enteramente como un problema escalar [3] y en efecto, tanto el campo incidente como el dispersado (*scattered*) satisfacen la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (5.1)$$

donde k es el número de ondas igual a $2\pi/\lambda$ con λ la longitud de onda del campo incidente en la región exterior. La condición de contorno para (5.1) es que el campo total \mathbf{E} se ‘desvanece’ en la superficie de este conductor, es decir,

$$E_z^{tot} = 0 \quad \text{en } C \quad (5.2)$$

o de manera más explícita,

$$E_z^{inc} + E_z^{scat} = 0 \quad \text{en } C \quad (5.3)$$

siendo C el contorno del *scatterer* o cuerpo dispersor.

La ecuación de Helmholtz se puede reducir a la siguiente ecuación integral de segunda especie,

$$j\omega\mu_0 \int_S dS g_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}') = -E_z^{inc}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (5.4)$$

donde,

$$g_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \quad (5.5)$$

es la función de Green en 2D y $H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ la función de Hankel de primera especie y orden cero. $J_z(\mathbf{r}')$ es la corriente inducida en la superficie del *scatterer* metálico. La ecuación de arriba ilustra de otra manera lo que ya ofrecía la ecuación de Helmholtz: la corriente inducida J_z genera un campo electromagnético E_z polarizado en la dirección z que cancela el campo eléctrico incidente en la superficie del *scatterer*.

Si tratamos de discretizar (5.4) empleando el MoM con una función base de pulso por ejemplo (ver figura 5.2), tenemos $J_z(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N a_i j_i(\mathbf{r})$, donde $j_i(\mathbf{r})$ es la función base. Sustituyendo en la ecuación (5.4), se obtiene, después de muestrear con una Delta de Dirac localizada en el centro del pulso,

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} a_i = b_j, \quad j=1, \dots, N \quad (5.6)$$

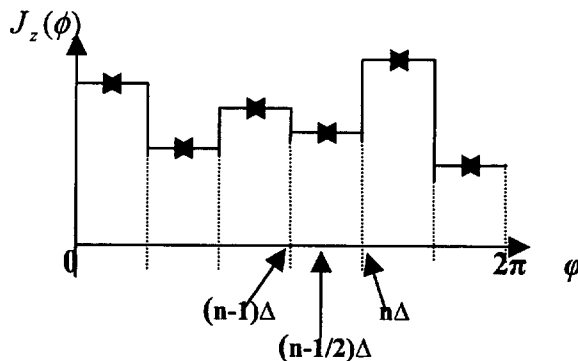


Figura 5.2.- Aproximación de la corriente en la superficie de un conductor usando funciones base de pulso

En (5.6), b_j se obtiene muestreando el campo incidente en el punto \mathbf{r}_j ,

$$b_j = -E_z^{inc}(\mathbf{r}_j) \quad (5.7)$$

a_i es una aproximación de la corriente en la posición \mathbf{r}_i ,

$$a_i = J_z(\mathbf{r}_i) \quad (5.8)$$

y A_{ji} tiene que ver con el muestreo con la delta de Dirac de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A_{ji} &= \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), j\omega\mu_0 \mathbf{g}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), j_i(\mathbf{r}) \rangle \\
 &= j\omega\mu_0 \langle \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'), j_i(\mathbf{r}) \rangle
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

que aproximando la función de Green al pequeño valor de su argumento queda como sigue:

$$A_{ji} = \begin{cases} \frac{\omega\mu_0}{4} \Delta_i \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa\Delta_i}{4e}\right) \right] & , i = j \\ \frac{\omega\mu_0}{4} \Delta_i H_0^{(1)}(\kappa r_{ji}) & , i \neq j \end{cases}
 \tag{5.10}$$

donde Δ_i es el tamaño de discretización que no tiene porque ser uniforme.

Bien, ¿qué conclusiones podemos sacar entonces de este ejemplo de discretización con el Método de los Momentos? Resultan dos ideas importantes. La primera se deduce de (5.10) y es que la función de Green en 2D (o la de Hankel) juega un papel importante en la ecuación que determina como son los elementos de la matriz. La segunda ya es conocida y es que la matriz $A=A_{ji}$ es de N por N así que el producto matriz-vector $\sum_{i=1}^N A_{ji} a_i$ requiere N^2 operaciones y es por tanto el cuello de botella de cualquier método iterativo que se emplee para resolver el sistema de ecuaciones de (5.6).

El *FMM* tratará de conseguir reducir este número de operaciones a $N^{3/2}$ e incluso $N \log N$.

5.2.2.- Descripción más rigurosa

Hasta ahora sabemos cual es la intención del Método Rápido de los Multipolos. En este apartado y antes de meternos definitivamente en la descripción matemática del *FMM* vamos a ver la misma idea y buscando una intuición física más centrada en el *scattering* electromagnético[4].

Consideremos N nodos sobre el contorno de un *scatterer*. Dividamos el contorno en M segmentos o grupos iguales, con $2 \leq M < N$. En cada segmento hay entonces N/M nodos. La figura 5.3 ilustra un *scatterer* con N nodos en su contorno. Vemos el segmento i -ésimo y sus dos segmentos vecinos más cercanos. En problemas de *scattering*, cada nodo puede ser tratado conceptualmente como si fuese una fuente de radiación.

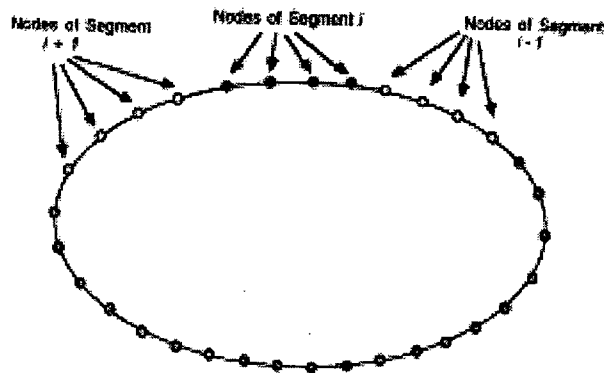


Figura 5.3.- Agrupación de los N nodos de un *scatterer*

Si tenemos fuentes en una región finita del espacio, la radiación emitida desde esas fuentes en la zona de campo lejano se puede aproximar usando una colección de multipolos situados en el centro de la región [2]. La aproximación de los multipolos converge rápidamente fuera de un círculo D que contenga todas las fuentes y separado de él al menos una longitud de onda. De hecho una vez que se ha incluido un número suficientemente grande de multipolos, la precisión de la aproximación se incrementa de forma superalgebraica (más rápido que cualquier potencia negativa de P , donde P es el número de multipolos empleados) [2].

Tomemos entonces cada segmento del contorno como un conjunto de N/M fuentes. Las fuentes en cada segmento se tratan como una sola fuente 'agregada' usando para ello los primeros n multipolos localizados en el centro del segmento. Para cada par suficientemente separado de segmentos, la radiación de los P multipolos de un segmento se puede representar alrededor del centro del otro segmento como una expansión parcial del campo radiado. Por el contrario, para los segmentos cercanos se debe calcular la contribución directa para evaluar el campo radiado. El campo radiado

para un nodo en particular será la suma de las contribuciones de los P multipolos de cada uno de los segmentos lejanos y la contribución directa de los segmentos cercanos.

5.2.3.- Teorema de la adición

Para ilustrar matemáticamente la descripción verbal que se acaba de ofrecer es esencial saber que el *FMM* se apoya en el teorema traslacional de la adición o teorema de la adición. Este teorema para las funciones de Hankel es [5]:

$$H_m^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)e^{jm\phi''} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(kr')e^{-j(n-m)\phi'} H_n^{(1)}(kr)e^{jn\phi} & , r > r' \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n-m}^{(1)}(kr')e^{-j(n-m)\phi'} J_n(kr)e^{jn\phi} & , r < r' \end{cases} \quad (5.11)$$

Aquí, ϕ , ϕ' y ϕ'' son los ángulos que \mathbf{r} , \mathbf{r}' y $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ forman con el eje x respectivamente (Figura 5.4). Físicamente el teorema anterior dice que una onda cilíndrica emanando del origen O'' se puede expresar en términos de los armónicos de la onda cilíndrica saliente de Hankel emanando desde el origen O cuando $r > r'$. Esto es necesario para satisfacer la condición de radiación en el infinito. Cuando $r < r'$, la onda se puede expresar en términos de los armónicos de la onda cilíndrica ‘entrante’ de Bessel desde el origen O . La onda de Bessel es en realidad una onda estacionaria compuesta por una onda entrante de Hankel más una onda saliente de Hankel. Nos referimos a la onda de Bessel como una onda ‘entrante’ porque una onda entrante de Hankel se reflejará de forma natural en una onda saliente de Hankel en el origen, dejando una onda estacionaria de Bessel.

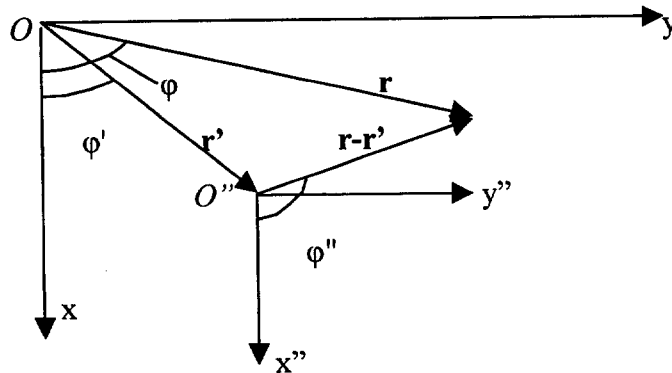


Figura 5.4 Traslación del sistema de coordenadas cilíndrico.

El teorema de adición se puede expresar de forma más compacta con notación vectorial teniendo,

$$\varphi'(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \varphi'(\mathbf{r}) \cdot \overline{\beta}(\mathbf{r}') & , r > r' \\ \Re g \varphi'(\mathbf{r}) \cdot \overline{\alpha}(\mathbf{r}') & , r < r' \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\Re g \varphi'(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Re g \varphi'(\mathbf{r}) \cdot \overline{\beta}(\mathbf{r}') \quad , \forall r, r' \quad (5.13)$$

donde, $\varphi'(\mathbf{r})$ es un vector fila infinitamente largo que incluye $H_n^{(1)}(kr)$ y $\Re g$ es la 'parte regular' o la parte de la función de Hankel que contiene la función de Bessel. Además, $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ son matrices de dimensión infinita. En consecuencia,

$$\varphi'(\mathbf{r}_j) = \begin{cases} \varphi'(\mathbf{r}_i) \cdot \overline{\beta}_{ij}, & r_i > |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \\ \Re g \varphi'(\mathbf{r}_i) \cdot \overline{\alpha}_{ij}, & r_i < |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\Re g \varphi'(\mathbf{r}_j) = \Re g \varphi'(\mathbf{r}_i) \cdot \overline{\beta}_{ij}, \quad \forall r_i, r_j \quad (5.15)$$

Las matrices $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ se conocen como matrices de translación u operadores. Se usan para trasladar el sistema de coordenadas de una función onda a otro sistema de coordenadas. La matriz $\overline{\alpha}$ traslada una onda saliente de un sistema de coordenadas en una onda entrante a otro sistema de coordenadas. La matriz $\overline{\beta}$ traslada una onda saliente de un sistema de coordenadas en una onda saliente de otro sistema de coordenadas. También traslada una onda entrante en un sistema de coordenadas en una onda entrante en otro sistema de coordenadas.

El uso del teorema de la adición nos permite expresar el campo en un sistema de coordenadas en términos del campo en otro sistema de coordenadas. Nótese el comportamiento dicotómico de la expansión: una expansión es válida fuera de un círculo, mientras que la otra expansión sólo es válida dentro de ese mismo círculo. Llamamos a esto la violación del teorema de la adición. Aparte de esto con (5.14) y (5.15) podemos hacer la siguiente deducción.

$$\begin{aligned}
 \varphi'(\mathbf{r}_{ji}) &= \varphi'(\mathbf{r}_{ji})\overline{\beta}_{ji} \\
 &= \Re g \varphi'(\mathbf{r}_{ji}) \cdot \overline{\alpha}_{ji} \cdot \overline{\beta}_{ji} \\
 &= \Re g \varphi'(0) \overline{\beta}_{ji} \cdot \overline{\alpha}_{ji} \cdot \overline{\beta}_{ji} \\
 &= \beta_{ji}' \cdot \overline{\alpha}_{ji} \cdot \overline{\beta}_{ji}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde \mathbf{r}_{ji} va desde el punto i al punto j . Para una fuente monopolo, ya que solo es necesaria una columna de $\overline{\beta}_{ji}$, (5.16) queda como:

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \beta_{ji}' \cdot \overline{\alpha}_{ji} \cdot \beta_{ji} \tag{5.17}$$

En definitiva, vemos que el teorema traslacional de la adición nos permite factorizar la función de Hankel (y por extensión la función de Green) haciendo uso de tres matrices. Sin embargo veremos a continuación que no se llega a ninguna mejora por este motivo.

5.2.4.- Una factorización ineficiente de la función de Green

Vamos a analizar la factorización (5.17) de la función de Green a la que hemos llegado y descubriremos que no encontramos así un algoritmo más eficiente para problemas de Helmholtz y electromagnéticos. No obstante, esta factorización ilustra el papel que los multipolos juegan en el algoritmo. También ilustra porque hay necesidad de diagonalizar los operadores de traslación para problemas de Helmholtz y electromagnéticos.

Con este fin, dividimos esta vez los N *subscatterers* en grupos, cada uno de los cuales contiene M *subscatterers* (elementos de corriente). Entonces hay N/M grupos. Además, puesto que A_{ji} contiene la función de Hankel cuando $i \neq j$, se puede usar el teorema de la adición para la función de Hankel para reescribir A_{ji} . Así que de (5.17) tenemos:

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \underbrace{\beta_{jl'}^t}_{1 \times P} \cdot \underbrace{\bar{\alpha}_{l'l}}_{P \times P} \cdot \underbrace{\beta_{li}}_{P \times 1} \quad (5.18)$$

donde l' y l son los centros de los grupos l' -ésimo y l -ésimo respectivamente (ver figura 5.5) y la matriz $\bar{\alpha}$ y el vector β se definen como:

$$[\bar{\alpha}_{l'l}]_{nm} = H_{n-m}^{(1)}(k_0 r_{l'l}) e^{-j(n-m)\phi_{l'l}} \quad (5.19)$$

$$[\beta_{jl'}]_n = J_n(k_0 r_{jl'}) e^{jn(\phi_{jl'} - \pi)} \quad [\beta_{li}]_n = J_n(k_0 r_{li}) e^{-jn\phi_{li}} \quad (5.20)$$

donde $\phi_{\alpha\beta}$ es el ángulo que un vector (que apunta de α a β) forma con el eje x. Como decíamos, lo anterior nos permite factorizar la función de Green

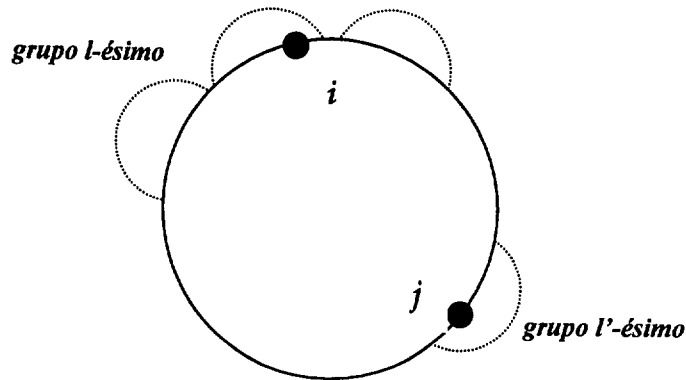


Figura 5.5 Asociación en grupos de elementos de corriente.

El teorema de la adición permite expandir el campo debido a una fuente en el punto i , en un nuevo sistema de coordenadas con el centro en l empleando expansiones de multipolos. En (5.18), P indica el número de multipolos necesarios para hacer la expansión precisa. En consecuencia, el vector β_{li} convierte un monopolo en un multipolo de los P . Además, la matriz de translación $\bar{\alpha}_{l'l}$ convierte los multipolos ondas salientes con origen de coordenadas en l en multipolos ondas entrantes con origen de coordenadas en l' . Finalmente, el vector $\beta_{jl'}^t$ representa la evaluación de estos multipolos entrantes en el punto de campo j .

Usando (5.18), podemos reescribir la interacción lejana (5.6) como:

$$b'_j = \frac{\omega\mu_0}{4} \beta'_{jl} \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq l'+NN}}^{N/M} \alpha_{ll'} \cdot \sum_{i \in G_l} \beta_{li} \Delta_i a_i, \quad j \in G_{l'}, \quad l' = 1, \dots, N/M \quad (5.21)$$

Esta ecuación ilustra una transmisión en tres etapas de información de campo desde un punto fuente i a un punto de campo j . La primera etapa es la etapa de agregación, la segunda es la de traslación y la tercera la de disgregación. Debido a la violación del teorema de la adición, (5.21) solo es válido cuando el punto fuente y el punto campo pertenecen a diferentes grupos que además se encuentran alejados entre sí. Por esto $l \neq l' + NN$ implica 'cuando l no es el propio grupo l' o sus grupos vecinos cercanos'.

Con el propósito de mantener la precisión con (5.18), P es proporcional a M . Aquí, P es el número de multipolos necesarios para hacer la factorización precisa. Si el *scatterer* es discretizado de manera tal que el tamaño de discretización Δ está en torno a 0.1λ , entonces el tamaño del grupo en términos de longitud de onda es linealmente proporcional a M . Sin embargo, cuanto mayor sea el tamaño del grupo en términos de longitud de onda, mayor número de multipolos será necesario para aproximar las ondas salientes del centro del grupo l . Puede verse fácilmente que P es también proporcional al tamaño eléctrico (tamaño en términos de longitud de onda) del grupo, y en consecuencia es también proporcional a M .

Por tanto, el coste de la primera etapa, la etapa de agregación, que requiere un cómputo $c_l = \sum_{i \in G_l} \beta_{li} \Delta_i a_i, l = 1, \dots, N/M$, es

$$T_1 = \frac{N}{M} M^2 = NM \quad (5.22)$$

El coste de la segunda etapa, la etapa de traslación, que requiere computar $d'_l = \sum_{l=1}^{N/M} \alpha_{ll'} \cdot c_l, l = 1, \dots, N/M$, es

$$T_2 = \left(\frac{N}{M} \right)^2 M^2 = N^2 \quad (5.23)$$

Y finalmente, el coste de la última etapa, la de disgregación, es el coste de computar $\beta_{j'l'}^i \cdot d_{l'}$, $j \in G_{l'}, l', \dots, N/M$. Es decir,

$$T_3 = \frac{N}{M} M^2 = NM \quad (5.24)$$

De acuerdo con lo que anunciábamos, el coste de la etapa de traslación usando $\bar{\alpha}_{l'l}$ es todavía N^2 , por lo que se obtienen pocas ventajas reescribiendo (5.6) como (5.21) ya que el coste vía (5.21) es de la misma complejidad computacional que antes.

5.2.5.- Diagonalización del operador de traslación

Claramente el anterior algoritmo es ineficiente porque la matriz $\bar{\alpha}_{l'l}$ que traduce multipolos salientes en multipolos entrantes, es una matriz densa. Por tanto, es necesaria otra factorización en la que $\bar{\alpha}_{l'l}$ sea una matriz diagonal. La factorización diagonal fue presentada por primera vez por Rokhlin [1][2]. Hay más de una manera de conseguir una factorización diagonalizada de la matriz $\bar{\alpha}_{l'l}$. En este apartado vamos a presentar una de ellas.

Comenzamos sustituyendo la definición de $\bar{\alpha}$ y β en (5.18) de forma que puede escribirse como

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_{j'l'}) e^{jm(\phi_{j'l'} - \pi)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(kr_{l'l}) e^{-j(m-n)\phi_{l'l}} J_n(kr_{li}) e^{-jn\phi_{li}} \quad (5.25)$$

donde $\varphi_{\alpha\beta}$ es el ángulo que un vector que apunta de α a β forma con el eje x.

Incluso aunque $H_{m-n}^{(1)}(x) \rightarrow \infty$ cuando $|m-n| \rightarrow \infty$, el sumatorio interno en la expresión que acabamos de presentar converge porque $J_n(x) \rightarrow 0$ más rápidamente cuando $|n| \rightarrow \infty$. Nótese que el sumatorio interno es la convolución de dos series

discretas de Fourier. Sin embargo, podemos truncar el sumatorio interno puesto que converge, y expresar (5.25) como

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_{j'}) e^{jm(\phi_{j'} - \pi)} \cdot \sum_{n=m-P}^{m+P} H_{m-n}^{(1)}(kr_{l'}) e^{-j(m-n)\phi_{l'}} J_n(kr_{li}) e^{-jn\phi_{li}} \quad (5.26)$$

En el dominio de Fourier, la convolución discreta de arriba se convierte en un producto. El último sumatorio se puede expresar en términos de transformadas de Fourier usando el teorema de Parseval. Las transformadas de Fourier de los coeficientes de Fourier que incluyen funciones de Bessel se pueden hallar usando la representación integral de la función de Bessel:

$$J_m(kr_{j'}) e^{jm\phi_{j'}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jkr_{j'} \cos(\alpha - \phi_{j'}) + jm(\alpha - \frac{\pi}{2})} d\alpha \quad (5.27)$$

$$J_n(kr_{li}) e^{-jn\phi_{li}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jkr_{li} \cos(\alpha' - \phi_{li}) + jn(\alpha' - \frac{\pi}{2})} d\alpha' \quad (5.28)$$

Usando (5.27) y (5.28) en (5.26), invocando la propiedad convolucional de las series de Fourier y usando el teorema de Parseval para series discretas de Fourier, tenemos:

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\beta}_{j'}(\alpha) \tilde{\alpha}_{l'}(\alpha) \tilde{\beta}_{li}(\alpha) d\alpha \quad (5.29)$$

donde,

$$\tilde{\alpha}_{l'}(\alpha) = \sum_{p=-P}^P H_p^{(1)}(kr_{l'}) e^{-jp(\phi_{l'} - \alpha + \frac{\pi}{2})} \quad (5.30)$$

y

$$\tilde{\beta}_{j'}(\alpha) = e^{-jkr_{j'} \cos(\alpha - \phi_{j'})} \quad \tilde{\beta}_{li}(\alpha) = e^{-jkr_{li} \cos(\alpha - \phi_{li})} \quad (5.31)$$

Si ahora usamos (5.29) en lugar de (5.18) en (5.21), tenemos una nueva fórmula que nos permite transmitir información mediante la computación en tres etapas,

$$b'_j = \frac{\omega\mu_0}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \tilde{\beta}_{j'l'}(\alpha) \sum_{l=1}^{N/M} \tilde{\alpha}_{l'l'}(\alpha) \sum_{i \in G_l} \tilde{\beta}_{li}(\alpha) \Delta_i a_i, \quad j \in G_{l'}, l' = 1, \dots, N/M \quad (5.32)$$

para interacciones entre grupos. La integral en (5.32) se puede sustituir por un sumatorio en Q quedando

$$b'_j = \frac{\omega\mu_0}{4Q} \sum_{q=1}^Q \tilde{\beta}_{j'l'}(\alpha_q) \sum_{l=1}^{N/M} \tilde{\alpha}_{l'l'}(\alpha_q) \sum_{i \in G_l} \tilde{\beta}_{li}(\alpha_q) \Delta_i a_i, \quad j \in G_{l'} \quad (5.33)$$

Con notación matricial esta ecuación queda como sigue:

$$b'_j = \frac{\omega\mu_0}{4Q} \tilde{\beta}_{j'l'} \cdot \sum_{l=1}^{N/M} \tilde{\alpha}_{l'l'} \cdot \sum_{i \in G_l} \tilde{\beta}_{li} \Delta_i a_i, \quad j \in G_{l'} \quad (5.34)$$

donde $\tilde{\alpha}_{l'l'}$ es claramente una matriz diagonal. Reemplazar $\tilde{\alpha}_{l'l'}$ por el operador diagonal $\overline{\tilde{\alpha}}_{l'l'}$, reduce el coste en la segunda etapa a

$$T_2 = \frac{N^2}{M} \quad (5.35)$$

mientras que el coste de las otras dos etapas es el mismo que antes; por tanto el coste total es:

$$T = C_1 \frac{N^2}{M} + C_2 NM \quad (5.36)$$

Optimizar (5.36) con respecto a M nos da $M = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} N$. Por tanto,

$$T = 2\sqrt{C_1 C_2} N^{1.5} \quad (5.37)$$

Todo este ejercicio ilustra la importancia de la diagonalización del operador de traslación para llegar a un algoritmo en dos niveles con complejidad computacional reducida.

5.2.6.- Interpretación física de los operadores

Sabemos que el factor $e^{-jk \cdot r_{ji}}$ aparece cuando calculamos el campo lejano producido por una fuente de radiación.

Por tanto, la etapa de agregación en (5.33) es equivalente a calcular el campo lejano provocado por un grupo. La función $e^{-jk \cdot r_{ji}}$ es la contribución a la función de radiación de campo centrada en r_i debida al punto fuente r_i . La etapa de traslación toma este campo de cada grupo y lo convierte en una onda entrante. Por tanto es una conversión de campo lejano a campo cercano. La etapa de disgregación toma el campo entrante y lo multiplica por el diagrama de radiación en recepción para un determinado punto de observación. Se puede pensar en la función $e^{-jk \cdot r_{ji}}$ como el diagrama de radiación en recepción del punto de observación r_j con respecto al centro r_i .

La riqueza del diagrama de radiación depende del tamaño del grupo en términos de longitud de onda. Por tanto, cuanto mayor sea el tamaño del grupo, más rico será el diagrama de radiación, y más los términos multipolos necesarios para capturar este diagrama de campo lejano.

5.2.7.- Otra forma de ver el problema

La diagonalización del operador de traslación se puede ver como un cambio de base o una transformación similar de la matriz de traslación.

Las β 's fueron inicialmente expresadas en términos de multipolos, y la onda empleada para expresar las ondas salientes eran multipolos. Las $\tilde{\beta}$'s son en realidad ondas planas. Así que la relación entre las nuevas $\tilde{\beta}$'s y las viejas β 's tal y como viene

dada por (5.27) y (5.28) se puede ver como un cambio de base que se puede expresar con una transformación como esta:

$$\beta = \bar{S}' \cdot \tilde{\beta} \quad (5.39)$$

Esto es justamente lo inverso de (5.27) y (5.28). Luego,

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \bar{\beta}'_{j'l'} \cdot \bar{S} \cdot \bar{\alpha}_{l'l} \cdot \bar{S}' \cdot \tilde{\beta}_{li} \quad (5.40)$$

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \tilde{\beta}'_{j'l'} \cdot \tilde{\alpha}_{l'l} \cdot \tilde{\beta}_{li} \quad (5.41)$$

y

$$H_0^{(1)}(kr_{ji}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\beta}'_{j'l'}(\alpha) \tilde{\alpha}_{l'l}(\alpha) \tilde{\beta}_{li}(\alpha) d\alpha \quad (5.42)$$

donde

$$\tilde{\alpha}_{l'l}(\alpha) = \sum_{p=-P}^P H_p^{(1)}(kr_{l'l}) e^{-jp(\phi_{l'l} - \alpha + \frac{\pi}{2})} \quad (5.43)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}'_{j'l'}(\alpha) &= e^{-jkr_{j'l'} \cos(\alpha - \phi_{j'l'})} = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{j'l'}} \\ \tilde{\beta}_{li}(\alpha) &= e^{-jkr_{li} \cos(\alpha - \phi_{li})} = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{li}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

En general, para un elemento de la matriz del MoM, con i refiriéndose al punto de campo y j refiriéndose al punto fuente que no esté dentro del mismo grupo ni de los grupos vecinos cercanos, se puede factorizar como

$$A_{ij} = \mathbf{V}'_{il} \cdot \tilde{\alpha}_{ll'} \cdot \mathbf{V}_{l'j} \quad (5.45)$$

5.3.- FMM en tres dimensiones

Parte del trabajo en 3D ya está hecho ya que, tal y como se presentó en la sección anterior, una manera de obtener la formulación del *FMM* es usar la forma diagonalizada de la matriz de traslación [1]. En esta sección, la deduciremos de una manera sencilla empleando el teorema de adición y una identidad elemental.

5.3.1.- Ecuaciones integrales y el método de los momentos

El campo electromagnético dispersado por un cuerpo en 3D de forma arbitraria se puede obtener encontrando la solución de una ecuación integral donde la incógnita es la densidad de corriente inducida. Para objetos conductores, la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE, Electric Field Integral Equation) viene dada por

$$\mathbf{n} \times \int \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' = \frac{4\pi\eta}{k\eta} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (5.46)$$

para \mathbf{r} en la superficie S , donde $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es la distribución de corriente desconocida, \mathbf{n} es un vector unitario normal a S , y

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\overline{\mathbf{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5.47)$$

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jkR}}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (5.48)$$

Aplicamos el Método de los Momentos a (5.46). La corriente incógnita $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es primeramente desarrollada con un conjunto de funciones base $\{\mathbf{j}_i\}$,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \quad (5.49)$$

donde a_i son los coeficientes desconocidos de la serie. La ecuación se discretiza, por tanto, sustituyendo el desarrollo anterior en términos de las incógnitas a_i . Luego, en lugar de forzar que la EFIE sea satisfecha para \mathbf{r} aproximándose a S desde el exterior, se multiplica por un conjunto de N funciones prueba $\{t_j\}$ y se toman los productos internos para llegar a

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} a_i = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.50)$$

donde

$$F_j = \frac{4\pi\eta}{k} \left[\frac{1}{\eta} \int_S dS t_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \right] \quad (5.51)$$

$$A_{ji} = \int_S dS t_j(\mathbf{r}) \cdot \int_S dS' \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}') \quad (5.52)$$

En consecuencia la ecuación integral se aproxima por la ecuación matricial (5.50) usando el MoM. Cuando usamos métodos iterativos como el gradiente conjugado (CG) para resolver la ecuación matricial, se debe realizar un producto matriz-vector por cada iteración. En el siguiente apartado aplicaremos el *FMM* para acelerar los cálculos.

5.3.2.- Método Rápido de los Multipolos tridimensional

El teorema de la adición en tres dimensiones se puede escribir de la forma [1][2][4][6]:

$$\frac{e^{jk|\mathbf{D}+\mathbf{d}|}}{|\mathbf{D}+\mathbf{d}|} = jk \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) j_l(kd) h_l^{(1)}(kD) P_l(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{D}}) \quad (5.53)$$

donde $j_l(x)$ es una función esférica de Bessel de primera especie, $h_l^{(1)}(x)$ es una función esférica de Hankel de primera especie, $P_l(x)$ es un polinomio de Legendre, y $d < D$.

Sustituyendo la identidad elemental siguiente

$$4\pi j^l j_l(kd) P_l(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{D}}) = \int d^2 \hat{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}} P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{D}}) \quad (5.54)$$

en (5.53), nos queda, tras truncar el desarrollo en serie e intercambiar el orden de la integración y el sumatorio,

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{d}}}{|\mathbf{D} + \mathbf{d}|} &\approx \frac{jk}{4\pi} \int d^2 \hat{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}} \sum_{l=0}^L j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kD) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{D}}) \\ &= \frac{jk}{4\pi} \int d^2 \hat{\mathbf{k}} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}} T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{D}}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Hemos truncado el desarrollo en serie infinito, donde $\int d^2 \hat{\mathbf{k}}$ representa la integral sobre la esfera unidad y

$$T_L(\cos \theta) = \sum_{l=0}^L j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kD) P_l(\cos \theta) \quad (5.56)$$

Para aplicar la técnica de los multipolos al producto matriz-vector, dividimos las N funciones base en G grupos -etiquetados con un índice m - cada uno de los cuales teniendo entonces $M=N/G$ funciones base. Para los pares de grupos cercanos (m, m') , calculamos los elementos de la matriz mediante computación numérica directa. Siendo \mathbf{r}_j y \mathbf{r}_i el punto campo y el punto fuente, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ji} &= \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m + \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m'} + \mathbf{r}_{m'} - \mathbf{r}_i \\ &= \mathbf{r}_{jm} + \mathbf{r}_{mm'} - \mathbf{r}_{im'} \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde \mathbf{r}_m y $\mathbf{r}_{m'}$ son los centros de los m -ésimos y m' -ésimos grupos, a los cuales \mathbf{r}_j y \mathbf{r}_i pertenecen, respectivamente. Para un par cercano (m, m') , usando (5.55) con $\mathbf{D} = \mathbf{r}_{mm'}$ y $\mathbf{d} = \mathbf{r}_{jm} - \mathbf{r}_{im'}$, aproximamos la función escalar de Green como

$$\frac{e^{ikr_{ji}}}{r_{ji}} = \int d^2 \hat{k} e^{j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{jm} - \mathbf{r}_{im}')} \alpha_{mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{mm'}) \quad (5.58)$$

donde

$$\alpha_{mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{mm'}) = \frac{jk}{4\pi} \sum_{l=0}^L j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{mm'}) P_l(\hat{\mathbf{r}}_{mm'} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.59)$$

La integral en (5.59) se evaluará con cuadraturas Gaussianas con $K=2L^2$ puntos.

Sustituyendo (5.58) en (5.47) nos queda

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \int d^2 \hat{k} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{jm} - \mathbf{r}_{im}')} \alpha_{mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{mm'}) \quad (5.60)$$

Y ahora sustituyendo (5.60) en (5.52), tenemos los elementos de la matriz de la EFIE en la forma

$$A_{ji} = \int d^2 \hat{k} \mathbf{V}_{fmj}(\hat{k}) \cdot \alpha_{mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{mm'}) \mathbf{V}_{sm'i}(\hat{k}) \quad (5.61)$$

donde

$$\mathbf{V}_{fmj}(\hat{k}) = \int_S dS e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{jm}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \mathbf{t}_j(\mathbf{r}_{jm}) \quad (5.62)$$

$$\mathbf{V}_{sm'i}(\hat{k}) = \int_S dS e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{im}'} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}_{im}') \quad (5.63)$$

Puesto que $(\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) = \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}$, entonces $(\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \mathbf{V} = V_\theta \hat{\theta} + V_\phi \hat{\phi}$; \mathbf{V}_{fmj} y $\mathbf{V}_{sm'i}$ tienen solo componentes theta y phi.

Finalmente reescribimos el producto matriz-vector como

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} \mathbf{a}_i = \sum_{m' \in B_m} \sum_{i \in G_m} A_{ji} \mathbf{a}_i + \int d^2 \hat{k} \mathbf{V}_{fmj}(\hat{k}) \cdot \sum_{m' \in B_m} \alpha_{mm'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{mm'}) \sum_{i \in G_m} \mathbf{V}_{sm'i}(\hat{k}) \mathbf{a}_i \quad (5.64)$$

con j perteneciente a G_m , donde G_m denota todos los elementos del grupo m -ésimo y B_m denota todos los grupos cercanos al m -ésimo (incluido él mismo). El primer término es la contribución de los grupos cercanos, y el segundo es la interacción lejana calculada con el *FMM*.

5.3.3.- Breve análisis de errores en el FMM

Se producen sobre todo dos tipos de errores al implementar el *FMM* en una máquina. El primero de ellos es con diferencia el más importante y es el que se produce al truncar el desarrollo infinito en series de la función de Green a que nos lleva el teorema de la adición. Tal y como hemos visto en (5.55) truncamos tomando L términos. El valor de L se ha determinado de manera semiempírica y es:

$$L \approx kd + 1.8d_0^{2/3} (kd)^{1/3} \quad (5.65)$$

donde $d_0 = \log(1/\varepsilon)$, siendo ε el error máximo que queremos cometer al truncar y d es el máximo diámetro del tamaño de un grupo ($d = \max(|\mathbf{r}_{jm} - \mathbf{r}_{im}'|)$).

El otro tipo de error importante es el que se produce al realizar la integral numérica en (5.64). Sin embargo, el mismo valor de L nos permite conseguir errores muy pequeños si tomamos $2L+1$ puntos para la regla de cuadratura trapezoidal en el intervalo $[0, 2\pi]$ para φ y $L+1$ puntos para la regla de cuadratura de Gauss-Legendre en el intervalo $[0, \pi]$ para θ .

5.4.- Aplicación al modelado de sólidos

Una vez que ya conocemos el Método Rápido de los Multipolos, el siguiente paso es idear una manera de hacerlo compatible con el modelado de sólidos según parches NURBS que se emplea en el MONURBS.

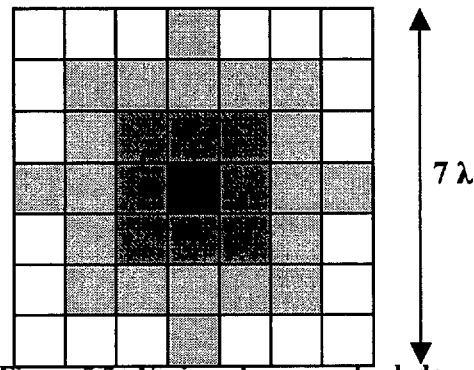
Como sabemos, éste modelado nos ofrece el objeto bajo análisis dividido en diferentes partes que son los parches NURBS. De esta forma, una manera sencilla y muy apropiada de aplicar el *FMM* consiste en considerar que cada uno de los parches NURBS es uno de los grupos de los que hemos hablado durante el capítulo compuestos de nodos o subdominios. En efecto se puede tomar cualquier otro criterio para crear los grupos, pero éste es sin duda el idóneo por su sencillez. Así pues, dentro de cada grupo o parche NURBS tendremos los subdominios individuales y para calcular el acoplo entre un subdominio i y un subdominio j , habrá primero que determinar si dicho acoplo se va a hallar siguiendo el *FMM* o de forma rigurosa.

Habrà pues que tomar un segundo criterio que nos ayude a decidir, dado un parche NURBS, cuales son sus ‘vecinos’ y cuales no. Para los grupos o parches NURBS cercanos o ‘vecinos’ hemos visto que el acoplo entre los subdominios que los componen se hallará de forma directa, mientras que para aquellos parches NURBS no vecinos, se empleará el *FMM* haciendo uso de las matrices de agregación, traslación y disgregación. El criterio que se ha adoptado determina lo siguiente:

‘Para un parche NURBS dado se consideran sus vecinos aquéllos otros que cumplan alguna de las siguientes condiciones:

- 1.- Que limiten con el parche NURBS por alguno de sus lados o esquinas.
- 2.- Cuyo centro diste del centro del parche NURBS una distancia menor o igual a 3 longitudes de onda.’

Con la siguiente figura quedará claro el criterio escogido. En la misma se presenta una placa conductora de dimensiones 7 por 7 longitudes de onda. La placa está modelada con 49 parches NURBS cada uno de 1 longitud onda de lado. El parche NURBS bajo estudio es el de color negro, mientras que los de color gris son sus vecinos. En un tono más oscuro aparecen aquéllos que cumplen la primera condición y en un tono más claro los que cumplen la segunda. En ninguno de ellos se podría aplicar la aproximación de multipolos al pertenecer a grupos vecinos.



5.5.- Resumen

Hemos visto como la sencilla idea que sugiere el Método Rápido de los Multipolos oculta un complejo desarrollo matemático. Pero tal artilugio matemático no debe distraernos y debemos seguir teniendo clara la idea inicial. Aparte de esta visión intuitiva también es importante que nos demos cuenta del doble comportamiento que tiene el *FMM*, en el sentido de que para calcular el acoplo entre dos subdominios pertenecientes a grupos vecinos se emplea el método riguroso que emplea el MoM, mientras que si los dos lados pertenecen a grupos alejados el acoplo se calcula haciendo uso de tres matrices en lugar de una. Cabe destacar también la sencillez del criterio elegido para la aplicación del *FMM*. Simplemente estableciendo la igualdad grupo=parche NURBS se consigue aplicar de forma eficiente. Además la manera de decidir qué parches son los vecinos de uno dado tampoco es complicada.

Pero sin duda no hay que olvidar la ventaja más importante que ofrece el *FMM*, que no es la reducción del tamaño de la matriz total. A partir de (5.64) se puede realizar un estudio de los costes computacionales similar al realizado en 2D, y podríamos llegar a la conclusión de que pasamos de N^2 a $N^{3/2}$ [7]. Esto va a suponer un avance en los métodos iterativos que tratan de resolver el sistema de ecuaciones, ya que se simplifica el producto matriz-vector.

- [1] V. Rokhlin. "Diagonal form of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions". Technical Report YALEU/DCS/RR-894, Yale University, Department of Computer Science . March 1992, to be published in *Applied and Computational Harmonic Analysis*.
- [2] V. Rokhlin. "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions" *Journal of Computational Physics*, 86, 2, pp 414-439, 1990.
- [3] R.F. Harrington. "Field computation by Moment Method". New York, McMillan. 1986
- [4] N. Engheta. W. D. Murphy, V. Rokhlin, M.S. Vassilou. "The Fast Multipole Method (FMM) for electromagnetic scattering problems". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 40, No. 6, June 1992.
- [5] W.C. Chew, "Waves and Fields in Inhomogeneous Media", New York: Van Nostrand Reinhold, 1990; reprinted by IEEE Press, 1995
- [6] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura. "The Fast Multipole Method for the wave equation: a pedestrian prescription". *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 35, No. 3, June 1993
- [7] W.C. Chew, J.M. Jin, E. Michielssen, J.M. Song- "Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic" Norwood, MA. Artech-House, 2001

6. Métodos Iterativos

La ecuación algebraica a que nos conduce el Método de los Momentos es de N ecuaciones con N incógnitas. Una vez invertida la matriz Z se puede obtener el valor de las funciones incógnita. Sin embargo desde un punto de vista computacional, es más eficiente resolver este sistema de ecuaciones encontrando una solución aproximada con grado de error admisible. De entre los posibles métodos iterativos existentes, en MONURBS y SIMCOR se ha utilizado el Método del Gradiente Conjugado (*CGM*). Sin embargo cuando el número de incógnitas N es grande la convergencia del *CGM* es lenta. En este capítulo se exploran nuevos métodos iterativos que muestren buenas tasas de convergencia y además presenten unas características tales que faciliten su posterior combinación con el Método de Momentos Dipolares y método FMM. En este sentido hablaremos del Método Iterativo Esparcido (*SIM*) y de su variante con relajación (*SIM-AR*). Al final del capítulo hablaremos de la manera de combinar las aproximaciones con el método iterativo elegido.

6.1.- Método del Gradiente Conjugado.

El *Conjugent Gradient Method (CGM)* [1] es uno de los métodos iterativos más populares de cuantos existen, dada su probada estabilidad y los buenos resultados que ha mostrado en comparación con otros métodos iterativos existentes. El CGM es uno de los más rápidos y potentes procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El CGM garantiza la convergencia teórica, independientemente de la solución inicial, siempre y cuando se este libre de errores numéricos [2]. Por precisión finita, no se va a dar esta circunstancia, pero sigue siendo un algoritmo muy potente.

Sin embargo presenta el problema de una lenta convergencia cuando el número de incógnitas es elevado. En primer lugar, veamos cómo se aplica este método [3].

Se ha visto que un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar matricialmente como:

$$L[X] = Y \tag{6.1}$$

donde Y es el vector dato, X representa el vector incógnita y L es el operador que actúa sobre este último. El CGM obtiene la solución para la incógnita en sucesivos pasos minimizando un funcional sobre la incógnita \vec{J}_s dado por:

$$\text{Funcional}(\vec{J}_s) = \|\vec{e}\|^2 \tag{6.2}$$

donde \vec{e} se define como:

$$\vec{e} = L[X] - Y \tag{6.3}$$

y la norma de un vector como:

$$\|\vec{A}\| = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^L \vec{A}(i) \vec{A}^*(i) \right]^{1/2} \quad L = \text{longitud del vector} \quad (6.4)$$

de forma que en cada iteración la aproximación para la solución viene dada por:

$$X_n = X_{n-1} + a_{n-1} P_{n-1} \quad n \geq 1$$

donde X_{n-1} es la estimación de la solución en la iteración anterior, a_{n-1} es la magnitud en que se modifica dicha estimación en la dirección P_{n-1} , que es la dirección en la que disminuye el funcional a minimizar. Y el error en cada aproximación se puede evaluar:

$$r_n = L[X_n] - Y \quad n \geq 0$$

La descripción paso a paso de las etapas del CGM se detalla a continuación. Se parte, pues, de una ecuación que tenga la forma

$$Z \cdot I = V \quad (6.5)$$

donde Z es la matriz de impedancias, I es vector de incógnitas y V es el vector de excitación. A continuación, tomando como punto inicial una solución aproximada I_0 (normalmente $I_0 = 0$), se calculan los siguientes términos:

$$r_0 = V - Z \cdot I_0 \quad (6.6)$$

$$P_1 = Z^a \cdot r_0 \quad (6.7)$$

$$a_1 = \frac{\|Z^a \cdot r_0\|^2}{\|Z \cdot P_1\|^2} \quad (6.8)$$

$$I_1 = I_0 + a_1 P_1 \quad (6.9)$$

$$r_1 = V - Z \cdot I_1 \quad (6.10)$$

Z^a representa la matriz adjunta (traspuesta y compleja conjugada) de la matriz Z . Ahora sigue un ciclo iterativo ($i=2,3,4,\dots$) que se detiene cuando se alcance el error deseado ε .

$$\gamma_{i,i-1} = \frac{\|Z^a \cdot r_{i-1}\|}{\|Z^a \cdot r_{i-2}\|} \quad (6.11)$$

$$P_i = Z^a \cdot r_{i-1} + \gamma_{i,i-1} P_{i-1} \quad (6.12)$$

$$a_i = \frac{\|Z^a \cdot r_{i-1}\|^2}{\|Z \cdot P_i\|^2} \quad (6.13)$$

$$I_i = I_{i-1} + a_i P_i \quad (6.14)$$

$$r_i = r_{i-1} - a_i Z \cdot P_i \quad (6.15)$$

$$si \quad \frac{\|V - Z \cdot I_i\|}{\|V\|} \leq \varepsilon \Rightarrow STOP \quad (6.16)$$

Si el sistema es de N ecuaciones con N incógnitas todos los métodos iterativos exhiben una dependencia temporal proporcional a N^2

$$t \propto kN^2 \quad (6.17)$$

donde N^2 representa la dependencia temporal que supone llevar a cabo un producto matriz-vector. Es habitual, según ha demostrado la experiencia propia y varios estudios sobre el *CGM*, que el número de iteraciones necesarias para la convergencia es menor que N [4] lo que implica una dependencia temporal efectiva de la solución inferior a

N^3 (entre N^2 y N^3 , generalmente) [5]. Esta lenta convergencia se debe en parte al hecho de que el *CGM* necesita emplear, por su propia formulación una matriz traspuesta a la matriz de impedancias. La necesidad de esta matriz también es perjudicial desde el punto de vista de la ocupación de memoria, ya que debemos reservar el doble de memoria que con cualquier otro método iterativo que únicamente emplee la matriz Z .

Finalmente, la siguiente figura muestra el diagrama de flujo que se sigue en el método *CGM* implementado.

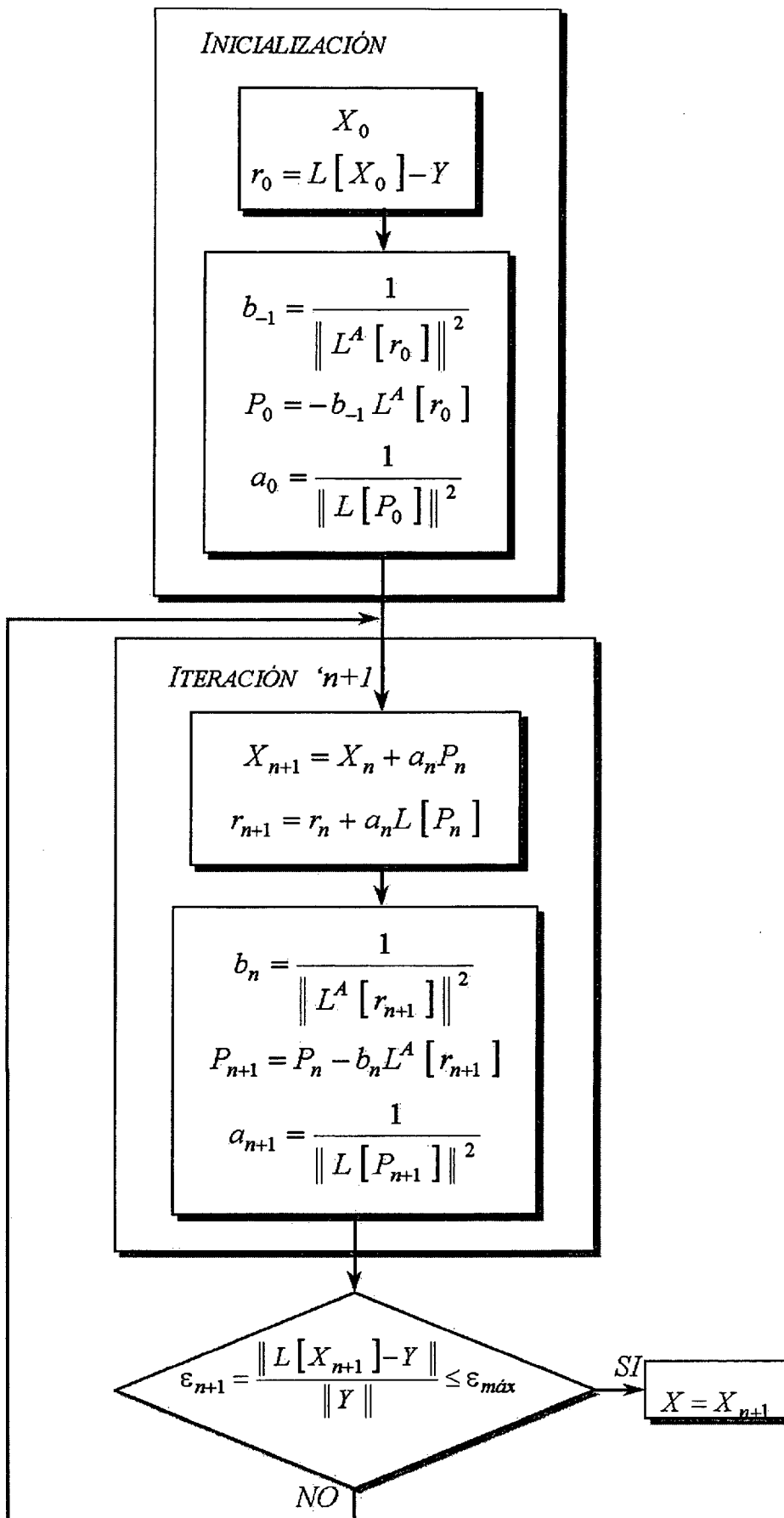


Figura 6.1.- Flujoograma del método CGM

Una vez visto el *CGM* y sus principales desventajas, buscaremos algunas alternativas, comenzando por el Método Iterativo Esparcido.

6.2.- Método Iterativo Esparcido

¿Qué ocurre cuando el *CGM* tiene que lidiar con casos grandes? Su convergencia es muy lenta porque tiene que manejar matrices muy grandes. ¿No existe ninguna manera de hacer que el *CGM* emplee matrices más pequeñas aún cuando las estructuras bajo análisis sean grandes?

Precisamente el *Sparse Iterative Method (SIM)* trata de conseguir esto [5][6]. Es decir, trata de hacer que el *CGM* se aplique a matrices pequeñas al manejar casos grandes. Esto se puede conseguir creando una matriz que contenga los elementos de acoplo más significativos de la matriz Z , lo que nos lleva a una matriz esparcida Z_S -de aquí se deriva el nombre del método-. Tendremos por tanto dos matrices: una matriz completa o total Z , que es la matriz que hemos venido manejando hasta ahora y que contiene los acoplos entre todos los subdominios de la estructura analizada, y otra matriz esparcida Z_S que contiene una selección de aquellos elementos en que la interacción es más fuerte.

La idea es que el *CGM* maneje la matriz esparcida para obtener las corrientes incógnitas; pero precisamente al utilizar Z_S estaremos cometiendo un error que habrá que acotar para alcanzar la convergencia. Así se muestra en la formulación del método, en la que tras inicializar el error inicial $E_0 = V$, cada iteración i se computa como sigue:

$$Z_S \cdot I_{i-1} = E_{i-1} \Rightarrow I_{i-1} \quad (6.18)$$

$$V_{i-1} = Z \cdot I_{i-1} \quad (6.19)$$

$$E_i = E_{i-1} - V_{i-1} \quad (6.20)$$

El método se detiene cuando E_i es menor que el error admisible ϵ . La corrientes total se obtiene como

$$I_{total} = I_0 + I_1 \quad (6.21)$$

siendo el subíndice la iteración y cada I la corriente obtenida al resolver el CGM interno de cada iteración.

Vemos que hay un ‘bucle resolutivo’ interno que es en el primer paso de cada iteración en el que se utiliza el *CGM* para obtener el vector de incógnitas I_{i-1} . Nótese como en efecto, el *CGM* emplea la matriz esparcida por lo que converge rápido y resulta mucho menos costoso computacionalmente. Sin embargo el *SIM* sigue teniendo el producto matriz-vector que vemos en el segundo paso y que es inevitable en los métodos iterativos de resolución de sistema de ecuaciones. Pese a todo el *SIM* converge en pocas iteraciones, y la diferencia con el *CGM* se hace evidentemente más notable a medida que el número de incógnitas es más grande, porque en tales circunstancias el Método del Gradiente Conjugado pasa por serios problemas y por el contrario el número de iteraciones que necesita el *SIM* es realmente reducido. En el capítulo de resultados veremos pruebas de esto. Pese a todo, el método *SIM* tiene la desventaja de que no está asegurada su convergencia para todos los casos, como ocurre con el *CGM*, con lo cual puede divergir en algunos de ellos.

Decimos que la matriz esparcida se obtiene tomando los elementos significativos de la completa, pero ¿cómo se realiza la selección?, ¿cual es el criterio?. Existen varias formas de rellenar Z_S [7]. Por ejemplo, se pueden tomar criterios de cercanía, es decir, dado un subdominio i , formaran parte de la matriz esparcida aquellos acoplos del lado i con los lados j que disten de aquel menos de una distancia determinada. O también criterios de cota, esto es, estarán en Z_S aquellos valores que superen una cota, normalmente determinada como un porcentaje del valor máximo de cada fila de la matriz completa o del máximo global de toda la matriz. Un optimizado llenado de la matriz esparcida es fundamental para obtener prestaciones excelentes.

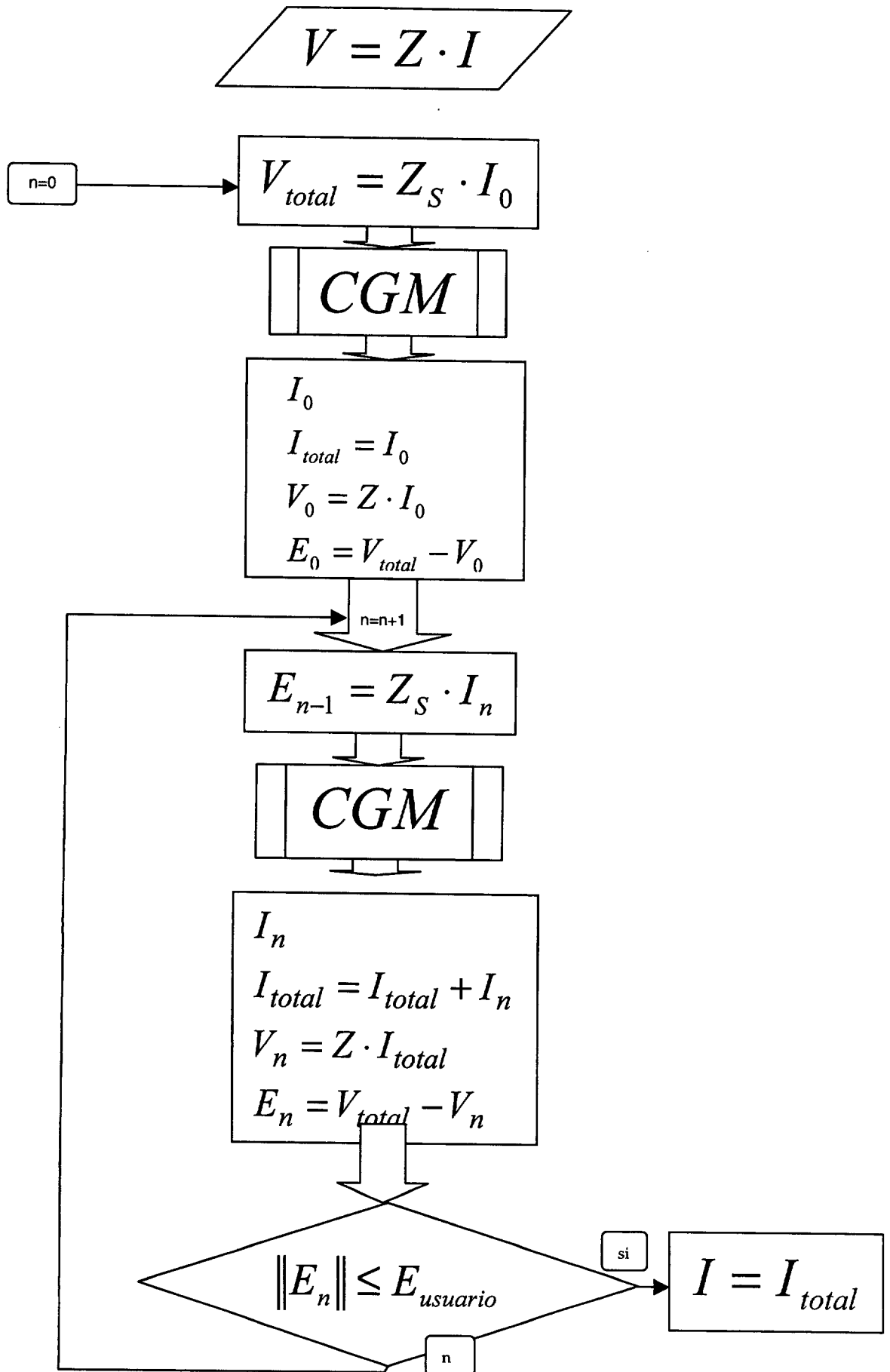


Figura 6.2.- Flujograma del método SIM

Más adelante veremos un ejemplo en este sentido, pero antes presentaremos el Método Iterativo Esparcido con Relajación Adaptativa (*SIM-AR*).

Y es que ocurre que el *SIM* presenta graves problemas de estabilidad y convergencia si el caso no está bien condicionado. De hecho, en la implementación realizada para este trabajo y bajo los casos probados, no se llegó a la solución en ninguna ocasión. Este es un problema conocido, y existen por ello alternativas que tratan de subsanar este problema. Veamos la que se adoptó en este trabajo.

6.3.- SIM con Relajación Adaptativa

Para conseguir la estabilidad deseada en el *SIM* es necesario introducir lo que se conoce como relajación del error [5]. Para ello hay que hacer una serie de modificaciones. Tales modificaciones aparecen a partir de la segunda iteración ya que la primera iteración es exactamente igual que en *SIM*. Con esto se llega al *Sparse Iterative Method with Adaptive Relaxation (SIM-AR)*:

Iteración 2.

PASO 1: Empleando *CGM* se obtiene I_1 de $Z_S \cdot I_1 = E_1$

PASO 2: $V_1 = Z \cdot I_1$

PASO 3: $E_2 = E_1 - \alpha_1 V_1$. Se calcula de nuevo el error cometido pero se introduce el factor α_1 con el que se busca minimizar el error E_2 . La manera de buscar el valor α_1 óptimo sigue, a su vez, el siguiente proceso iterativo: Se comienza con $\alpha_1 = 1.0$ y se calculan los siguientes errores,

$$\begin{aligned} E'_2 &= E_1 - (\alpha_1 + 0.1)V_1 \\ E_2 &= E_1 - \alpha_1 V_1 \\ E''_2 &= E_1 - (\alpha_1 - 0.1)V_1 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Se observa a continuación cual de estos errores es el menor. Si es E_2 ya tenemos el valor óptimo de α_1 . Si es E''_2 , se hace $\alpha_1 = \alpha_1 - 0.1$ y se vuelven a calcular E_2 , E'_2 y E''_2 . Finalmente, si por el contrario el menor es E'_2 , se hace $\alpha_1 = \alpha_1 + 0.1$ y se vuelven a calcular E_2 , E'_2 y E''_2 .

Iteración 3.

PASO 1: Empleando *CGM* se obtiene I_2 de $Z_S \cdot I_2 = E_2$

PASO 2: $V_2 = Z \cdot I_2$

PASO 3: $E_3 = E_2 - \alpha_2 V_2$. A partir de esta iteración y para acelerar los cálculos el valor del factor α actual (α_2 en este caso) con el que se comienza es el del factor α obtenido en la iteración anterior (α_1 en este caso).

.
.
.

Iteración i.

PASO 1: Empleando *CGM* se obtiene I_{i-1} de $Z_S \cdot I_{i-1} = E_{i-1}$

PASO 2: $V_{i-1} = Z \cdot I_{i-1}$

PASO 3: $E_i = E_{i-1} - \alpha_{i-1} V_{i-1}$

Finalmente la corriente total también debe tener en cuenta la relajación:

$$I_T = I_0 + \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \dots + \alpha_{i-1} I_{i-1} \tag{6.24}$$

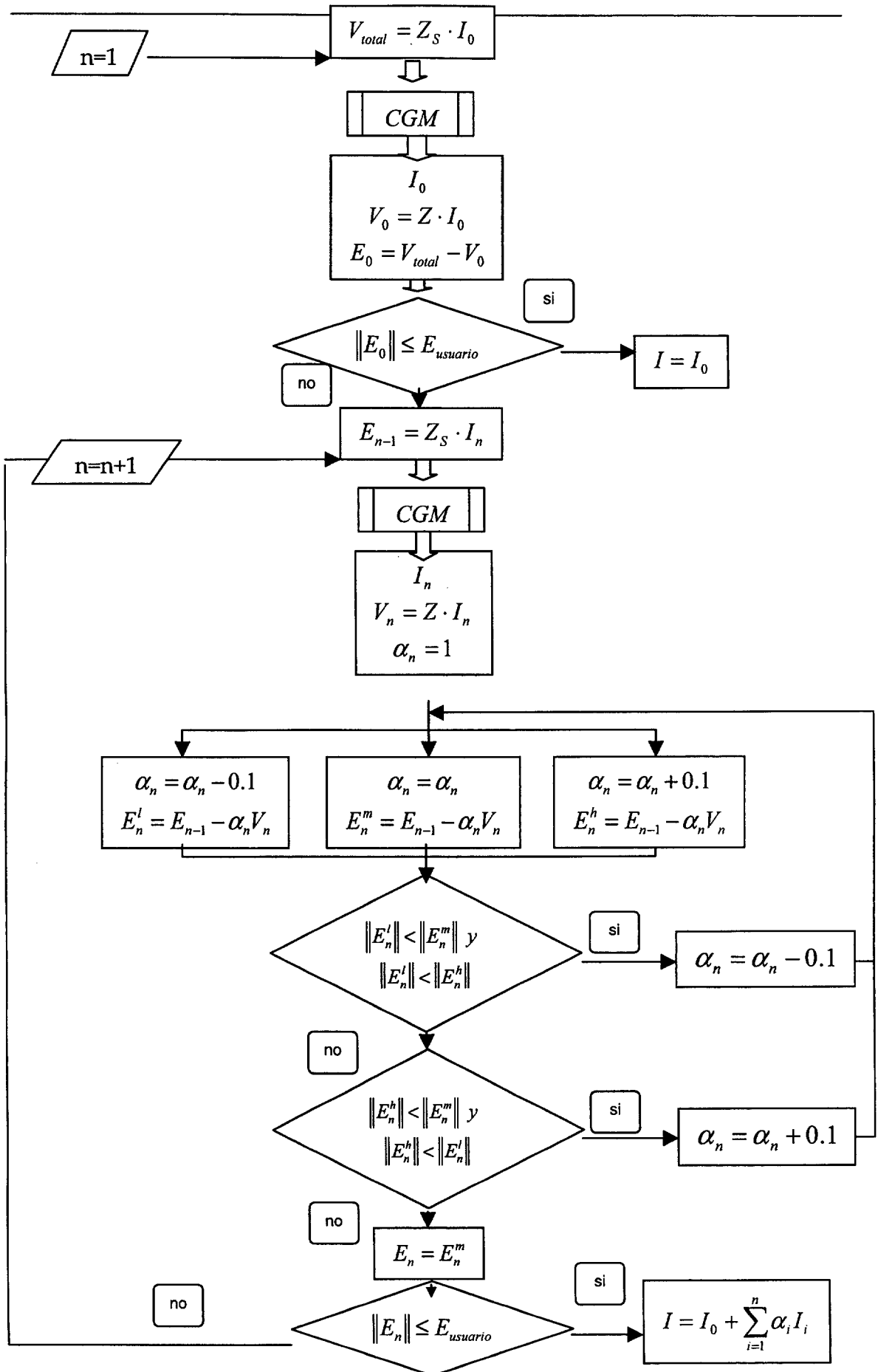


Figura 6.3.- Flujograma del método SIM-AR version1

Inicialmente, al implementar este método, se optó por elegir como valor inicial del parámetro de relajación $\alpha = 1$. Sin embargo, debido a las características de esta versión del SIM, se puede establecer una aproximación para el óptimo valor del parámetro de relajación. Observando la ecuación:

$$E_{nm} = E_{n-1} - \alpha_n V \quad (6.25)$$

se aprecia que anulando el error de la iteración n , y aplicando norma al error de la iteración anterior y a V , se puede despejar:

$$\alpha_n = \frac{\|E_{n-1}\|}{\|V\|} \quad (6.26)$$

Experimentalmente, se advirtió que esta operación sólo es eficiente en la primera iteración. Además se observó que aparecen buenos resultados si, para las siguientes iteraciones, se utiliza como valor inicial del parámetro de relajación obtenido en la iteración anterior. La solución que obtiene el método con esta pequeña modificación es la misma que sin ella, pero emplear esta modificación produce una reducción del tiempo de ejecución.

6.4.- SIM con relajación versión 2

En la primera versión de este método, la aplicación y búsqueda del parámetro de relajación es bastante rápida y directa. Este procedimiento tiene como ventaja la rapidez y como desventaja el que la elección del parámetro de relajación no es la mas eficiente posible.

En esta segunda versión del SIM con relajación, se intenta implementar un proceso de búsqueda del parámetro de relajación óptimo de un modo algo mas complejo a pesar de que pueda parecer que aumenta el tiempo de ejecución.

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

-PASO 1: Como en la versión anterior, se plantea la ecuación matricial:

$$V_{total} = Z_S \cdot I_0 \quad (6.27)$$

Se resuelve mediante CGM (con poca carga computacional) y se obtiene el valor de I_0 .

-PASO 2: Se obtiene $V_1(\alpha_0)$ que es un valor de error que depende del parámetro de relajación:

$$V_1(\alpha_0) = V_{total} - \alpha_0 \cdot Z \cdot I_0 \quad (6.28)$$

Una vez calculado este valor, se plantea la siguiente ecuación:

$$V_1(\alpha_0) = Z_S \cdot I_1(\alpha_0) \quad (6.29)$$

Mediante CGM se resuelve y se obtiene un valor de corriente que también depende del parámetro de relajación.

-PASO 3: Con este valor de corriente, el error a minimizar se obtiene:

$$E_1(\alpha_0) = V_1(\alpha_0) - Z \cdot I_1(\alpha_0) \quad (6.30)$$

Desde el punto PASO 2 se repite este proceso variando en ± 0.1 el valor del parámetro de relajación, hasta encontrar el valor de este que produce el mínimo valor de error.

-PASO 4: Entonces se evalúa la norma de este error y se compara con el error establecido por el usuario. En caso de ser menor se detiene el proceso, se ha alcanzado la solución. En caso contrario, se realiza la iteración siguiente.

-PASO 5: Para las siguientes iteraciones, se repite el proceso desde el punto PASO 3 aunque en la ecuación se sustituye V_{total} por el error obtenido en la iteración anterior:

$$V_{n+1}(\alpha_n) = E_n - \alpha_n \cdot Z \cdot I_n \quad (6.31)$$

de forma que, al final, el valor de la solución viene dado por:

$$I = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot I_i \quad (6.32)$$

La siguiente figura muestra el diagrama de bloques del algoritmo empleado para implementar la segunda versión del método SIM desarrollada para esta herramienta numérica.

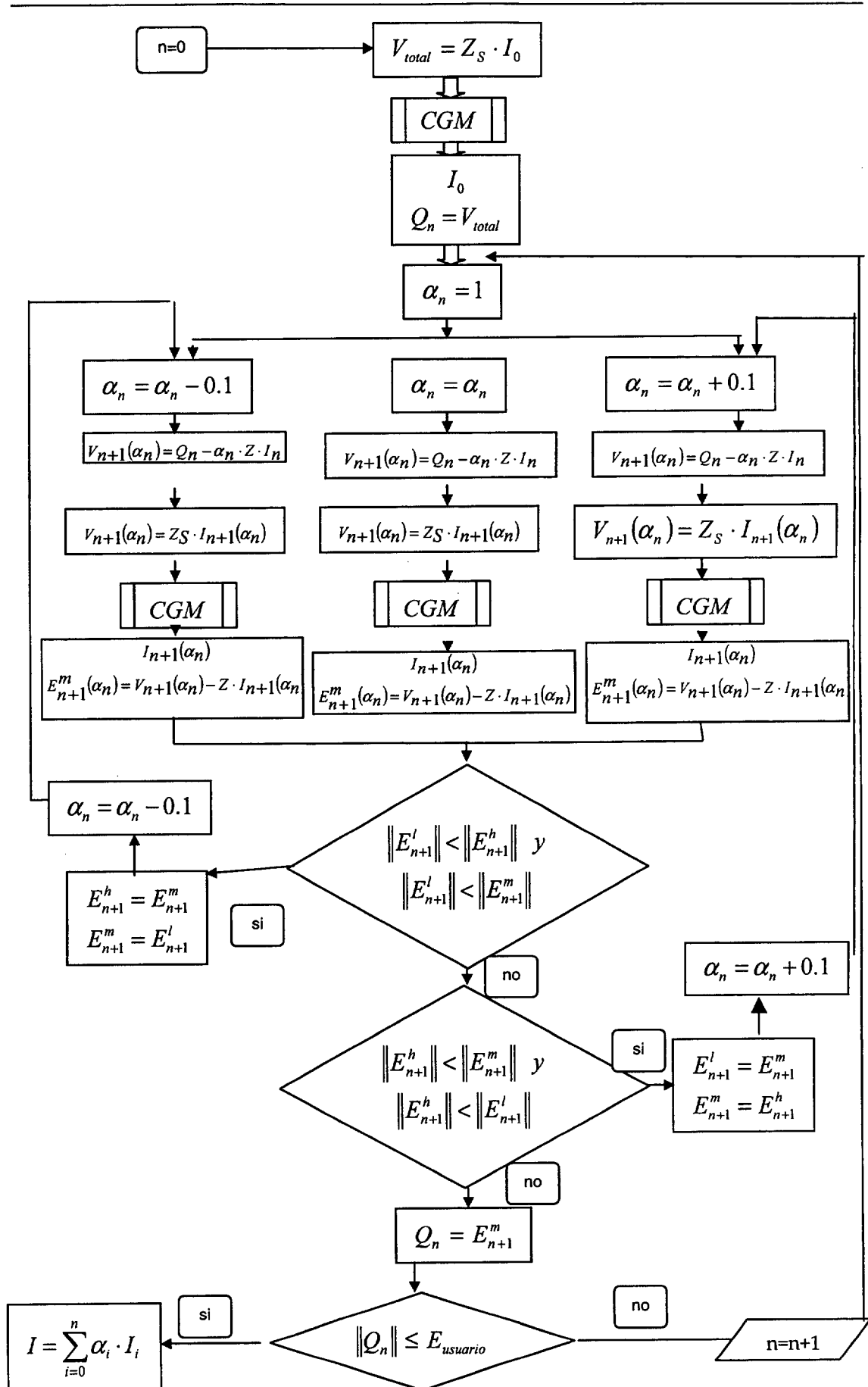


Figura 6.4.- Flujograma del método SIM-AR version2

Del mismo modo que para la primera versión implementada de este método, podrán introducirse las mismas modificaciones de elección del parámetro inicial de relajación. En esta versión la elección del parámetro de relajación no se realiza de forma directa, sino que depende de varios pasos, entre ellos una resolución mediante CGM. Debido a esto, la elección del parámetro inicial de relajación directamente despejando de la ecuación no obtiene buenos resultados.

En cuanto a la otra modificación introducida en la primera versión implementada de SIM, ofrece resultados realmente buenos a la hora de reducir el tiempo de ejecución. Esta reducción de tiempo se aprecia, sobre todo, en resolución de casos con un error máximo permitido pequeño. Como en esta versión, la elección del parámetro de relajación incluye una resolución interna mediante CGM, el hecho de comenzar la búsqueda del parámetro óptimo de relajación a partir del obtenido en la iteración anterior, ahorra gran cantidad de pasos que se veían afectados por el tiempo empleado en resolver este CGM.

6.5.- Un caso práctico

Vamos a comparar el MONURBS original, que emplea el Método del Gradiente Conjugado, con un MONURBS en el que se ha implementado un *SIM-AR*. El caso que vamos a simular es el que se presenta en la siguiente figura:

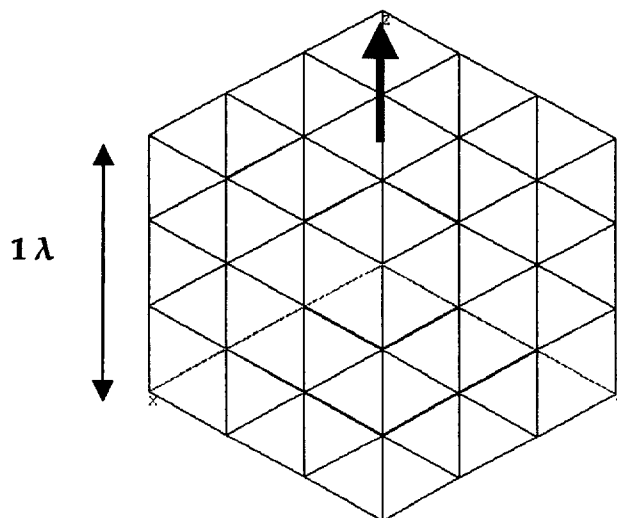


Figura 6.5.- Dipolo a $\lambda/4$ sobre cubo de una λ de lado

Tenemos un dipolo eléctrico infinitesimal situado a un cuarto de longitud de onda sobre el centro de la cara superior de un cubo perfectamente conductor de una λ de lado, y queremos ver el diagrama de radiación. Para discretizar se han tomado 6 divisiones por longitud de onda (en la figura no aparece representado el mallado que se corresponde a 6 divisiones por longitud de onda sino que el mallado que vemos es el que ofrece como ayuda visual la herramienta empleada para crear la estructura), lo que supone que tenemos un total de 588 lados. Los resultados obtenidos son:

	<i>CGM</i>	<i>SIM-AR</i>
<i>Tiempo MONURBS</i>	<i>56 seg</i>	<i>95 seg</i>
<i>Iteraciones</i>	<i>25</i>	<i>18 (60)</i>

Tabla 6.1.- Comparación *CGM* y *SIM-AR*

Hay algo que llama mucho la atención en estos resultados y es el tiempo total empleado en cada una de las dos versiones. El tiempo utilizado por el *CGM* es menor que el utilizado con *SIM*. Lo que ocurre es que el caso es aún muy pequeño y la ventaja que puede alcanzar el *SIM-AR* no se hace patente porque el *CGM* es capaz de manejar con soltura la matriz total de acoplos. Es decir, no hay grandes diferencias entre la matriz esparcida y la matriz total porque esta última no es excesivamente grande.

A esto hay que añadir que el *SIM-AR* que hemos probado no estaba optimizado en el sentido del llenado de Z_s . Se empleó un llenado por filas determinando que la cota para todas las filas fuese la resultante de dividir la media de todos los valores de la primera fila, excepto el de valor máximo, entre dicho valor máximo. No se ahondó en la búsqueda de una manera mejor de obtener la cota, que nos hubiese llevado a una matriz esparcida óptima, porque no era el objetivo de este ejemplo.

Se consigue con este ejemplo ver que con una implementación no óptima del *SIM-AR* conseguimos llegar a la solución con menos iteraciones y sin menoscabo de la exactitud de los resultados, como muestra el siguiente corte en $\phi=0$ obtenido en la simulación:

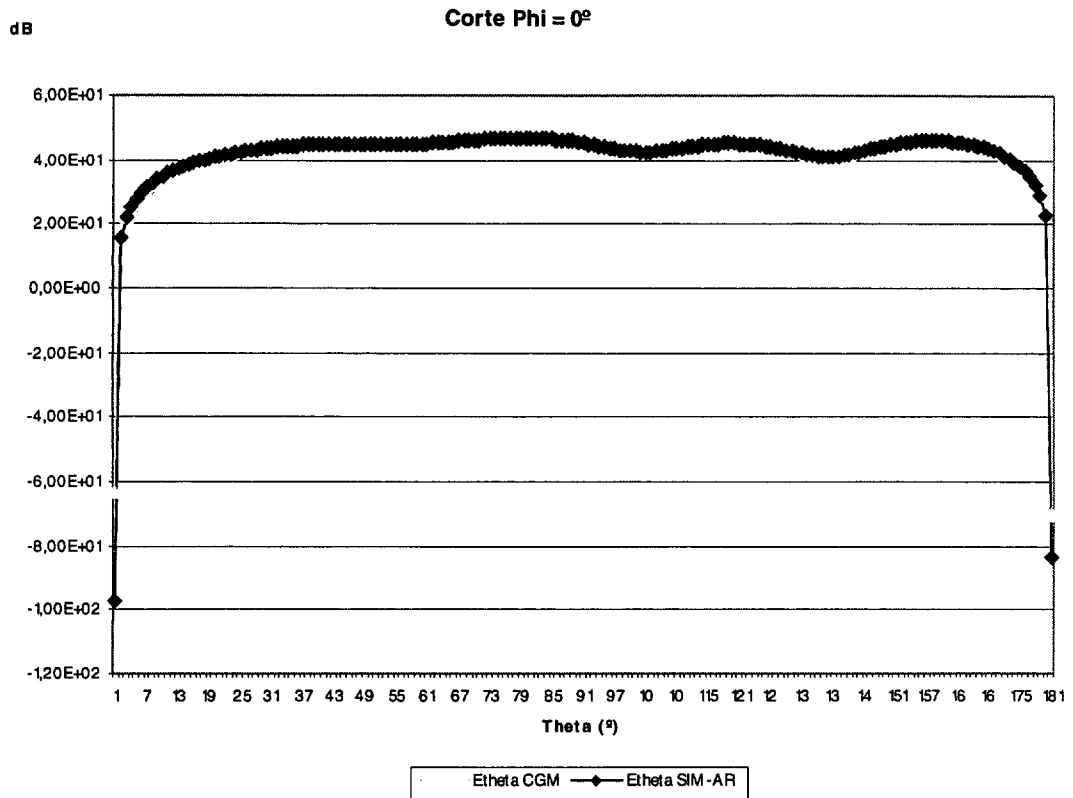


Figura 6.6.- Corte para dipolo a $\lambda/4$ sobre cubo de una λ de lado

A continuación se va a comprobar la mejora también en tiempo de ejecución del Método SIM-AR respecto al CGM cuando el número de incógnitas es grande. Para eso analizamos el siguiente caso. Se trata de dos placas cuadradas situadas perpendicularmente entre sí formando un diedro. La longitud del lado de ambas placas es de 4 lambdas. La figura 6.7 muestra la geometría del presente caso.

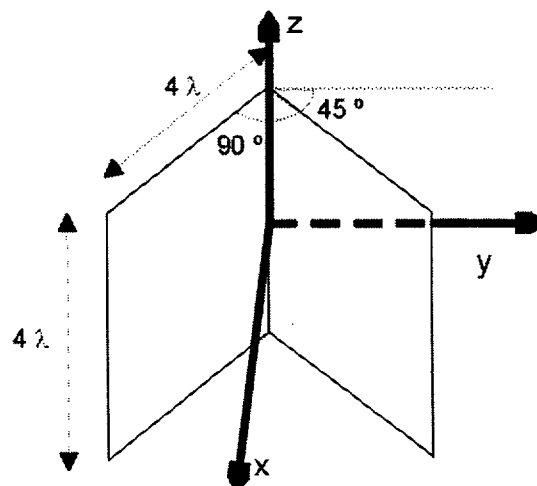


Figura 6.7.- Geometría de un diedro perpendicular de 4λ de lado

El dipolo está situado sobre el eje x a una distancia de 2λ respecto al punto medio de la arista que forman las dos superficies (origen de coordenadas en esta geometría). Con estos datos resulta tras el proceso de discretización, un problema de 8966 incógnitas, que es muy superior al cubo tratado anteriormente.

Los resultados de campo eléctrico obtenidos con CGM y con el SIM-AR para el corte $\theta = 0^\circ$ son los que se muestran en la figura 6.8.

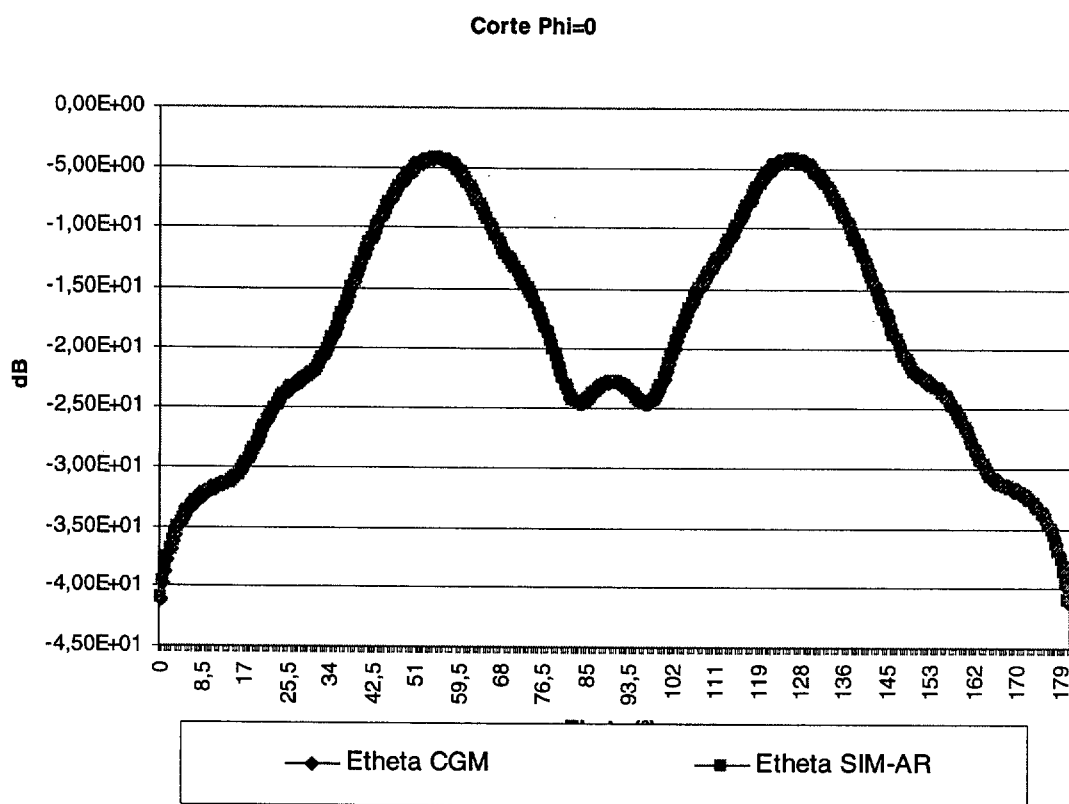


Figura 6.8.- Corte $\phi=0$ para el diedro de 4λ de lado

La comparación en tiempo de ejecución de ambos métodos de resolución de ecuaciones para esta simulación es la que se muestra en la tabla 6.2.

	CGM	SIM-AR
Tiempo MONURBS	8h 38min 45 seg	0h 33min 17 seg
Iteraciones	66	9 (60)

Tabla 6.2.- Comparación CGM y SIM-AR

Se puede observar que los resultados que se obtienen con ambos métodos tiene una buena coincidencia. En cuanto a la comparación entre ambos métodos se observa que el SIM-AR emplea un tiempo casi nueve veces inferior al CGM. Esto se debe a dos razones fundamentalmente. La primera es que, como se apuntó en el caso del cubo, el método SIM-AR reduce espectacularmente el número de iteraciones necesarias. En el caso del diedro la reducción es de 8 veces. La segunda razón es que el caso del diedro es lo suficientemente grande en número de incógnitas N para que el CGM no maneje con soltura la matriz de acoplos, al resultar muy grande ($N*N$). El método SIM-AR, sin embargo, maneja una matriz de acoplos inferior ($N*N_s$), con lo cual la puede manejar con menor necesidad computacional, lo que redundará en un decremento del tiempo de ejecución.

Como conclusión, se puede apuntar que el método SIM-AR reduce el número de iteraciones necesarias para la convergencia, y que reduce el tiempo de ejecución siempre que se traten de problemas con muchas incógnitas (en nuestra aplicación, casos grandes eléctricamente).

6.6.- Combinación de métodos iterativos con la técnica de los Momentos dipolares

El objetivo en esta tesis es conseguir una solución conjunta que aglutine las ventajas de la aproximación de los Momentos Dipolares con las de las nuevas técnicas iterativas vistas en este capítulo. ¿Cómo conseguimos combinarlos? Vamos a comprobar a continuación que es muy sencillo [8].

Cuando en el capítulo 4 presentamos la aproximación de los Momentos Dipolares, llegamos a la conclusión de que la manera de calcular el acoplo entre aquellos lados o subdominios cercanos se iba a realizar siguiendo el método riguroso. Esto significa que vamos a tener una matriz que dé cuenta de todos los ‘acoplos vecinos’. Por otro lado, calcular el acoplo entre dos lados de lejanos supone hacer uso de la aproximación de momentos dipolares. El conjunto de la matriz de ‘acoplos vecinos’ más la matriz con los momentos dipolares de cada lado conforman la matriz global o completa de impedancias del problema que estemos tratando. Por otro lado, no

se oculta que esa matriz de ‘acoplos vecinos’ o matriz ‘rigurosa’ no es más que una matriz esparcida. Se observa, pues, que el criterio para englobar un acoplo en una u otra matriz se basa en la distancia que separa el subdominio fuente del subdominio observación.

De tal forma que por la propia manera de operar con la técnica de momentos dipolares, ya tenemos una matriz completa y una matriz esparcida. Combinar los momentos dipolares con el *SIM-AR* es entonces tan sencillo como hacer que el *SIM-AR* emplee como Z y Z_s las matrices que le ofrece el Método de momentos dipolares. Con momentos dipolares el tamaño de la matriz completa (conjunto de Z_s y la matriz que engloba el momento dipolar de cada lado) es del orden de $N_s * N_s + N$, donde N_s es el número de subdominios que están dentro de la matriz Z_s (subdominios cercanos o de acoplo significativo) y N el número total de subdominios.

Sabemos que el producto matriz-vector es el cuello de botella de los métodos iterativos, $N_s * N_s + N$. Lógicamente, para que esto en realidad sea así, el *SIM-AR* no debe emplear un número de iteraciones del orden de N como le ocurría al *CGM* y comprobaremos en el siguiente de resultados que el número de iteraciones es realmente bajo.

Otro criterio que se puede escoger a la hora de decidir si un elemento pasa a formar parte de la matriz Z o de Z_s es la comprobación de que el acoplo sea significativo para el subdominio observación. Esto es, el valor de dicho acoplo sea en módulo superior a un porcentaje del mayor acoplo que ese subdominio podría recibir.

La forma de operar consiste en, mediante un preproceso, calcular en primer lugar, para cada subdominio, el valor del acoplo mayor. Se puede suponer que este mayor acoplo será el que cada subdominio cree consigo mismo, es decir, su autoacoplo. Posteriormente se supone una densidad de corriente unidad para todos los subdominios y se calculan los acoplos que todos producirían sobre el subdominio observación en curso. En virtud de que estos valores sean superiores a un porcentaje del autoacoplo, se seleccionan los subdominios para formar parte de la matriz Z o Z_s .

Como conclusión a este criterio se puede decir que, para las pruebas realizadas y respecto al criterio de distancia, la ventaja de obtener una matriz Z_s con los subdominios más importantes no es suficiente para compensar el coste de realizar el preproceso indicado. Esto es debido a que ambos criterios obtienen una distribución de matrices muy similar, siendo el coste computacional del criterio de elementos significativos mayor que el de distancia.

6.7.- Combinación de métodos iterativos con la técnica de Multipolos

Al igual que ocurre en la aproximación de Momentos Dipolares, la técnica de multipolos [9] presenta dos formas de calcular el acoplo entre dos subdominios, en función de si ambos subdominios pertenecen a un mismo grupo son de grupos distintos. En el caso de que pertenezcan al mismo grupo, el cálculo se realizará mediante la formulación rigurosa del método de los momentos y, en caso contrario, mediante las matrices de agregación, traslación y desagregación.

Se puede establecer que, para combinar los métodos iterativos presentados en este capítulo con la técnica de Multipolos, se tenga en cuenta esta distinta forma de cálculo del acoplo para crear las matrices Z y Z_s . Así, las interacciones entre elementos del mismo grupo se contemplarán en la matriz Z_s y el resto en la matriz Z . Se observa que la filosofía es la misma que en la técnica de Momentos Dipolares. La forma de determinar si un subdominio pertenece a un grupo o a otro es mediante un criterio de distancia.

Si se realiza una comparación entre la implementación de ambas técnicas con los métodos iterativos se llega a la siguiente conclusión. En primer lugar hay grandes similitudes como son los objetivos de reducción de coste computacional y que ambas realizan una aproximación para cálculos a grandes distancias, aunque esta aproximación sea distinta para ambas técnicas. Pero la diferencia más importante computacionalmente entre ambos métodos es la distancia a partir de la cual se puede realizar la aproximación con cierta garantía. Esta distancia es menor en la aproximación de momentos dipolares que en la de multipolos. Así, para las simulaciones realizadas, la

primera arrojaba buenos resultados con una distancia de una longitud de onda, mientras que la segunda necesitaba una distancia no inferior a tres longitudes de onda.

Esta diferencia provoca que el ahorro computacional sea inferior en la técnica de multipolos. Esto es, necesitará más memoria que el método de momentos dipolares para simular el mismo ejemplo.

Finalmente, anotar que ambas técnicas se pueden combinar dentro de la misma herramienta. Así, se puede crear la matriz Z_s , calculada mediante la expresión rigurosa, para los elementos más cercanos al subdominio observación (por ejemplo, a distancia inferior a una longitud de onda). Para los elementos situados en zona intermedia (p. e. Entre 1 y 3 longitudes de onda), se podría aplicar la técnica de momentos dipolares, dejando la técnica de multipolos para los elementos más alejados. Esta herramienta tiene la desventaja de que necesita más almacenamiento, debido a que se deben calcular las matrices necesarias para ambas técnicas, pero puede resultar beneficiosa en términos de tiempo de ejecución para ciertas simulaciones.

- [1] M.R.Hestenes, E.Steifel, "Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems", *J.Res. Nat. Bur. Standard.*, vol.49, pp.409-436, 1952.
- [2] N.Morita, N.Kumagai, J.R:Mautz, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, Artech House, Norwood, U.S.A., 1990.
- [3] L. Valle López. "Aplicación de técnicas híbridas basadas en el método de los momentos para el análisis de Antenas en presencia de geometrías arbitrarias eléctricamente grandes modeladas con superficies NURBS". Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria, Octubre de 1995.
- [4] D.R.Wilton, J.E.Wheeler III, "Comparison of Convergence Rates of the Conjugate Gradient Method Applied to Various Integral Equation Formulations", Capítulo 5 del *Application of Conjugate Gradient Method to Electromagnetics and Signal Analysis*, PIER 5: Progress in Electromagnetics Research, T.K.Sarkar, Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, U.S.A., 1991.
- [5] A.R. Clark, A.P.C. Fourie, D.C. Nitch. "Stationary, nonstationary and hybrid iterative Method of Moments Solution Schemes". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 10, October 2001.
- [6] A.P.C. Fourie, D.C. Nitch. "A Sparse Iterative Method (SIM) for the Moment Method calculation". *IEEE AP-S International Symposium*, Seattle 1994.
- [7] D.C. Nitch, A.P.C. Fourie "Investigating three methods for improving the performance of the SIM algorithm" *IEEE* 1994
- [8] E. García, F. Sáez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. "A Novel Approach for the Computation of the EFIE with a Low Computational Cost". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 4 pags. en CDROM. Onio, USA, 22-27 Junio 2002.
- [9] F. Saez de Adana, D. Escot, F. Rivas, M.F. Cátedra. "Combinación del Método Rápido de Multipolos con nuevos métodos iterativos para el cálculo de radiación y scattering sobre cuerpos complejos modelados por superficies paramétricas." XVII

Symposium nacional de la Unión Científica Internacional de Radio. Alcalá de Henares.
Septiembre de 2002.

7. Solución de Combined Field Integral Equation

Para evitar los problemas de la EFIE y de la MFIE a las frecuencias de resonancia se utiliza la ecuación integral de campo combinada (Combined Field Integral Equation, CFIE) que es simplemente una combinación lineal de la EFIE y de la MFIE y tiene la siguiente forma:

$$\text{CFIE} = \alpha \text{EFIE} + (1 - \alpha) \text{MFIE} \quad (7.1)$$

El parámetro de combinación α varía entre 0 y 1 pudiéndose elegir cualquier valor en ese rango. Se han realizado algunos estudios para elegir el valor óptimo de α , comprobándose que para la mayor parte de los casos $\alpha=0.2$ suele ser una buena elección.

7.1.- Desarrollo.

Una vez desarrolladas las ecuaciones de Maxwell se llega a unas expresiones que dan lugar a dos ecuaciones, en función de las condiciones de contorno que se deseen aplicar. Estas ecuaciones, como se vio en el capítulo 3, son la EFIE, si se aplican las condiciones de contorno del campo eléctrico, y la MFIE, si por el contrario se aplican las condiciones de contorno del campo magnético.

Si se opta por la resolución mediante el Método de los Momentos, tanto en la EFIE como en la MFIE, se llega a una ecuación en que la variable a resolver es la densidad de corriente en el cuerpo objeto de radiación o scattering.

Teniendo en cuenta que en ambas ecuaciones se tiene la misma función incógnita, se puede realizar una combinación lineal de ellas para obtener dicha función. La combinación se puede ponderar por un parámetro con el fin de dotar de mayor o menor relevancia a una ecuación de campo respecto a la otra (en el caso de que se sospeche que en el caso bajo estudio está más influido por el comportamiento del campo eléctrico o por el del magnético). Este método de resolución es llamado Combined Field Integral Equation, Ecuación Integral de Campo Combinada. (CFIE).

Por tanto, al combinar linealmente las ecuaciones, se deben combinar mediante la expresión 7.1 tanto el operador como el término independiente de las ecuaciones.

En los capítulos anteriores se detallaron las expresiones utilizadas para el cálculo de los acoplos entre subdominios tanto en la EFIE como en la MFIE. Con estas expresiones se obtenían los valores que se debían situar en la matriz Z , es decir, en el operador.

En el desarrollo de la CFIE, el procedimiento a desarrollar para el cálculo de cada acoplo consiste en evaluarlo mediante su expresión para la EFIE y almacenarlo en la matriz Z , ponderado por el valor del parámetro de combinación. Posteriormente se evalúa el acoplo para la MFIE, y se suma al valor almacenado para EFIE ponderado también por el parámetro de combinación según la expresión 7.1.

Por lo tanto no es necesario duplicar la matriz Z para almacenar los valores de EFIE y de MFIE, sino que en una única matriz se combinan ambos en el momento en que son calculados. Esto consigue no duplicar la memoria utilizada con respecto a las ecuaciones integrales de campo magnético y eléctrico.

En el cálculo del término independiente, se realiza el mismo proceso descrito anteriormente, es decir, el cálculo de los valores de EFIE ponderados y su suma con los de MFIE ponderados también. Otro aspecto a tener en cuenta es que en una misma onda, el valor del campo eléctrico normalmente es del orden de $120 \cdot \pi$ veces mayor que el valor del campo magnético. Esto ocurre siempre en ondas planas en espacio libre. Al combinar las ecuaciones, la parte de EFIE manejará valores mayores que la MFIE. Este aspecto no tendría ninguna importancia si se trabajara con un método analítico en el que no se cometiera ningún error. Pero el método de los momentos es un método numérico que aproxima la ecuación analítica, con lo cual implica ya un determinado error numérico en su formulación. Además en la resolución mediante herramientas informática se asume que se trabaja con precisión finita, con lo cual también se asume un error por eso. Estos errores, al tener la MFIE valores menores a los de la EFIE, afectan más a esta ecuación, con lo cual para evitarlo se realiza una multiplicación en los términos de la MFIE con el objetivo de igualar en orden a los de la EFIE. Esta multiplicación se realiza a ambos lados de la igualdad, con lo cual no afecta en el resultado final.

$$CFIE = \alpha EFIE + (1 - \alpha) MFIE * 120 * \pi \quad (7.2)$$

7.2.- Aproximación de momentos dipolares y FMM en CFIE.

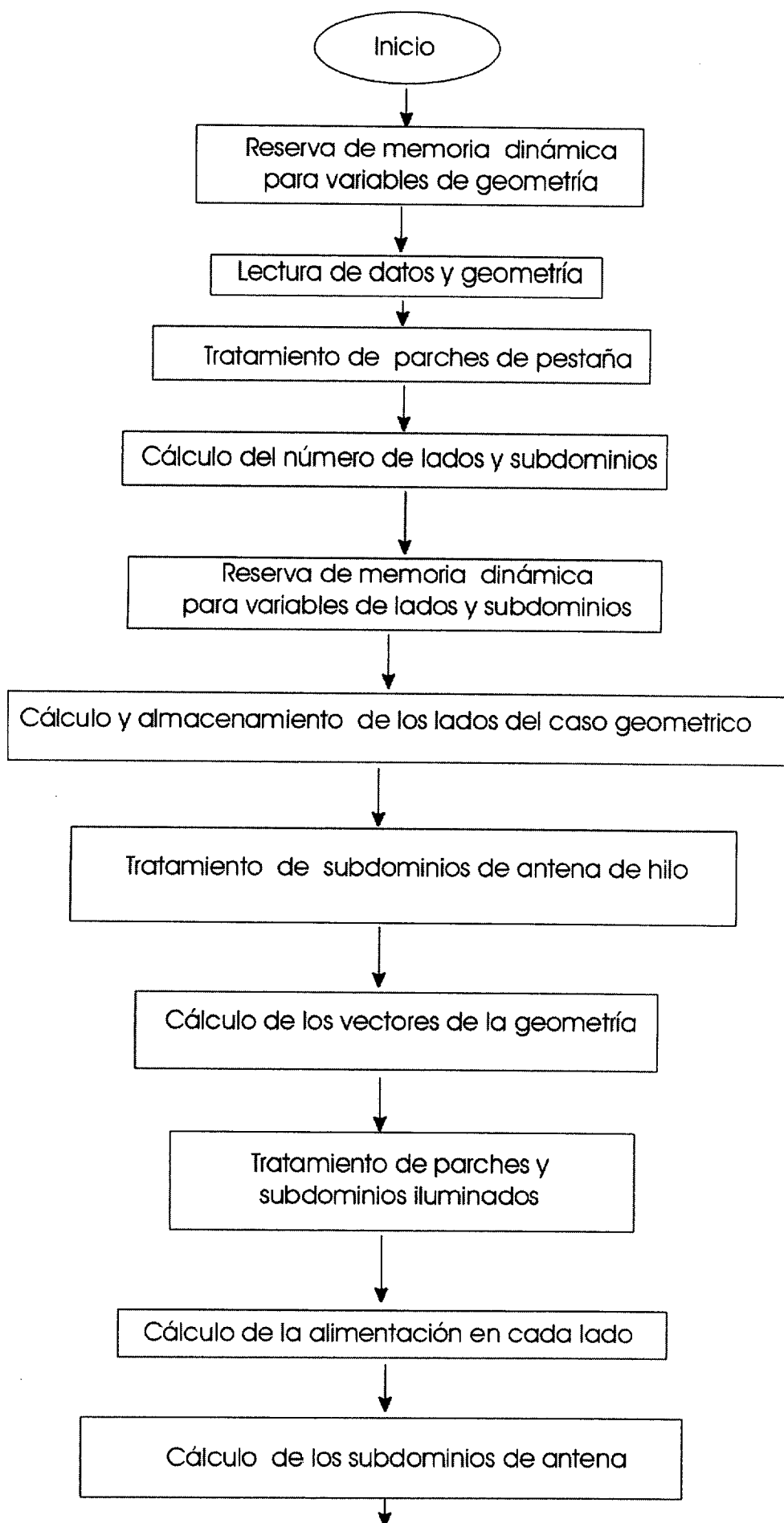
En la sección dedicada a la aproximación de los momentos dipolares se desarrolló como se calcula su expresión y como se aplican a la hora de obtener el valor de los acoplos tanto para la MFIE como para la EFIE.

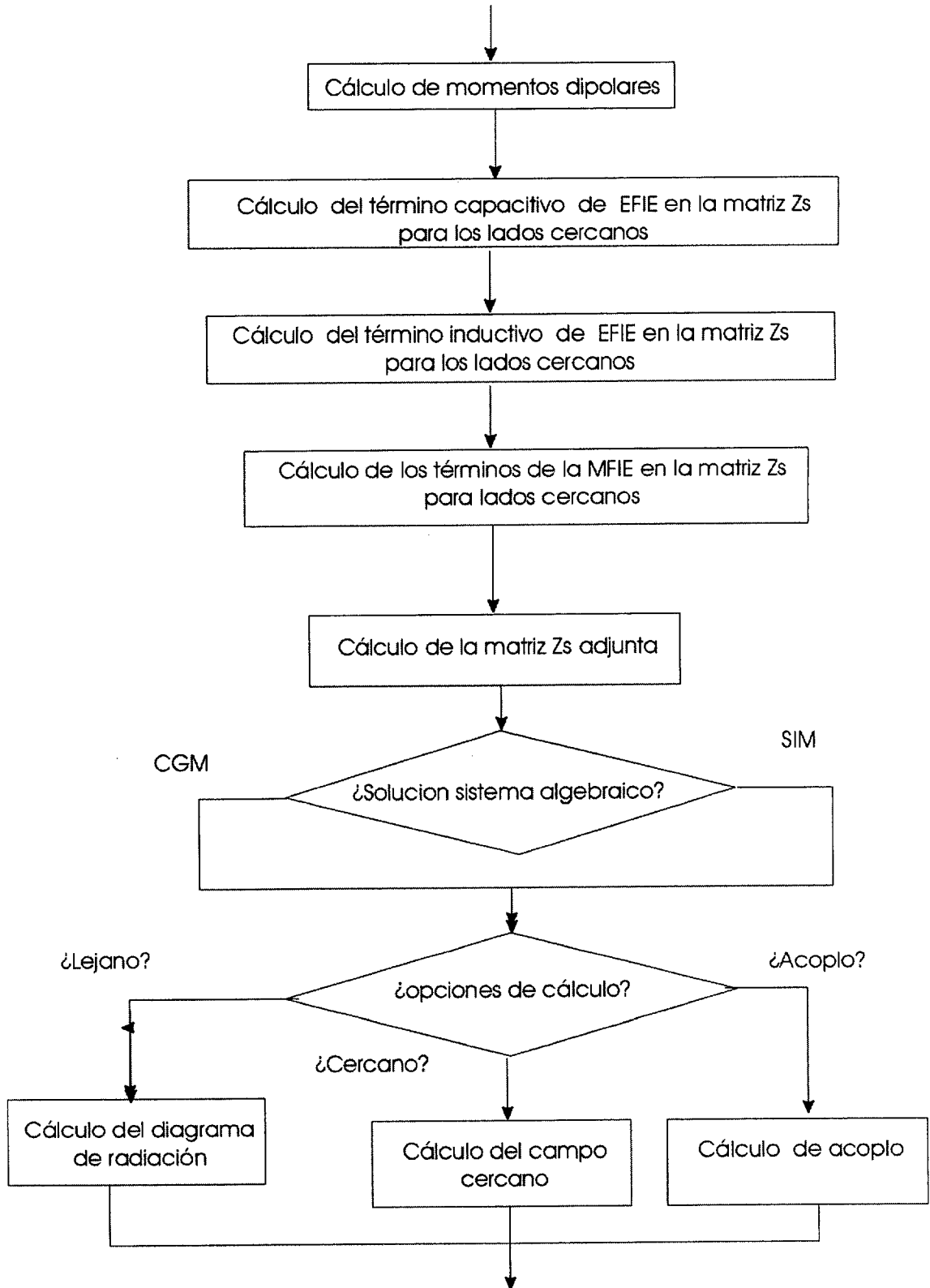
Pues bien, estos acoplos para MFIE y EFIE obtenidos a través de los momentos dipolares se pueden combinar linealmente de la forma que se comentó en el apartado anterior. Con esta combinación obtenemos una herramienta que calcula la CFIE utilizando la aproximación de momentos dipolares. Esta tendrá las mismas ventajas en cuanto a coste computacional que las que se lograban en las herramientas SIMCOR y MONURBS con su inclusión. Las condiciones para la utilización de los momentos dipolares (campo lejano), las expresiones derivadas de su utilización y sus ventajas fueron descritas con profundidad en el capítulo 4.

De igual forma, también se puede aplicar la aproximación de multipolos al cálculo de la CFIE. En el capítulo 5 se abordaron las expresiones tanto para la solución de la EFIE y la MFIE. Combinándolas linealmente estas expresiones mediante la expresión 7.1 se obtiene la ecuación que se debe resolver. Como ocurre en el caso de los momentos dipolares, esta herramienta adquiere todas las ventajas de la aproximación de multipolos, y se puede combinar con los métodos iterativos del capítulo 6 de la misma forma que el resto de herramientas. La comparación entre las aproximaciones de momentos dipolares y multipolos para la CFIE arrojan las mismas conclusiones que para las otras ecuaciones integrales. Estas conclusiones se detallaron en el capítulo anterior.

7.3.- Diagrama de flujo

Se muestra a continuación un diagrama de flujo que ilustra el procedimiento seguido por la herramienta desarrollada para obtener la solución al problema electromagnético planteado mediante la CFIE. En él se puede observar que se realiza el cálculo de los elementos de acoplo de EFIE y de MFIE por separado antes de llegar a la proceso de resolución del sistema de ecuaciones algebraico.





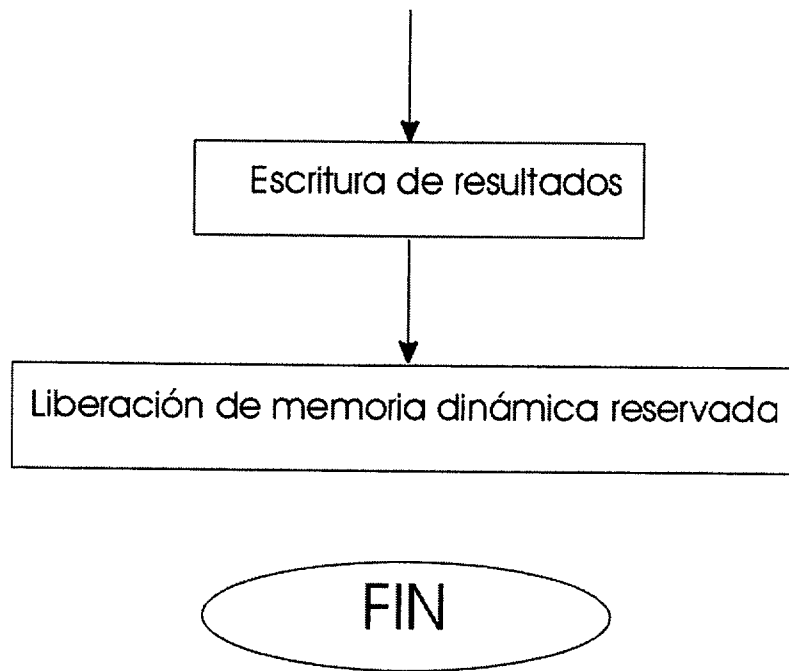


Figura 7.1- Diagrama de flujo de la herramienta que calcula CFIE

[1] J.R. Mautz, R.F. Harrington. "H-Field, E-Field, and Combined Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution", AEU, vol. 32, pags. 159-164. Abril 1978.

[2] G. Antilla, N.G. Alexopoulos. "Scattering from Complex Three-Dimensional Geometries Using a Curvilinear Hybrid Finite-Element-Integral Equation Approach". Optical Society of America, vol. 11, pags. 1445-1457. Abril 1994.

[3] E. García, F. Saez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. "Nueva Aproximación para el Cálculo de la CFIE con Bajo Coste Computacional". *XVIII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*. 4 pags. en CDROM. La Coruña, 10-12 Septiembre 2003.

8. Resultados

En este capítulo se presentan las pruebas realizadas para validar las herramientas desarrolladas. En primer lugar se validará la aproximación de momentos dipolares para la EFIE comparando los resultados del método implementado en dicho programa con medidas y con los resultados del cálculo de la EFIE mediante MoM tradicional, es decir, de forma rigurosa. Se muestran resultados para 5 casos diferentes.

Una vez validada la aproximación, se mostrará la comparación de la memoria utilizada y del tiempo de cálculo entre el cálculo de la EFIE de forma rigurosa y el cálculo mediante la aproximación de momentos dipolares. La comparación se aplicará para el caso de un cubo de 3 lambdas.

La siguiente validación a realizar será la del método de resolución de ecuaciones del SIM-AR. Para ello, se mostrarán los resultados y una comparativa de tiempos y ocupación de memoria para los métodos de EFIE rigurosa resuelta mediante CGM,

EFIE con momentos dipolares resuelta con CGM y EFIE con momentos dipolares resuelta con SIM-AR.

Posteriormente se validará la aproximación de momentos dipolares en las herramientas que calculan la MFIE y la CFIE, en dos situaciones distintas. En primer lugar, utilizando para el cálculo de la MFIE una única cuchilla como función de prueba y posteriormente utilizando las nuevas funciones prueba introducidas.

Para este último caso se mostrará que los resultados son válidos utilizando el método CGM o el método SIM-AR para resolver el sistema algebraico.

8.1.- Validación de la aproximación de momentos dipolares en la EFIE.

A continuación se muestran los resultados en diagrama de radiación para los cortes $\theta=90^\circ$, $\phi=0^\circ$ y $\phi=90^\circ$ para cinco casos diferentes con el objetivo de validar la aproximación de momentos dipolares en la EFIE. En primer lugar se realiza una descripción del caso bajo análisis mostrando en la figura 8.1 la geometría y la situación de las antenas para posteriormente mostrar los resultados en las figuras 8.2, 8.3 y 8.4.

Caso 1:

- Superficie plana de $4.5 \lambda \times 4.5 \lambda$, a una frecuencia de trabajo de 0.3 GHz.

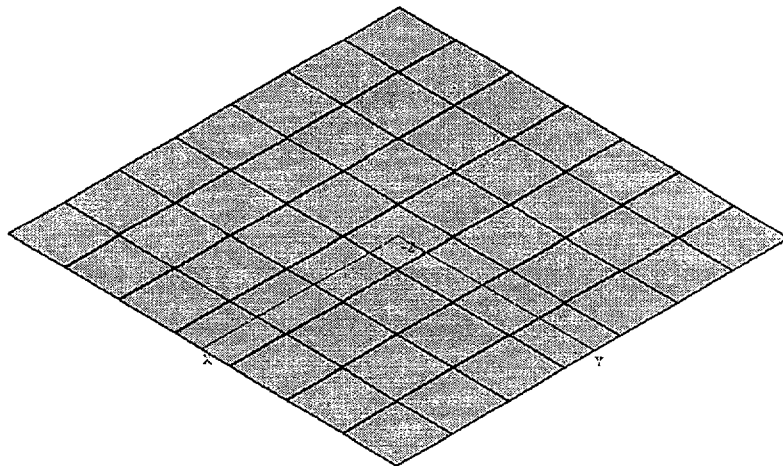


Figura 8.1. Superficie plana de $4.5 \lambda \times 4.5 \lambda$.

- La fuente que se utiliza en este caso es un dipolo eléctrico vertical situado sobre el centro geométrico de la superficie. La distancia del dipolo a la placa es de 0.125λ (situado en la posición 0.0, 0.0, 0.125) y los resultados obtenidos para los cortes:
 - $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360° (figura 8.2).
 - $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.3).
 - $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.4).

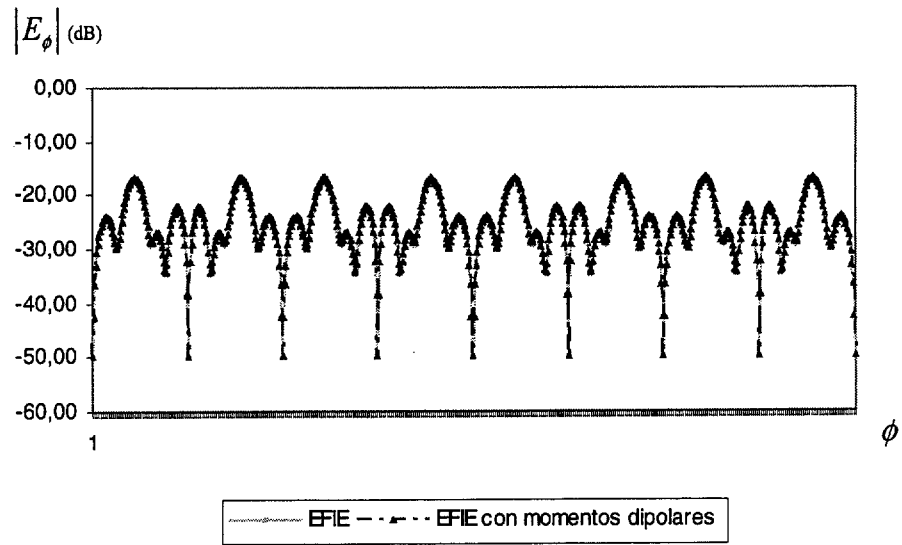


Figura 8.2. Modulo de la componente phi del campo, calculado para el corte $\theta = 90^\circ$,
barriendo ϕ entre 0° y 360°

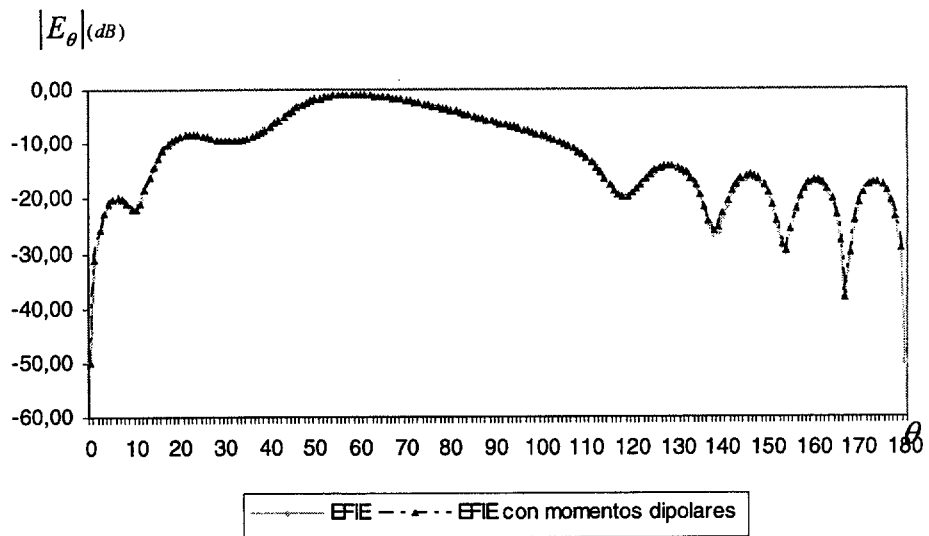


Figura 8.3. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

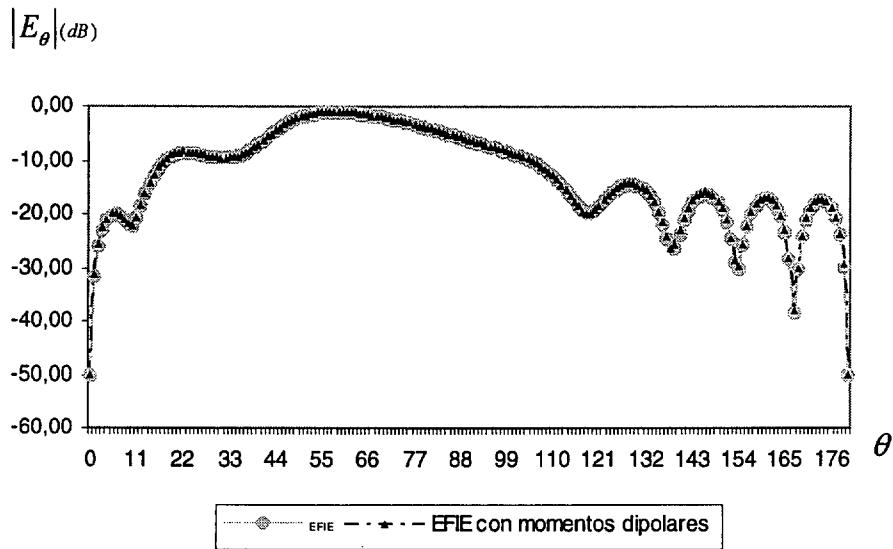


Figura 8.4. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

Se observa que existe coincidencia entre los resultados obtenidos con los dos métodos predictivos en los tres cortes analizados. Con lo cual, la aproximación de momentos dipolares queda validada en cuanto a resultados para este caso. Comentar que la memoria requerida para esta simulación es de 251 Mbytes de memoria con el MoM tradicional y de tan solo 12 Mbytes utilizando la aproximación de momentos dipolares, con lo que queda demostrada la mejora de la aproximación de MD en cuanto a necesidad de memoria.

Caso 2:

- Superficie plana de $4.95 \lambda \times 4.95 \lambda$, a una frecuencia de trabajo de 3.96 GHz.

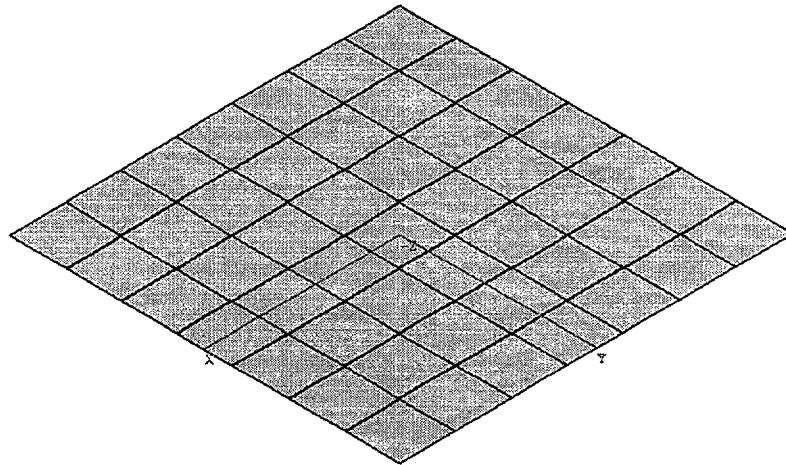


Figura 8.5. Superficie plana de $4.95 \lambda \times 4.95 \lambda$.

- En esta simulación, la alimentación es un dipolo magnético con orientación horizontal según $\theta=90^\circ$ y $\phi=90^\circ$, es decir, paralelo a la placa con dirección el eje y situado sobre el centro de la placa. La distancia del dipolo a la placa es de 0.126λ (situado en la posición $0.0, 0.0, 9.4697e-3$). Se muestran los resultados obtenidos para los cortes:
 - $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360° (figura 8.6).
 - $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.7).
 - $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.8).

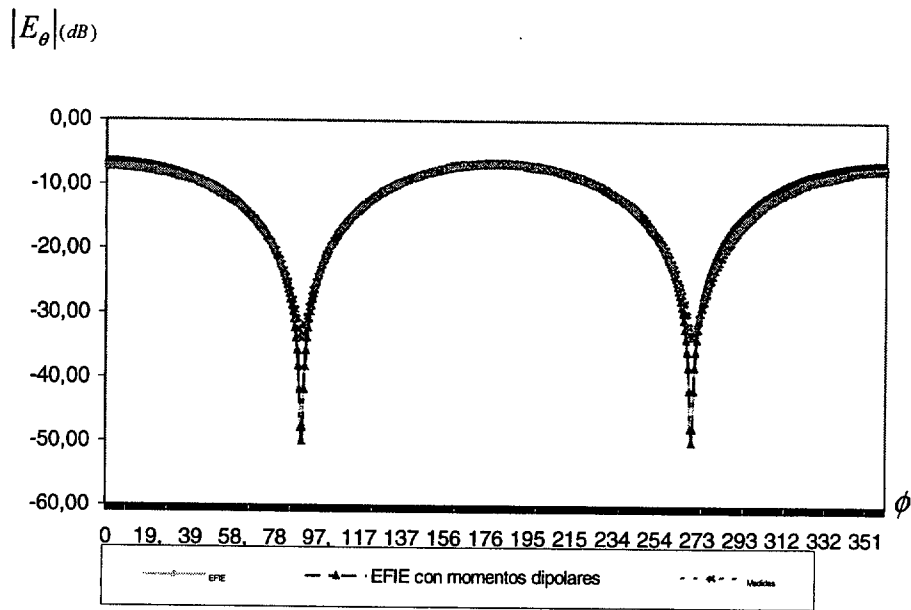


Figura 8.6. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\theta = 90^\circ$,
barriendo ϕ entre 0° y 360°

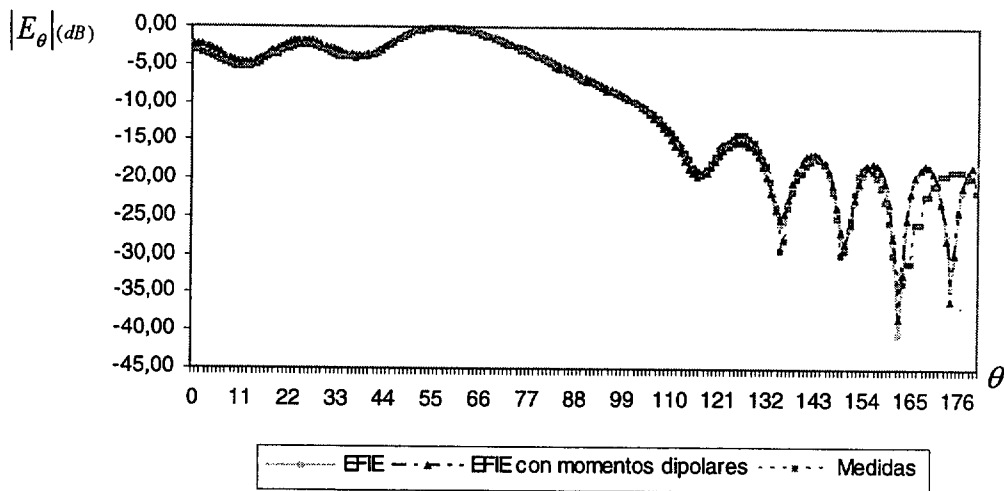


Figura 8.7. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

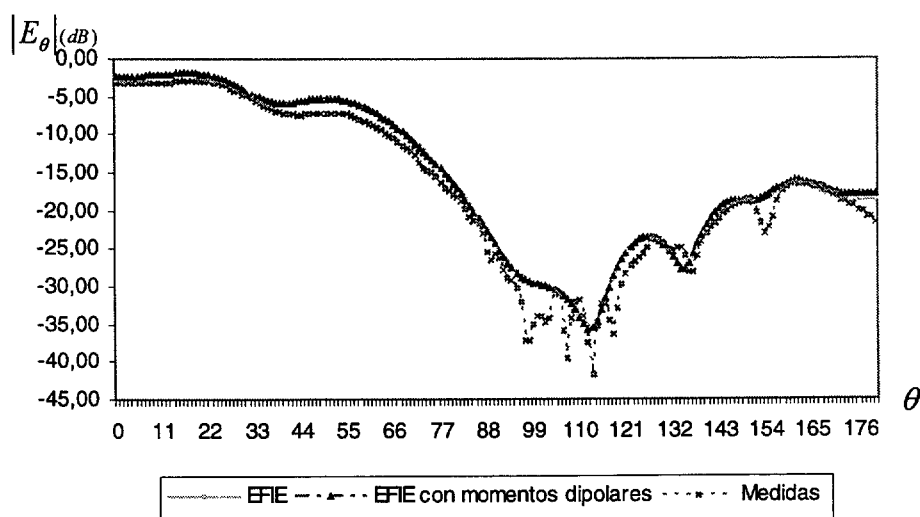


Figura 8.8. Módulo de la componente phi del campo, calculado para el corte $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

Como se puede observar, en este caso sigue existiendo una buena coincidencia entre ambos métodos predictivos, MoM tradicional y MoM con MD en todos los cortes. También se puede concluir que los resultados obtenidos siguen fielmente a las medidas que se realizaron de este caso, en los rangos angulares en los que la contribución (módulo de campo eléctrico) es mayor. Existen diferencias entre resultados y medidas en los rangos en los que la contribución es menor, pero estas son poco significativas en relación al valor máximo del módulo de campo. Con lo cual, se puede concluir que la aproximación queda validada tanto con otros métodos predictivos como con medidas reales. Si se realiza una comparación de necesidad de memoria entre ambos métodos predictivos, ésta arroja un valor de 385 Mbytes para MoM contra 15 Mbytes el MoM con MD.

Caso 3:

- Superficie plana de $3.5833 \lambda \times 3.5833 \lambda$, a una frecuencia de trabajo de 1.075 GHz.

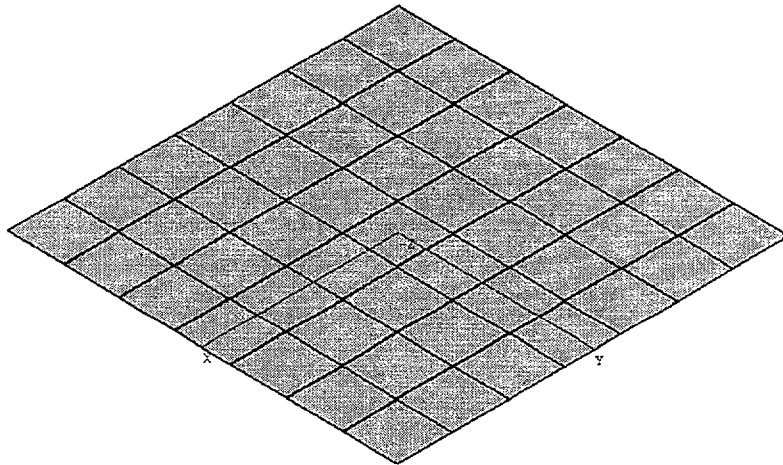


Figura 8.9. Superficie Plana de $3.5833 \lambda \times 3.5833 \lambda$.

- En este caso, la alimentación son dos dipolos eléctricos situados con distinta inclinación con respecto al vector normal a la superficie. Esta disposición asegura que los resultados según el corte $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$ no son iguales. La distancia de los dipolos a la placa es de 0.0908λ (situado en la posición $-1.18383e-2, 9.97069e-4, 1.74236e-2$) y 0.1303λ (situado en la posición $1.60988e-2, 9.95406e-4, 3.25818e-2$), respectivamente y los resultados obtenidos para los cortes:
 - $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360° (figura 8.10).
 - $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.11).
 - $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.12).

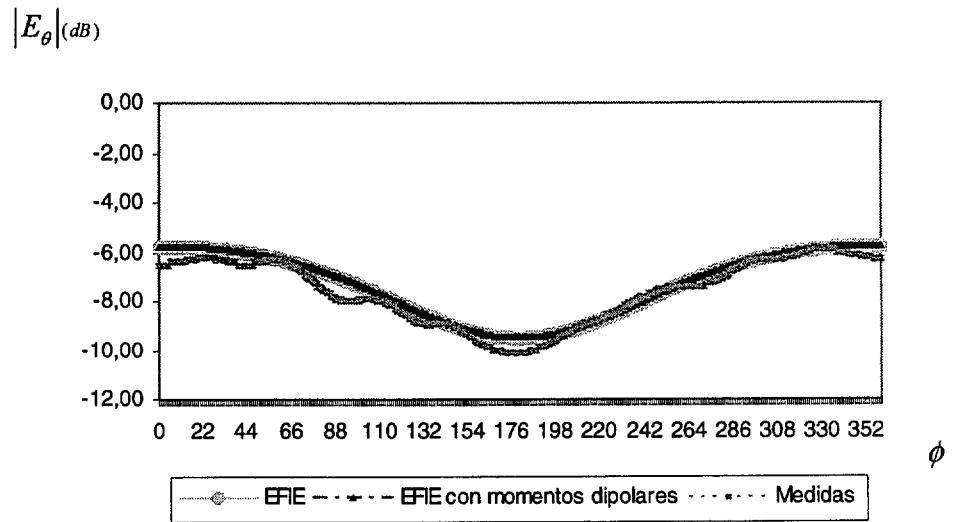


Figura 8.10. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\theta = 90^\circ$,
barriendo ϕ entre 0° y 360°

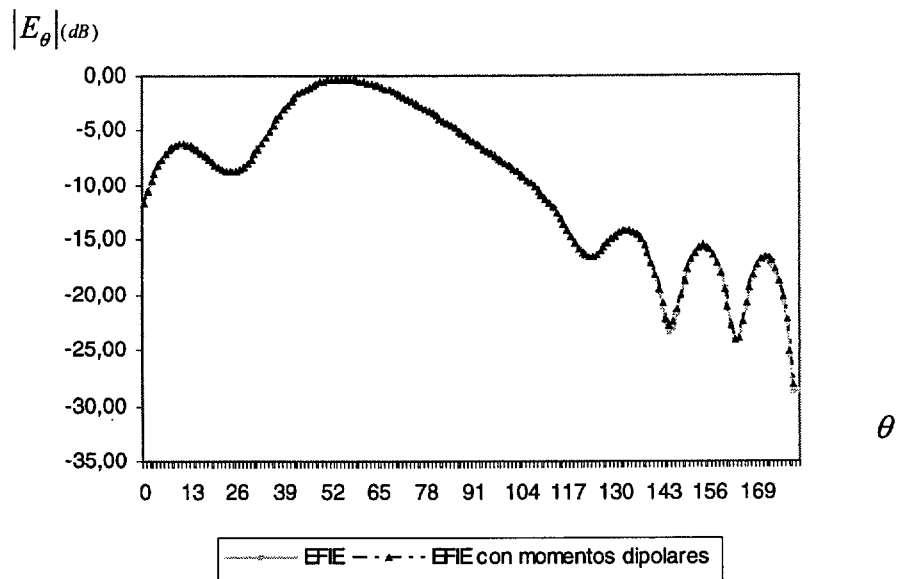


Figura 8.11. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

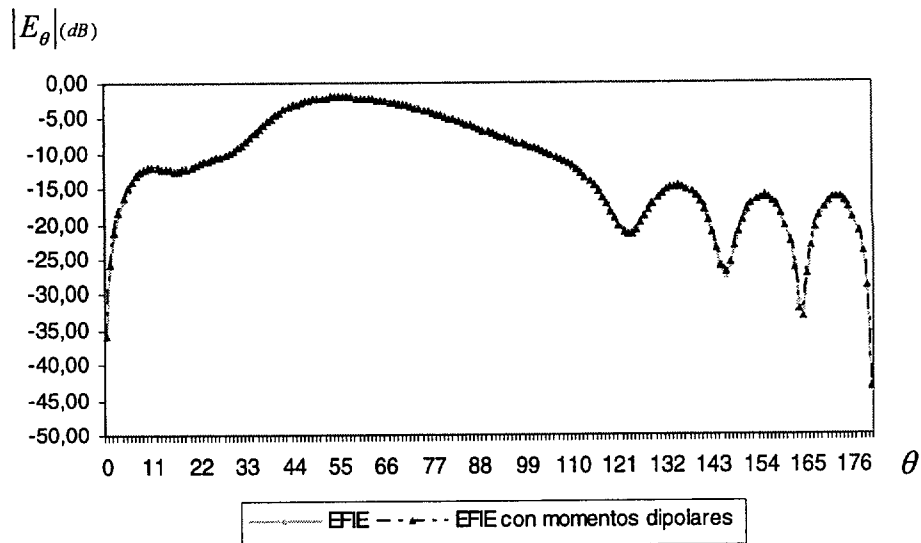


Figura 8.12. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

Las conclusiones que se pueden extraer de esta simulación son las mismas que las obtenidas en las simulaciones anteriores. Por un lado existe una buena coincidencia de resultados, y por otro lado, la necesidad de memoria es mucho menor con la aproximación de MD que con el MoM tradicional. Lo novedoso de este caso es que las herramientas tienen un buen comportamiento ante la utilización de diversas fuentes de alimentación simultáneamente.

Caso 4:

- Superficie curva con forma de “teja”. Se trata de un cuarto de cilindro con un radio de curvatura de 0.5 lambdas y con una longitud en la generatriz del cilindro de 21.5 lambdas.

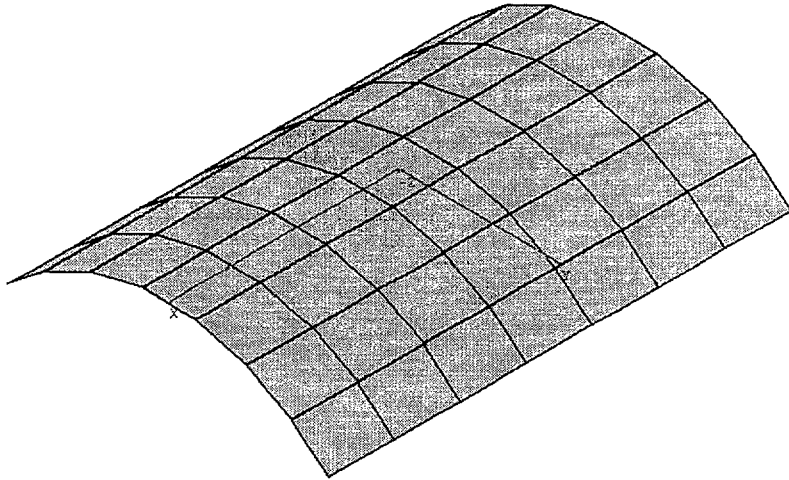


Figura 8.13. Superficie Curva con forma de Teja.

- Con este caso se muestra la validez de las herramientas desarrolladas para casos modelados con superficies NURBS curvas, iluminadas con varias fuentes de alimentación, en nuestro caso, dipolos eléctricos. La distancia de los dipolos a la superficie es de 0.0908λ , a una frecuencia de trabajo de 1.075 GHz (situado en la posición $-1.18383e-2, 9.97069e-4, 1.74236e-2$) y 0.1303λ (situado en la posición $1.60988e-2, 9.95406e-4, 3.25818e-2$), respectivamente y los resultados obtenidos para los cortes:
 - $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360° (figura 8.14).
 - $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.15).
 - $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.16).

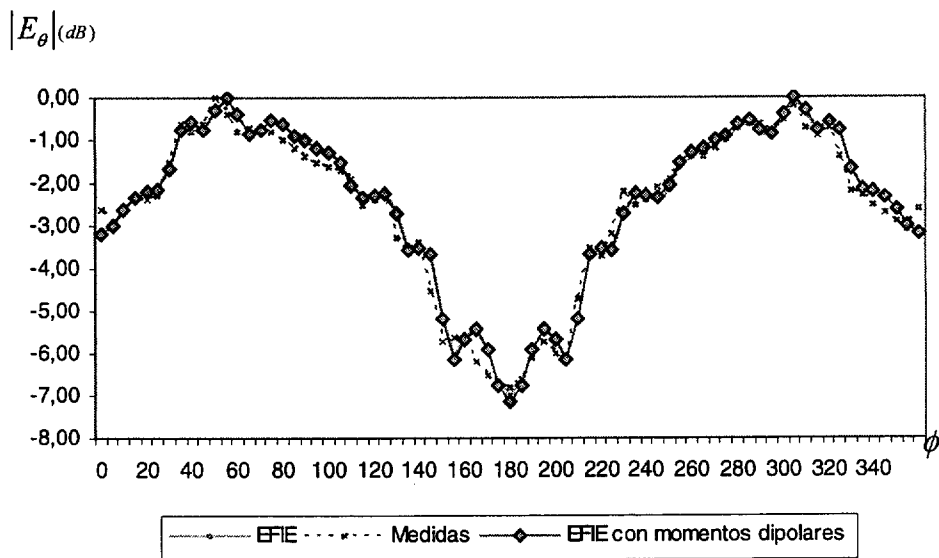


Figura 8.14. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\theta = 90^\circ$,
barriendo ϕ entre 0° y 360°

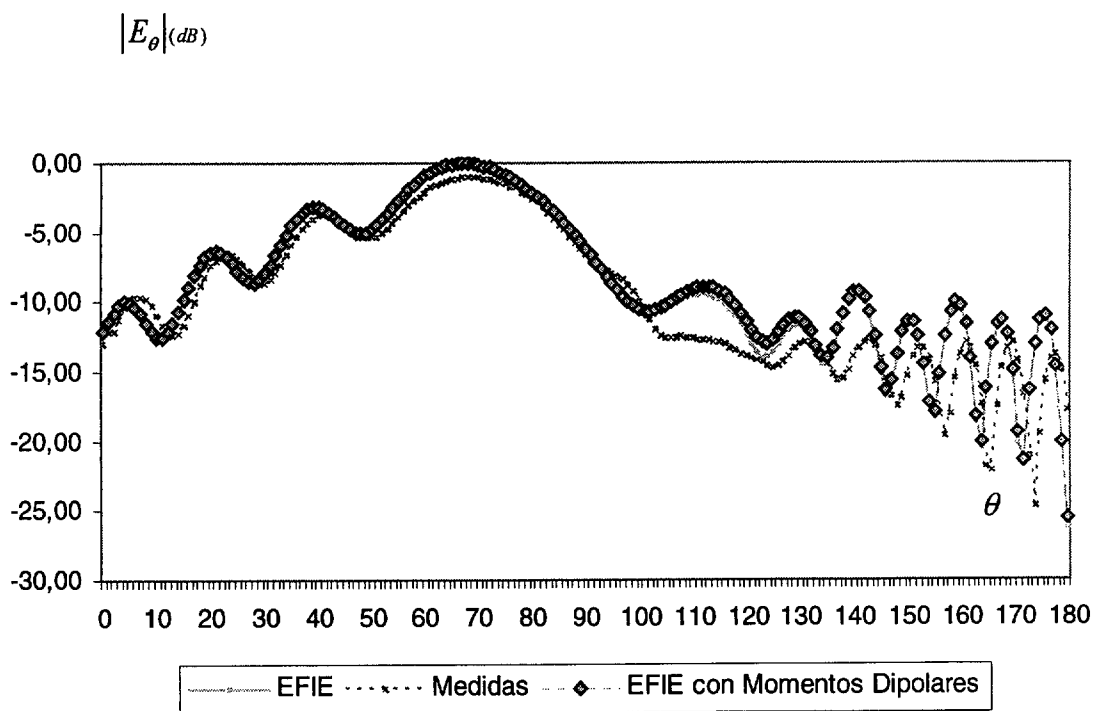


Figura 8.15. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

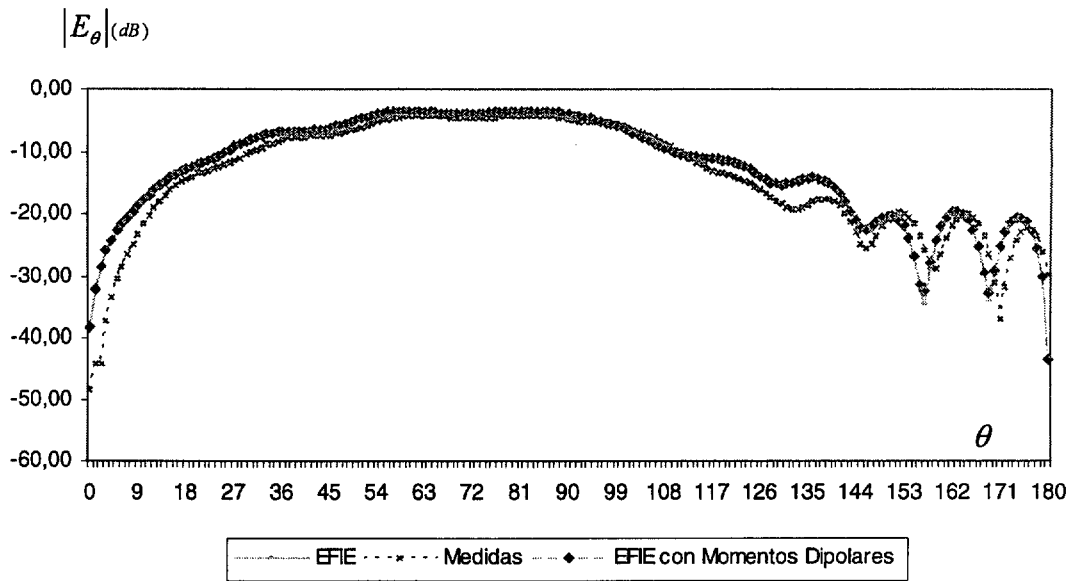


Figura 8.16. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

Como se puede observar, al igual que se menciona en los casos anteriores, en el presente sigue existiendo una buena coincidencia entre ambos métodos predictivos, MoM tradicional y MoM con MD en todos los cortes. También se puede concluir que los resultados obtenidos siguen fielmente a las medidas que se realizaron de este caso, en los rangos angulares en los que la contribución (módulo de campo eléctrico) es mayor. Existen diferencias entre resultados y medidas en los rangos en los que la contribución es menor, pero estas son poco significativas en relación al valor máximo del módulo de campo. Con lo cual, se puede concluir que la aproximación queda validada tanto con otros métodos predictivos como con medidas reales también para superficies modeladas mediante NURBS curvas y con varias fuentes de alimentación. Si se realiza una comparación de necesidad de memoria entre ambos métodos predictivos, ésta arroja un valor de 1490 Mbytes para MoM contra 99 Mbytes el MoM con MD.

Caso 5:

- Superficie curva, con forma de “teja”. Se trata de una superficie con las mismas características que en el caso anterior

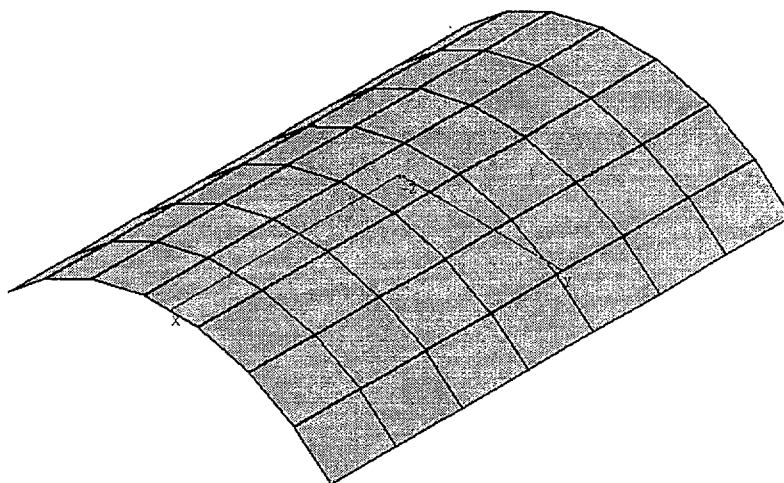


Figura 8.17. Superficie curva con forma de teja

- La distancia del dipolo a la superficie es de 0.125λ , a una frecuencia de trabajo de 1.075 GHz (situado en la posición 0.0, 0.0, $3.488372e-2$) y los resultados obtenidos para los cortes:
 - $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360° (figura 8.18).
 - $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.19).
 - $\phi = 90^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° (figura 8.20).

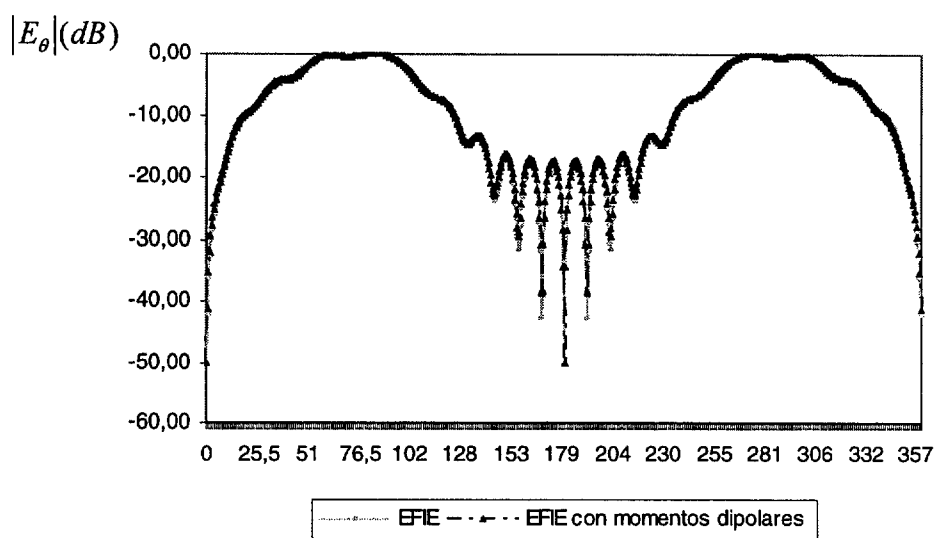


Figura 8.18. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\theta = 90^\circ$, barriendo ϕ entre 0° y 360°

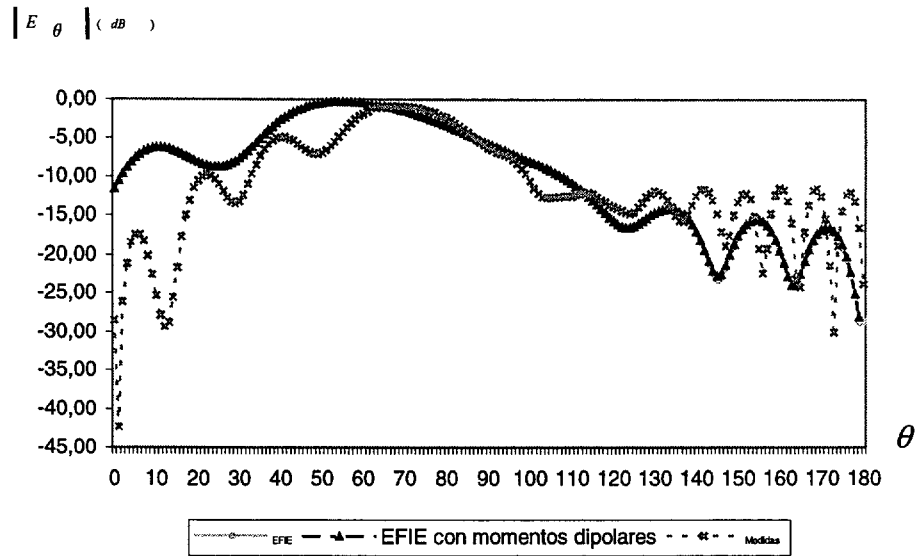


Figura 8.19. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

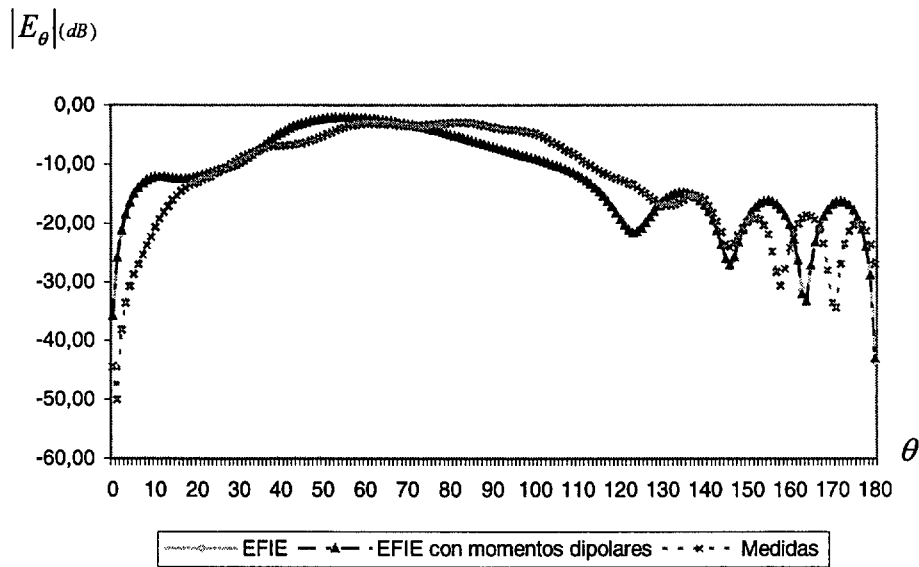


Figura 8.20. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 90^\circ$,
barriendo θ entre 0° y 180°

Al igual que en los casos mostrados, se observa que los resultados obtenidos mediante la aproximación de momentos dipolares tienen gran similitud con los obtenidos con la EFIE y se aproximan bastante fielmente a las medidas, con lo cual queda validada la aproximación. Una vez validada veamos las ventajas en cuanto a reducción de memoria y el comportamiento en cuanto a tiempos de cálculo.

8.2.- Comparación de coste computacional entre EFIE rigurosa y la aproximación de momentos dipolares

A continuación se analiza el caso de un cubo de 3 lambdas de lado iluminado mediante un dipolo eléctrico situado a una distancia de un octavo de lambda del centro de la superficie superior del cubo.

El método utilizado para la resolución del sistema algebraico es el CGM en esta comparativa. También se considera que, para el caso de la EFIE con momentos dipolares, los acoplos se comienzan a calcular mediante la aproximación a partir de una distancia superior a 1.0 lambdas.

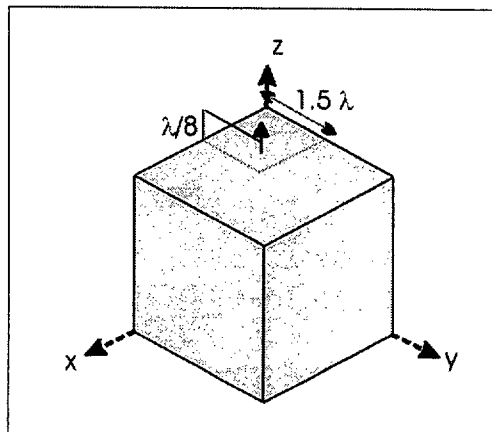


Figura 8.21. Cubo de 3 lambdas

- La distancia del dipolo a la cara superior es de 0.125λ , a una frecuencia de trabajo de 0.3 GHz (situado en la posición 1.5, 1.5, 3.125) y los resultados obtenidos para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° son:

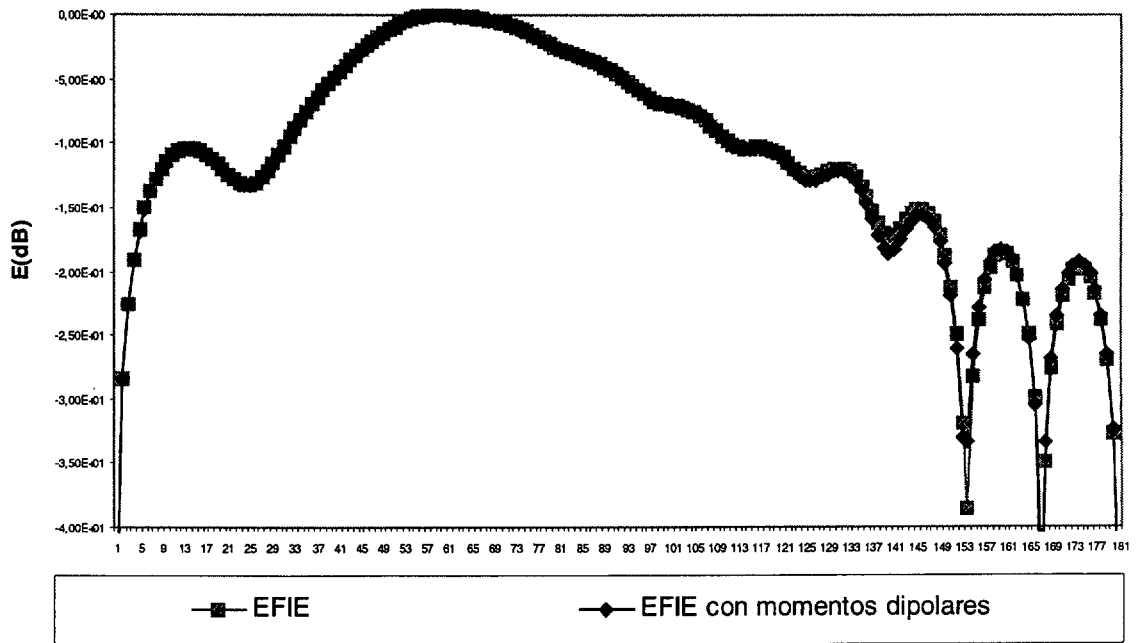


Figura 8.22. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

A continuación se muestra una comparativa de tiempos para el cálculo del operador, de tiempo utilizado para la resolución del sistema de ecuaciones algebraico y de la memoria utilizada para ambos métodos:

	<i>MONURBS</i>	<i>EFIE con MD</i>
<i>Tiempo de calculo de la matriz</i>	<i>5h 55' 36"</i>	<i>1h 44' 10"</i>
<i>Tiempo de resolución del sistema</i>	<i>15h 47' 13"</i>	<i>99h 39' 20"</i>
<i>Tiempo total</i>	<i>21h 58' 33"</i>	<i>101h 41' 10"</i>
<i>Utilización de memoria</i>	<i>1,484 Gbytes</i>	<i>99,87 Mbytes</i>

Tabla 8.1.- Cubo de 3λ

Analizando los datos de la tabla 8.1 se observa una reducción de la memoria necesaria para la resolución del caso de aproximadamente 15 veces utilizando la aproximación de momentos dipolares. Si se comenzase a aplicar la aproximación a distancias menores a 1.0 lambdas la memoria se reduciría mucho más.

Con esta reducción de memoria se consigue que un ordenador personal de no muy altas prestaciones se pueda ejecutar este caso, ya que la necesidad en memoria es inferior a los 100 Mbytes, y con una RAM de 64 Mbytes y con memoria virtual adecuadamente configurada se podría ejecutar. Con la EFIE rigurosa se necesitaría una memoria total de 1.484 Gbytes, con lo cual se necesitaría una potente máquina para resolverlo. Hemos conseguido con esta nueva herramienta que casos que antes era imposible de ejecutar salvo en potentes máquinas que no están al alcance de todos, se puedan ejecutar en PC de bajas prestaciones.

La contrapartida de esta ventaja es que el tiempo empleado en la resolución del sistema de ecuaciones algebraico es del orden de 7 veces superior en esta nueva herramienta para el caso bajo estudio, lo cual hace que el proceso sea más lento.

La solución para mejorar el tiempo de resolución de las ecuaciones está en utilizar otro método de resolución que se adecue más a la utilización de la aproximación de los momentos dipolares. Este método es el SIM-AR, y se verán sus resultados en el siguiente apartado.

8.3.- Comparación entre método CGM y SIM en la aproximación de momentos dipolares

A continuación se analiza el caso de un cuarto de cilindro de 21,5 λ de largo iluminado mediante dos dipolos eléctricos situados sobre la superficie de la geometría.

El método utilizado para la resolución del sistema algebraico es el CGM y el SIM en esta comparativa. También se considera que, para el caso de la EFIE con momentos dipolares, los acoplos se comienzan a calcular mediante la aproximación a partir de una distancia superior a 1.0 λ .

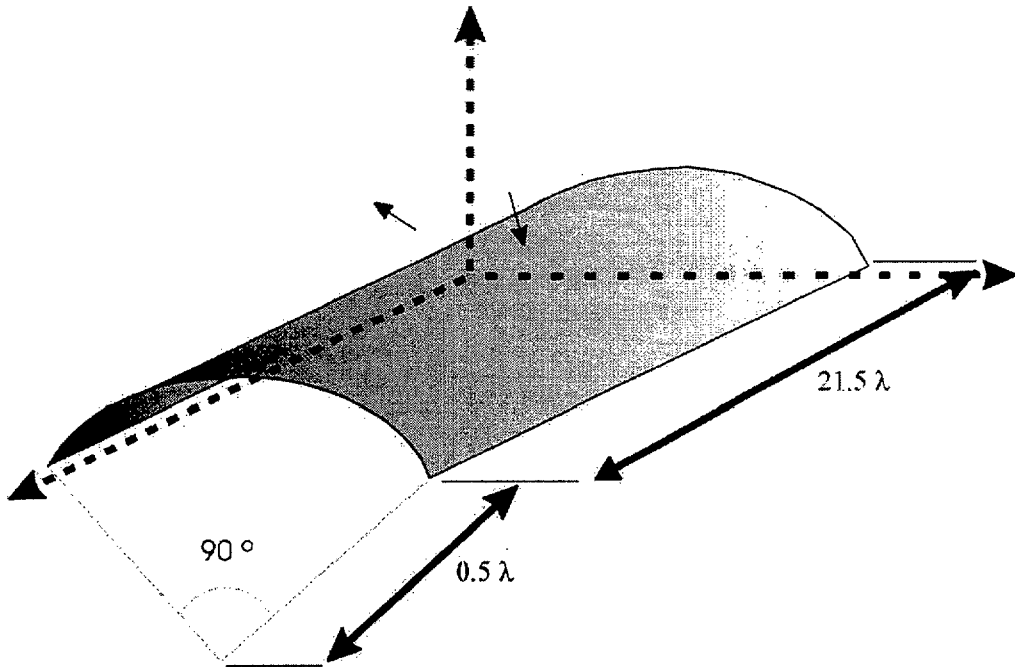


Figura 8.23. Superficie con forma de teja

- La distancia de los dipolos a la placa es de 0.0908λ , a una frecuencia de trabajo de 1.075 GHz (situado en la posición $-1.18383e-2, 9.97069e-4, 1.74236e-2$) y 0.1303λ (situado en la posición $1.60988e-2, 9.95406e-4, 3.25818e-2$), respectivamente y los resultados obtenidos para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° son:

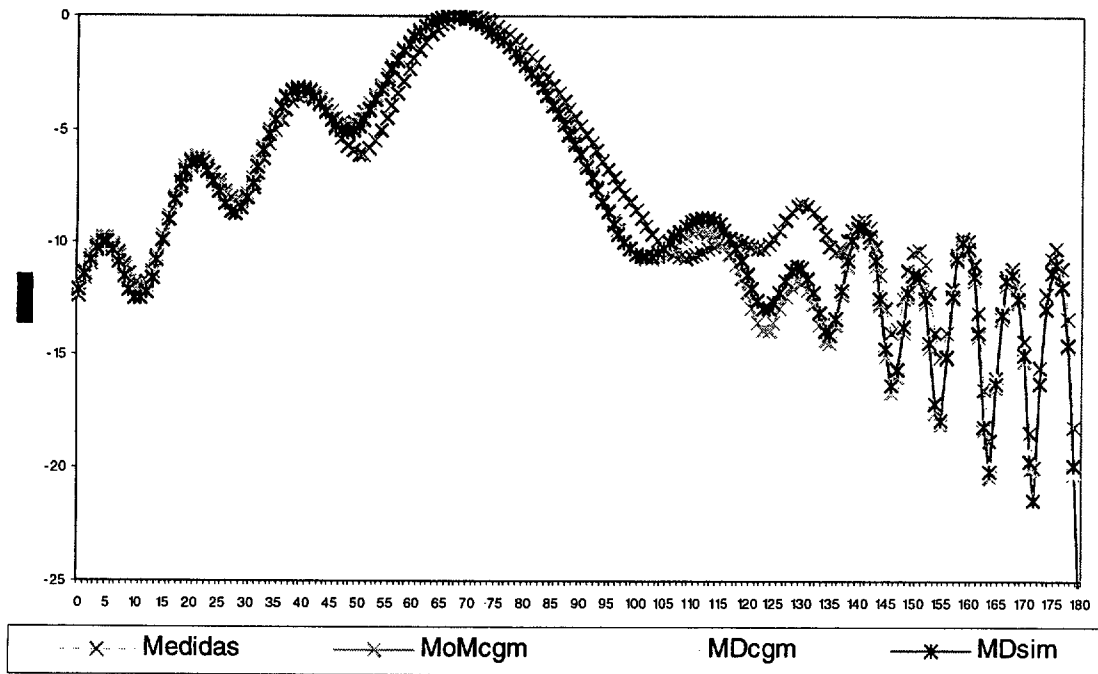


Figura 8.24. Modulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

A continuación se muestra una comparativa de tiempos para el cálculo del operador, de tiempo utilizado para la resolución del sistema de ecuaciones algebraico y de la memoria utilizada para todos métodos:

	<i>MONURBS</i>	<i>EFIE MDcgm</i>	<i>EFIE MDsim</i>
<i>Tiempo calculo matriz</i>	23h 40' 23"	2h 37' 7"	2h 37' 7"
<i>Tiempo resolución sistema</i>	56h 48' 20"	186h 41' 44"	9h 12' 31"
<i>Tiempo total</i>	80h 58' 55"	189h 36' 4"	12h 7' 5"
<i>Utilización de memoria</i>	1,095 Gbytes	76,00 Mbytes	76,00 Mbytes

Tabla 8.2.- Teja de 21.5λ

Analizando estos resultados se puede observar varios aspectos. En primer lugar, y como quedó demostrado en el apartado anterior, la reducción de memoria de ejecución en un orden próximo a las 15 veces. Pero lo que destaca en este caso es la espectacular reducción en tiempo de resolución del sistema que logra el método SIM-AR respecto al CGM. Esta reducción está del orden de 20 veces. Se concluye, pues, que

el método SIM-AR es adecuado a la resolución del sistema algebraico del método de los momentos cuando se utiliza la aproximación de momentos dipolares.

8.4 Comparación entre MoM tradicional con CGM y MD con SIM-AR

En este apartado se van a comprobar las dos mejoras introducidas en la nueva herramienta y que son objeto de la presente tesis. Estas son ahorro de memoria respecto a MoM tradicional y disminución de tiempo de cálculo del método SIM-AR respecto al método CGM. Para ello vamos a simular y analizar el caso de un diedro de 4 lambdas de lado.

El caso bajo análisis se trata de dos placas cuadradas situadas perpendicularmente entre sí formando un diedro. La longitud del lado de ambas placas es de 4 lambdas. La figura 8.25 muestra la geometría del presente caso.

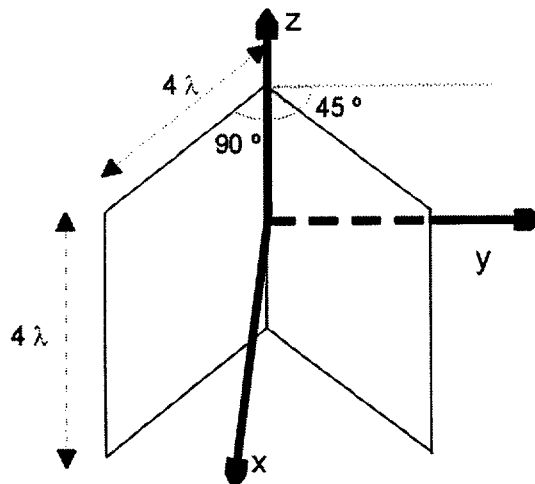


Figura 8.25.- Geometría de un diedro perpendicular de 4λ de lado

El dipolo está situado sobre el eje x a una distancia de 2λ respecto al punto medio de la arista que forman las dos superficies (origen de coordenadas en esta geometría).

Los resultados de campo eléctrico obtenidos con MoM tradicional tanto con CGM como con el SIM-AR, así como los de MD también con ambos métodos de resolución de ecuaciones, para el corte $\theta=0^\circ$ son los que se muestran en la figura 8.26.

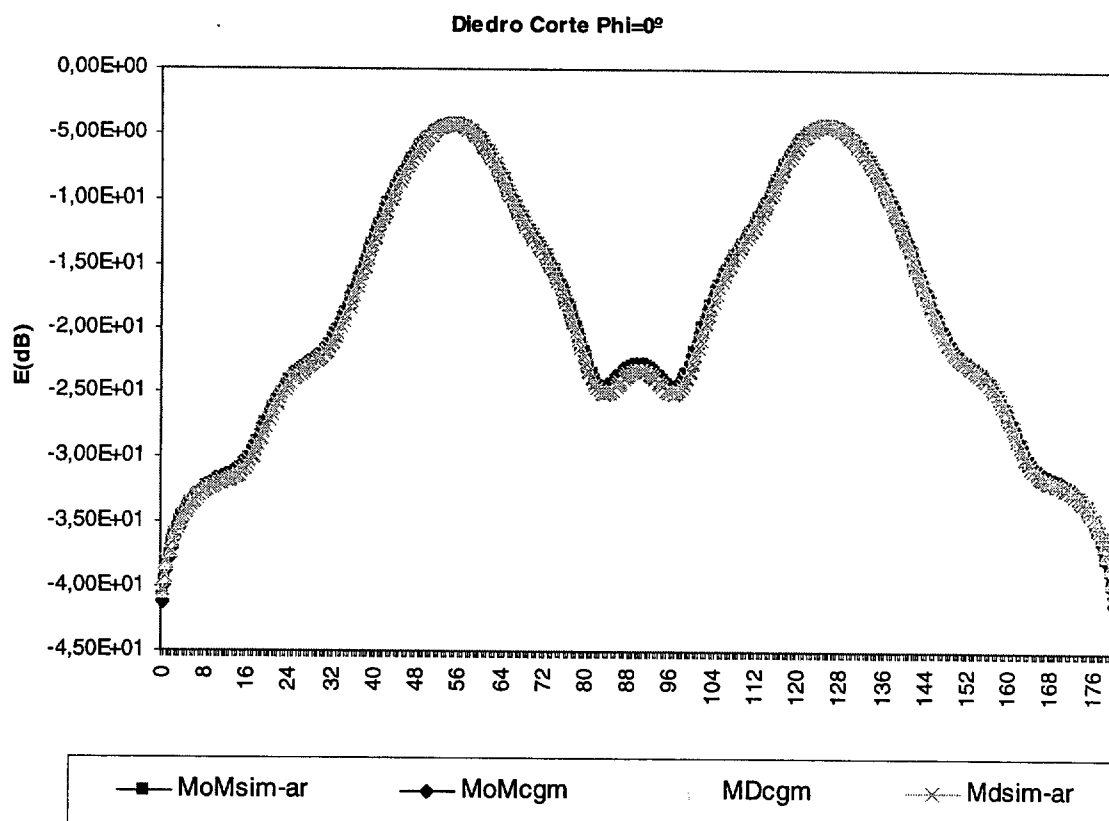


Figura 8.26.- Corte $\phi=0^\circ$ para el diedro de 4λ de lado

La comparación en cuanto a tiempo de ejecución de ambos métodos de resolución de ecuaciones para esta simulación es la que se muestra en la tabla 8.3.

	<i>MoMcgm</i>	<i>MoMsim</i>	<i>MDcgm</i>	<i>MDsim</i>
<i>Tiempo calculo Z</i>	1h 41' 10"	1h 39' 33"	0h 47' 02"	0h 47' 0"
<i>Tiempo solución</i>	8h 38' 45"	0h 33' 17"	56h 3' 29"	2h 40' 16"
<i>Tiempo total</i>	10h 45' 29"	2h 28' 14"	57h 6' 1"	3h 42' 41"
<i>Memoria</i>	1,347 Gb.	1,347 Gb.	86,6 Mb.	86,6 Mb.

Tabla 8.3.- Diedro de 4λ

Se observa en la figura 8.26 una buena coincidencia entre las cuatro herramientas. Analizando la comparación mostrada en la tabla 8.3 se observa una importante reducción de necesidad de memoria entre el MoM tradicional y la técnica de Momentos Dipolares, como ya se comprobó en los apartados 8.2 y 8.3. En este caso, la reducción es de casi 16 veces.

También como se demostró en el capítulo 8.3, se observa una reducción de necesidad de memoria de cálculo entre el SIM y el CGM, tanto a la hora de resolver mediante MoM tradicional como con la aproximación de Momentos dipolares.

También se observa, comparando MoMsim con MDsim, que el tiempo de ejecución es menor en el primero. Esto es debido a que, en MoMsim, al ejecutar cada iteración, el acoplo se tiene ya calculado y almacenado, mientras que con MDsim hay que calcularlo en cada iteración. Eso se refleja en la cantidad de memoria que emplean ambos métodos, que es muy inferior en MDsim.

Como conclusión se puede afirmar que la aproximación de Momentos Dipolares en combinación con el Método SIM-AR mejora el coste computacional del Método de los Momentos tanto en necesidad de memoria como en tiempo de ejecución.

8.5.- Validación de MFIE y CFIE con la aproximación de momentos dipolares

Para realizar esta validación se va a comparar los resultados obtenidos con un cubo de 1λ con un dipolo vertical situado a una distancia de media longitud de onda sobre el centro de la cara superior.

En una primera comparación se va a utilizar para la MFIE las funciones prueba del SIMCOR inicial, es decir, una única cuchilla. En la CFIE, en la parte del cálculo del acoplo de MFIE también inicialmente se utilizará esta función prueba.

Las herramientas utilizadas en la comparación usan todas la aproximación de momentos dipolares (MD) y se compararán entre sí. El parámetro de combinación de la CFIE se elige 0.5 y la distancia a partir de la cual tomar la aproximación de momentos dipolares se elige de 1.0 lambdas.

- La distancia del dipolo a la cara superior es de 0.5λ , a una frecuencia de trabajo de 0.3 GHz (situado en la posición 0.5, 0.5, 1.5) y los resultados obtenidos para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180° son:

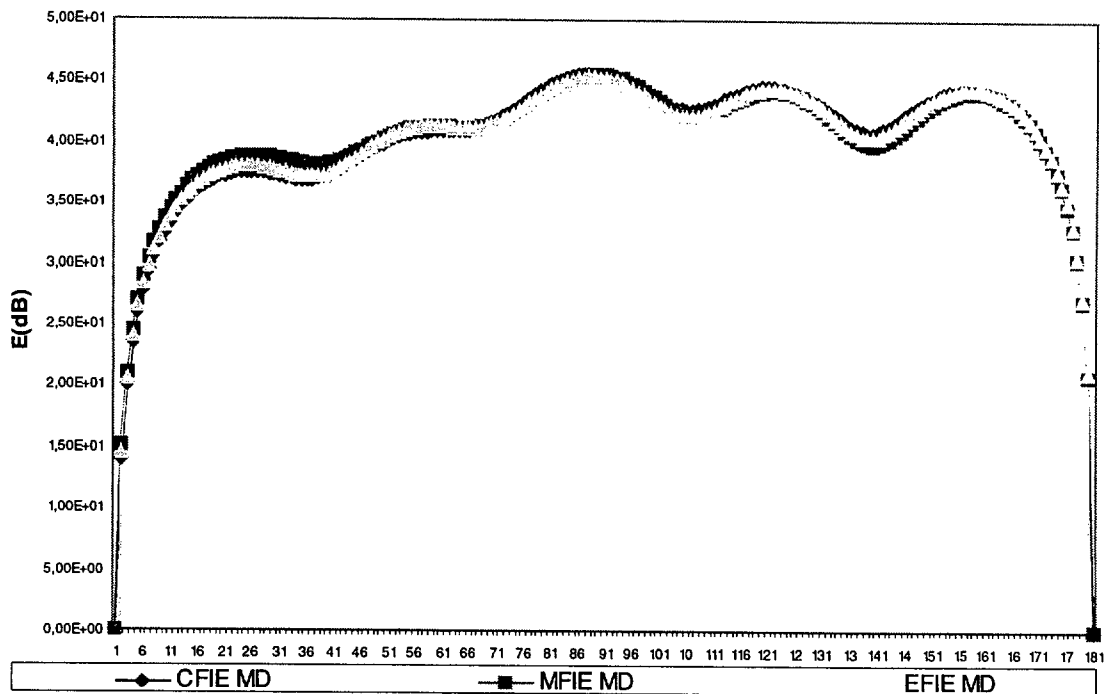


Figura 8.27. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

En el apartado 8.1 quedó validada la aproximación de MD aplicada a la resolución de la EFIE. Se observa en la figura 8.27 una buena coincidencia de esta herramienta con la aproximación de MD aplicada a la resolución de la MFIE y CFIE,

con lo cual se concluye que estas últimas herramientas son válidas. En cuanto a necesidad de memoria, al utilizar las tres la aproximación de MD, la ocupación que precisan es igual para todas. Como es lógico, el tiempo empleado para el cálculo de la matriz Z_s en la CFIE es mayor que en MFIE y EFIE, debido a que necesita calcular dos acoplos (magnético y eléctrico) en lugar de uno solo. Como se dijo en la introducción del caso, las funciones pruebas utilizadas para el cálculo de la parte magnética del acoplo son la simple cuchilla. Se demostró en el capítulo de Método de los Momentos, que esta función puede dar problemas para ciertos casos. Por eso, a continuación se muestra el mismo caso pero utilizando como función prueba la doble cuchilla.

La figura 8.28 recoge, pues, los resultados que se obtienen utilizando en MFIE y en la parte del acoplo magnético de la CFIE las nuevas funciones prueba utilizadas, es decir, la doble cuchilla. Para la CFIE se ha variado el parámetro de combinación entre cinco valores, que son 0.0 (es EFIE únicamente), 0.2, 0.5, 0.8 y 1.0 (es MFIE únicamente). El método de resolución del sistema de ecuaciones es el CGM.

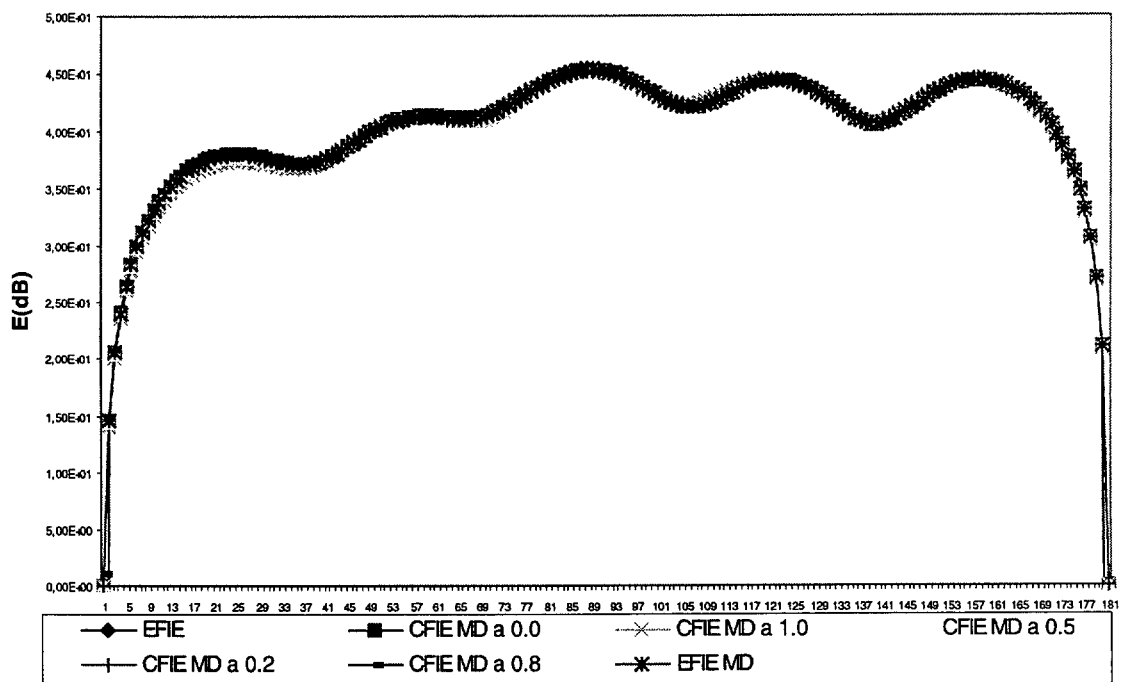


Figura 8.28. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

Se observan una buena coincidencia entre los resultados de la EFIE y la CFIE con distintos valores de alfa, así como con los resultados que se obtienen utilizando la función prueba de simple cuchilla para la parte magnética del acoplo. Se puede concluir, por tanto, la validez de la función prueba de doble cuchilla para todas las herramientas.

A continuación se muestran los resultados para el mismo caso pero utilizando como método de resolución de ecuaciones el SIM-AR. Se observa que los resultados son muy similares, y que hay una buena coincidencia con los que se muestran en la figura 8.29, en la cual el método de resolución es el CGM. Con lo cual quedan validado este método de resolución de ecuaciones para todas las herramientas realizadas.

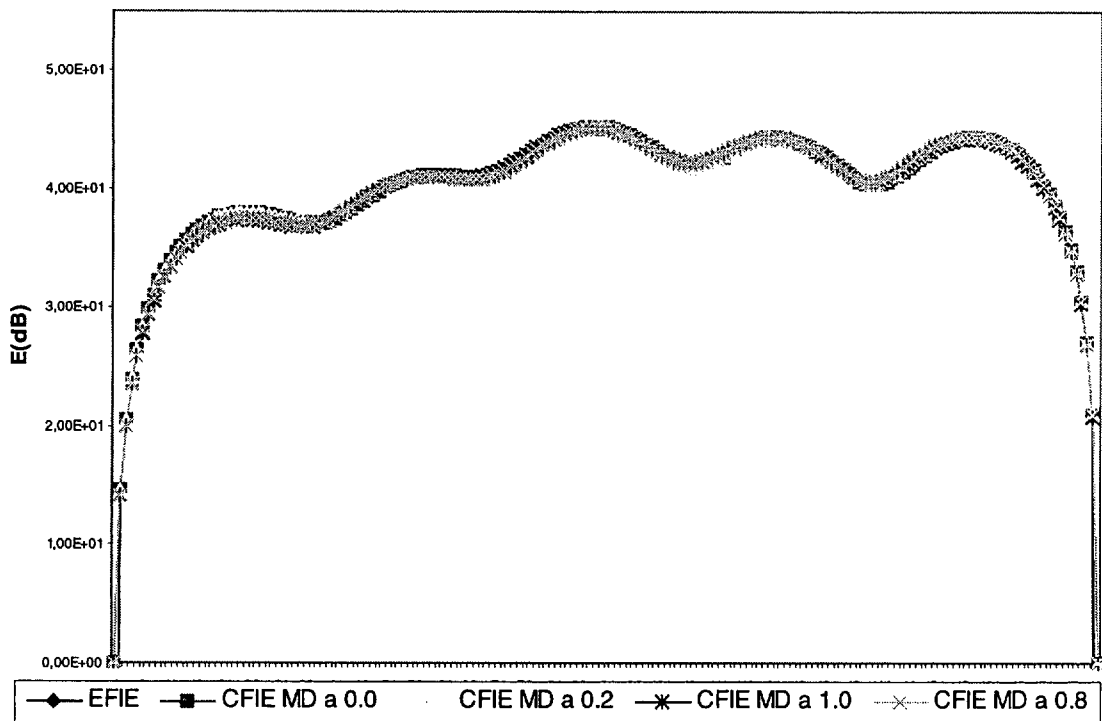


Figura 8.29. Módulo de la componente theta del campo, calculado para el corte $\phi = 0^\circ$, barriendo θ entre 0° y 180°

9. Conclusiones

A lo largo de esta tesis se han conseguido mejorar las prestaciones de un programa basado en el Método de los Momentos que se aplica para el análisis de *scattering* y de antenas embarcadas sobre estructuras de forma arbitraria.

9.1.- Conclusiones

Cuando queremos analizar un caso con muchas incógnitas, los principales problemas que nos encontramos en un programa basado en el MoM, son la etapa de cálculo de la matriz de acoplos y la etapa de resolución del sistema de ecuaciones. En este ámbito se enmarca la aportación de esta tesis, puesto que propone emplear la aproximación de Momentos Dipolares y aproximación FMM [1] para solucionar el primer problema y combinarlo con nuevos métodos iterativos para solucionar el segundo problema.

Esta combinación se ha mostrado muy efectiva puesto que si tenemos N incógnitas, la aproximación de Momentos Dipolares consigue reducir el tamaño total efectivo de la matriz de impedancias de N^2 a $Ns^2 + N$ y, si se utiliza la FMM se logra reducir a $N^{3/2}$ [1]. Esta ventaja, aparte de ser una reducción importante porque una matriz más pequeña supone hacer uso de menos memoria y tardar menos tiempo en calcularla, también favorece la velocidad de convergencia de los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones, que tienen su cuello de botella precisamente en la realización de productos matriz-vector.

Por otro lado, el método iterativo seleccionado, el *SIM-AR*, parece especialmente indicado para su combinación con la aproximación de Momentos Dipolares puesto que necesita hacer uso de una matriz esparcida y una matriz completa que esta aproximación ya ofrece de forma natural. Además estas matrices ofrecidas han resultado óptimas en el sentido de que, tal y como hemos visto en el capítulo de resultados, provocan que el *SIM-AR* converja en muy pocas iteraciones y muy rápido.

Sin embargo no olvidemos que los cambios introducidos se traducen en mejoras únicamente cuando hay que analizar casos grandes, porque tal y como ha mostrado el capítulo de resultados, para casos con no demasiadas incógnitas MONURBS se ha reafirmado como la eficaz herramienta que es.

En cuanto a la comparación entre las herramientas en función de la ecuación a resolver (EFIE, MFIE o CFIE) [2], se observa que, por norma general, todas ellas obtienen resultados similares, y necesitan la misma cantidad de memoria para su ejecución. La diferencia podría estar únicamente en los tiempos necesarios para cada simulación. Señalar que la CFIE es la que mayor tiempo emplea en el cálculo del operador ya que debe calcular por cada par de subdominios acoplados dos expresiones, que son la de la EFIE y la de la MFIE. En cuanto la resolución del sistema de ecuaciones, hay que destacar que, por norma general y en los casos analizados, la EFIE necesita más iteraciones para la resolución que la MFIE. También se debe señalar que, cuando se utiliza el método de la aproximación de momentos dipolares con *SIM-AR*, la EFIE precisa que la distancia a partir de la cual se deba considerar la aproximación, por norma general, sea mayor que la que se emplea en la MFIE.

9.2.- Futuras líneas de trabajo

Existen varios caminos por los que continuar con este trabajo con el objetivo de seguir mejorando sus prestaciones o de dotarle de mayores facilidades y flexibilidad en el cálculo. A continuación se detallan unas de ellas.

- *Inclusión de otros métodos iterativos:*

Hasta ahora se ha descubierto que el método SIM-AR es un método bastante eficiente cuando se utiliza las aproximaciones estudiadas. Pese a ello, se podría continuar con el trabajo incluyendo otros nuevos métodos de resolución de ecuaciones algebraicas con dos objetivos: resolver el sistema que plantea el método de los momentos mediante estos nuevos sistemas o utilizarlos como complemento al SIM-AR[5], es decir, como métodos para resolver el bucle interno. Uno de estos métodos podría ser el Gradiente Biconjugado Estabilizado (*BiCGSTAB*) [3][4], que presenta la ventaja de que no necesita el cálculo de la matriz adjunta para su solución, con lo cual se consigue un ahorro importante de memoria y tiempo de cálculo en el preproceso.

- *Independizar el tamaño del bucle interno del SIM-AR del tamaño de la matriz de acoplos rigurosa:*

Una conclusión que se puede obtener es que la disminución del error en el bucle externo depende fuertemente del tamaño del sistema resuelto en el bucle interno del SIM-AR[5]. Hasta el momento la herramienta fija el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver en el bucle interno del SIM-AR al tamaño de la matriz esparcida Z_s de acoplos rigurosos. Se podría continuar este trabajo estudiando la posibilidad de incluir también en el bucle interno ciertos acoplos mediante momentos dipolares, con el objetivo de aumentar su tamaño (con la mejora que conlleva en cuanto a disminución del error en el bucle externo) sin incrementar el tamaño de la matriz esparcida Z_s y, por tanto, sin afectar al tamaño de la memoria a utilizar. Sería interesante ver que efectos tienen sobre la convergencia del método y estudiar la posibilidad también de sustituir elementos calculados de forma rigurosa por elementos calculados con momentos dipolares en ese bucle interno con el fin de reducir la memoria a utilizar.

- *Implementación de métodos híbridos:*

En la actualidad existen diversas herramientas que combinan métodos rigurosos de resolución del problema electromagnético con métodos de alta frecuencia. La inclusión de la aproximación de momentos dipolares se puede considerar como una aproximación de alta frecuencia ya que únicamente tiene validez cuando la fuente del acoplo y la víctima de dicho acoplo están suficientemente alejados. El presente trabajo se podría continuar con la inclusión de otras aproximaciones de alta frecuencia en la herramienta con el fin de estudiar su comportamiento y los resultados que arroja. Una de estas aproximaciones podría ser la Física óptica (PO) [6] o la GTD-UTD [7].

Por otra parte, existe un estudio en el grupo que determina que los acoplos más importantes a un subdominio dado son aquellos que están próximos y los que se encuentran cercanos a las antenas del modelo, debido a que sobre ellos la densidad de corriente será mayor y al hacer el producto $Z \cdot I$ el acoplo resultante será significativo. Se realizó un estudio de los resultados que se obtenían resolviendo en modelo de muy grandes dimensiones (un avión) teniendo únicamente en cuenta estas contribuciones, es decir, poniendo a cero el resto de acoplos del modelo. La prueba, comparándose con las medidas obtenidas arrojaban resultados bastante aproximados. Una mejora que se puede incluir en la herramienta desarrollada es la inclusión de este método de tal forma que los elementos muy cercanos y los subdominios de antena con fuertes corrientes se calculen mediante el método riguroso, los acoplos algo lejanos (entre 0.5 landas y 3 landas, por ejemplo) se calcularía con la aproximación de momentos dipolares y los de distancias muy lejanas se ignorase su acoplo. Con esto se podría observar los resultados que arrojan a casos extremadamente grandes.

- *Funciones Base y Prueba más apropiadas al tipo de superficies utilizadas para la descripción de la geometría*


Un estudio muy interesante sería sustituir las funciones base y prueba utilizadas en este trabajo por unas funciones base y prueba más acorde con las superficies utilizadas para la descripción de la geometría. Es decir, se podría estudiar el efecto que tiene sobre la memoria que se necesitaría y el tiempo de cálculo la sustitución de las funciones de base y prueba actuales por funciones de base de superficies de Bezier [8]. Este sería un trabajo bastante interesante que podría traer consigo muy buenas prestaciones.

- [1] W.C. Chew, J.M. Jin, E. Michielssen, J.M. Song- "Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic" Norwood, MA. Artech-House, 2001
- [2] E. García, F. Saez de Adana, J.M. Gómez, M.F. Cátedra. "Nueva Aproximación para el Cálculo de la CFIE con Bajo Coste Computacional". *XVIII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*. 4 pags. en CDROM. La Coruña, 10-12 Septiembre 2003.
- [3] A.R. Clark, A.P.C. Fourie, D.C. Nitch. "Stationary, nonstationary and hybrid iterative Method of Moments Solution Schemes". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 10, October 2001.
- [4] H.A. Van der Vorst. "BiCGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BiCG for the solution of nonsymmetric linear systems" *Siam J. Sci. Stat. Comput.* Vol. 13, No. 2, pp 631-644, March 1992.
- [5] A.P.C. Fourie, D.C. Nitch. "A Sparse Iterative Method (SIM) for the Moment Method calculation". *IEEE AP-S International Symposium*, Seattle 1994.
- [6] J.A Stratton. "*Electromagnetic Theory*". MacGraw-Hill, New York 1941.
- [7] J.B. Keller. "Geometrical theory of Diffraction". *Jour. Opt. Soc. Of Amer.*, Vol.52, No. 2, pp 116-130, February 1972.
- [8] G. Farin. "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide". Academic Press, 1988

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
 CENTRO DE POSTGRADO

EXCELENDA PARA HACER CONSTAR QUE EL
 PRESENTE ESTE DUEÑO DE LA TESIS PRESENTADA
 POR D. Eliseo García García
 CONSTA DE 246 PÁGINAS Y FUE ENTREGADA
 CON FECHA 17 de marzo de 2005
 A EFECTOS DEL DEFENIDO DE TESIS.


EL FUNDADO



Reunido el Tribunal que suscribe en
 el día de la fecha acordó otorgar
 a la presente Tesis Doctoral la
 calificación de SOBRESALIENTE
CUM LAUDE


Alcalá de Henares, 1 de JULIO de 2005

EL PRESIDENTE



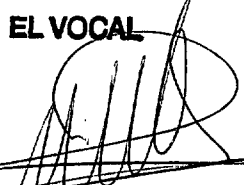
Fdo.: LUIS EMILIO GARCÍA CASTILLO

EL SECRETARIO



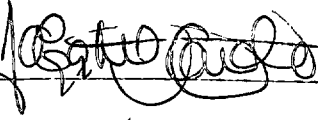
Fdo.: FRANCISCO R. SÁEZ DE ADANA HENARES

EL VOCAL




Fdo.: FERNANDO ALVAS PEÑA

EL VOCAL



Fdo.: OLGA M. CONDE PORTILLA

EL VOCAL



Fdo.: ANA MARÍA RUBIO BLANES