岡山理科大学紀要 第44号 A pp. 9-13(2008)

ベキ乗の先頭桁、無理数回転および連分数展開

高嶋 恵三 ・ 長濱 紗智* ・ 林 紘*
岡山理科大学理学部応用数学科
* 岡山理科大学理学研究科修士課程応用数学専攻

(2008年9月30日受付、2008年11月7日受理)

はじめに

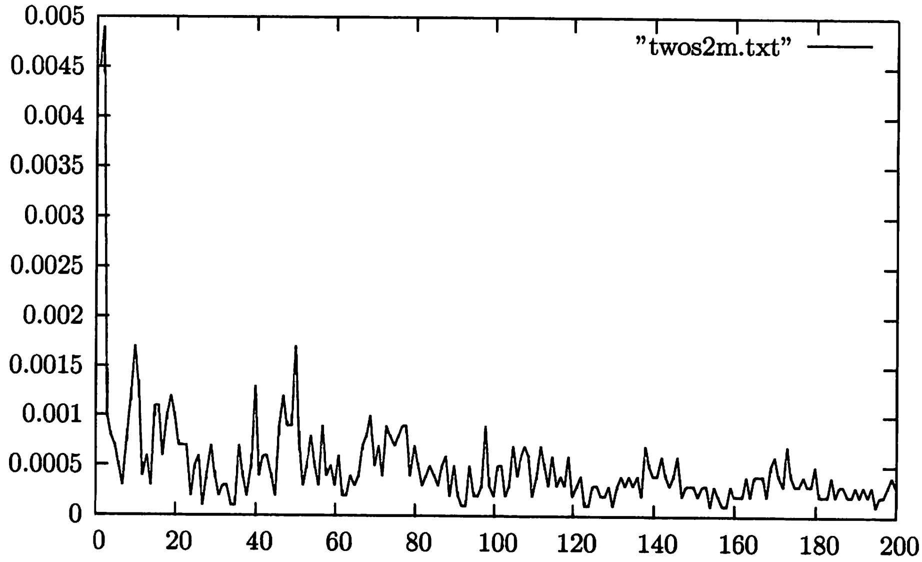
ベキ乗 a^n の 10 進法表示における先頭桁の数字について, 高嶋・小谷 [3] では, 1から9までの, 各数字の観測分布と極限分布との差を, χ^2 検定を利用して計算し, その漸近挙動を調べた. そこでは,

- 1,200,000 程度の極めて長い間隔で増大・減少を繰り返す.
- 7 の 1,200,000 乗の付近では χ^2 検定の値が 50 を超える,

極めて不可思議な現象を報告した.

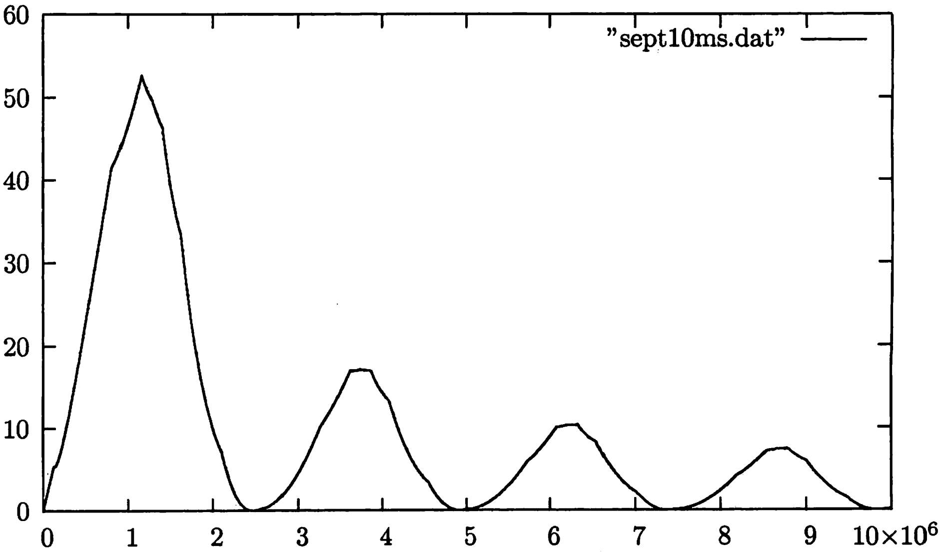
例えば, 2 のベキ乗の場合,

図 1: $a = 2$ の場合



一方、$a = 7$ の場合には, 図2 に示されるように, 2,500,000 程度の「周期」で大きな「増減」を繰り返すという, 一見 「異常な」 現象を示す. ここでは, この現象について $\log_{10} a$ の連分数展開との関連から考察する.

図 2: $a=7$ の場合 $n=10,000,000$



ベキ乗と無理数回転

自然数 a に対して, a^n が ℓ 桁（１０進法）で, 先頭の桁が k

$$\iff \quad k\times 10^{\ell-1} \ \le\ a^n \ <\ (k+1)\times 10^{\ell-1}\ .$$

常用対数をとると

$$\iff \quad \log_{10} k \ \le\ n\log_{10} a\ (\bmod 1)\ <\ \log_{10}(k+1)\ .$$

第 2 項は無理数 $\log_{10} a$ による無理数回転.

定理（Weyl の補題）　S^1 上の任意の Riemann 積分可能な関数 f と無理数 θ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(R_\theta^k(z)) \ =\ \int_{S^1} f(z)\,\lambda(dz)\ , \qquad \forall z\in S^1\ .$$

但し, S^1 は複素平面上の単位円で,

$$R_\theta:\ \begin{cases} S^1 & \to & S^1 \\ z & \mapsto & e^{2\pi i\theta} z \end{cases}$$

λ は S^1 上の通常の測度（弧長の自然な拡張）で, $\lambda(S^1)=1$, を満たすものとする.

Weyl の補題より, a^n の先頭桁の数字は, 1 から 9 までのすべての数字が出現し, かつ $n\log_{10} a$ は漸近的に $[0,1)$ 上に均等かつ稠密に分布する.

$$\frac{\sharp\{m;\ a^m\text{の先頭桁}=k\ ,\ m\le n\}}{n} \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ \log_{10}(k+1)-\log_{10} k$$

無理数回転と連分数展開

無理数回転の一様分布への収束の速さを測る量として, discrepancy の概念が一般的であり, その漸近挙動に関して多くの研究があるが, ここでは, それらを踏まえて, $\log_{10}7$, $\log_{10}2$ などの連分数展開と部分分数による近似について考える.

$\log_{10}7$ の連分数展開は以下のようである（数式処理ソフト Maple による計算結果）:

$$\log_{10}7 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4813+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

また, さらに先までの部分分母を求めると, 以下のようになる：

1, 5, 2, 5, 6, 1, 4813, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 6, 5, 1, 83, 7, 2, 1, 1, 1, 8, 5, 21, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 14, 2, 6, 1, 1, 5, 2, 1, 2, 4, 26, 2, 6, 1, 5, 1, 1, 2, 2, 3, 6, 2, 2, 103, 2, 2, 1084, 1, 1, 1, 1 , 12, 1, 8, 5, 1, 3, 4, 1, 4, 1, 8, 3, 2, 4, 3, 32, 1, 1, 2, 1, 2, 1,

ここで注目するのは, 7 番目に出てくる 4813 という, 大きな部分分母である. この項までの部分分数は

$$\frac{2074774}{2455069}$$

となり, この部分分数の分母 2455069 は, 7^n の先頭桁の数字の出現頻度の漸近挙動に見られた, 「周期」とほぼ一致する. これに対して $a = 2, 3, 4, 5$ 等では

$$\log_{10}2 = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

3, 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 42 , 6, 1, 4, 2, 3, 1, 2, 6, 1, 3, 4, 1, 8, 1, 4, 1, 2, 2, 7, 1, 4, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 7, 6, 1, 5, 10, 2, 2, 1, 8, 1, 2, 16, 24, 1, 6, 1, 8 , 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 7, 1, 1, 10, 3, 2, 1, 3, 1, 3, 1

$$\log_{10}3 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{18+\cdots}}}}}}}}}$$

2, 10, 2, 2, 1, 13, 1, 7, 18, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 14, 2, 44, 1 , 3, 1, 14, 2, 2, 1, 1, 2, 30, 1, 1, 3, 2, 4, 3, 7, 2, 6, 8, 1, 2, 7, 62, 1, 3, 4, 60, 1, 89, 3, 3, 1, 1, 7, 3, 3, 2, 4, 2, 2, 1, 25, 2, 6, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 66, 1, 1, 15, 1, 2, 1,

$$\log_{10} 5 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}}$$

1, 2, 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 42, 6, 1, 4, 2, 3, 1, 2, 6, 1, 3, 4, 1, 8, 1, 4, 1, 2, 2, 7, 1, 4, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 7, 6, 1, 5, 10, 2, 2, 1, 8, 1, 2, 16, 24, 1, 6, 1 , 8, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 7, 1, 1, 10, 3, 2, 1, 3, 1, 3

であり,「異常に」大きな部分分母は観測されない.

より一般的に, m 進法で a^n の先頭桁の数字の観測度数を考える場合, $\log_m a$ が問題になり, $\log_{10} 7$ のように, はやい段階で部分分母に異常に大きな数が出現する例も Maple を利用して調べたが, その結果と χ^2 検定の漸近挙動の結果については, 別の機会に報告する予定である.

参考文献

[1] Berger, A., : *Chaos and Chance*, Walter de Gruyter (2001)

[2] Weyl, H., : *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77**, 313 – 352 (1916)

[3] 高嶋恵三, 小谷真美：べき乗の先頭桁の数字について, 岡山理科大学紀要　**第 42 号 A**, 7 – 11 (2006)

Leading digits of a^n, irrational rotations, and continued fraction expansions

Keizo TAKASHIMA, Sachi Nagahama* and Hiroshi Hayashi*

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science,
**Graduate School of Science,*
Okayama University of Science,
1-1 Ridai-cho, Okayama 700-0005, Japan

(Received September 30, 2008; accepted November 7, 2008)

Takashima and Otani [3] reported that the asymptotic behavior of leading digits of 7^n $(n = 1, 2, \ldots)$to the limit distribution, shows extraordinary phenomena, that is, when n is near 1,200,000 or so, the values of χ^2 test is bigger than 50, and they repeat up and down with "period" about 2,400,000 or 2,500,000.

In this report, we discuss those phenomena, with considering continued fractions of $\log_{10} 7$, $\log_{10} 2$, and so on. We obtain the following continued fraction expansion of $\log_{10} 7$:

$$\log_{10} 7 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4813+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

and we have partial fraction up to 7th term, $\dfrac{2074774}{2455069}$. In contrast to the case of $\log_{10} 7$, we have the following expansions for $\log_{10} 2$:

$$\log_{10} 2 = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

We have similar expansions for $\log_{10} 3$ and $\log_{10} 5$ etc.

Bibliography

Berger, A., : *Chaos and Chance*, Walter de Gruyter (2001)

Weyl, H., : *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77**, 313 – 352 (1916)

Takashima, K., and Otani, M. : On Leading Digits of Powers a^n, Bulletin of Okayama University of Science, **42** A, 7 – 11 (2006)

Keywords: irrational rotations; Weyl's lemma; continued fraction.