

ポアンカレゲージ理論における Wu-Yang 解とその時空

秋山 浩一・村上 健一*・田代 勤**・中力 眞一**

岡山理科大学大学院総合情報研究科シミュレーション科学専攻
*岡山理科大学大学院総合情報研究科シミュレーション物理専攻
**岡山理科大学総合情報学部コンピュータシミュレーション学科

(2007年9月27日受付、2007年11月2日受理)

この論文において我々は、1991年に著者の一人が行った研究と同種の研究である「PGTにおける Wu-Yang 解の存在」を、当時仮定した Kalb ansatz という制約を排除し、またテトラッド形式ではなく通常のテンソル形式を用いて調査し研究した。更にこの論文では、数種の厳密解の他に数値解についても研究し、ニュートン質量とローレンツゲージ”荷”の両方を持つ原点に置かれた源が、その周りに作り出すゲージ場の振る舞いや時空の曲がりについて数値的(グラフィカル)に調査し、これによりゲージ場の時空に及ぼす効果について研究した。

1 はじめに

ポアンカレゲージ理論(以後 PGT と略記)は、1956年の内山[1]によるローレンツ変換の局所化(普通ゲージ化と呼ばれる)により、一般相対論のゲージ理論による再定式化の可能性が示唆されたことに始まる。内山のアイデアは、その後すぐ(1961年)に、T.W.B Kibble[2]によりローレンツ変換+並進変換(ポアンカレ変換)のゲージ化という形で一般化された。その後更に、Kibbleの理論は林[3]により8個のパラメータを伴うより一般化された形へと整備された。林と同種の扱いはドイツのF.W.Hehl[5]等のグループによっても受け継がれ、今日に至っている。

PGTは今日までに様々な人々によって、様々な立場からゲージ場の振る舞いや厳密解、その重力的な側面について、研究が成されて来ているが、この論文は、1991年に著者の一人[4]が行った研究と同種の研究である「PGTにおける Wu-Yang 解の存在」を、当時仮定した Kalb ansatz という仮定を廃止し、またテトラッド形式ではなく普通のテンソル形式を用いて調査し研究することを目的にしている。更にこの論文では、厳密解の他にも数値解についても研究し、ニュートン質量とローレンツゲージ場を生み出す”荷”の両方を持つ原点に局所化された源が、その周りに作り出すローレンツゲージ場の振る舞いや時空の曲がりについて調査することによって、ローレンツゲージ場の時空に及ぼす効果や相対論からのずれについて研究する。

次の節では、PGTの review を通して、我々の取る立場、観点を明確にする。第3節では、本題の Wu-Yang 的な解について考える。まとめと課題に

ついては、最後の節にまわすことにする。

2 PGT の review

2.1 相対論の自然な拡張としての PGT

以下に示すゲージ化されたポアンカレ変換の下に不変であるように作られた理論が、ポアンカレゲージ理論(略して PGT)である。

$$\begin{aligned}\delta x^k &= \omega_m^k(x)x^m + \epsilon^k(x) \\ \delta q &= \frac{1}{2}\omega_{km}(x)S^{km}q\end{aligned}$$

ここで、 $\omega_m^k(x)$ 、 $\epsilon^k(x)$ はゲージ化されたポアンカレ変換のパラメータである。また q は物質場で2つのゲージ場(ローレンツゲージ場 $A_{km\mu}$ と並進ゲージ場 c_k^μ)を生み出す”源”の場であり、 S^{km} はこの場のローレンツ変換の下での変換性によって決まるジェネレータである。

PGTは、物質場 q と2つのゲージ場 $A_{km\mu}$ と c_k^μ とからなる系である。この2次までのポアンカレゲージ変換に対して不変な作用の一般形が、林によって求められている。しかしここでは、現時点で一般相対論からの予測が非常によく現象に合っていることに鑑み、この特殊な場合に相当する次の作用から出発することにする¹。

$$\begin{aligned}I = \int d^4xb \left[L_M(q, D_k q) - a \left(\frac{2}{3} T C_{kmn} T C^{kmn} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} V C_k V C^k + \frac{3}{2} A C_k A C^k - F \right) \right. \\ \left. + a_1 F_{km\mu\nu} F^{km\mu\nu} \right] \quad (1)\end{aligned}$$

¹林のパラメータとの関係は付録を見て頂きたい。

ここで、 $D_k q$ は Kibble の導入した共変微分で、次式により定義されている。

$$D_k q = b_k^\mu \left(q_{,\mu} + \frac{i}{2} A_{mn\mu} S^{mn} q \right) \quad (2)$$

b_k^μ は 4 脚場あるいはテトラッドと呼ばれ、並進ゲージ場とは定数 1 だけ異なり、 $b_k^\mu = \delta_k^\mu + c_k^\mu$ なる関係にある量で、並進ゲージ場に代わって用いられるのが普通である。また、 $q_{,\mu} \equiv \frac{\partial q}{\partial x^\mu}$ とした。更に、 a と a_1 は結合定数、 ${}^T C_{kmn}$ 、 ${}^V C_k$ 、 A_{Ck} は、それぞれ以下で定義する並進ゲージ場の強さ C_{kmn} のテンソル、ベクトル、軸性ベクトル成分であり、また F_{kmnp} はローレンツゲージ場の強さで、 F はそのスカラー成分である。

$$\begin{aligned} C_{kmn} &= C_{kmn} + 2A_{k[mn]} \quad (3) \\ F_{kmnp} &= 2(A_{km\nu,\mu} + A_{kr\mu} A^r_{m\nu}) b_{[n}^\mu b_{p]}^\nu \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $C_{kmn} = 2b_{k\mu,\nu} b_{[m}^\mu b_{n]}^\nu$ と置いていることに注意。

作用 (1) は、次の恒等式を用いると、より相対論に近い形に書くことができる。

$$F = R + \left(\frac{2}{3} {}^T C_{kmn} {}^T C^{kmn} - \frac{2}{3} C_k^V C^k \right) + \frac{3}{2} A_{Ck}^A C^k + (2bb^{m\mu} V C_m)_{,\mu} / b. \quad (5)$$

ここで、 R は、テトラッド b_k^μ の逆 b^k_μ から定義されるメトリックテンソル $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{km} b^k_\mu b^m_\nu$ を用いて定義しているリーマンテンソルのスカラー成分である。ただし、 $\eta_{km} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1)$ はミンコウスキー計量テンソルである。書き忘れていたが、作用 (1) の b は $b \equiv -\det(\eta_{km} b^m_\mu)$ と置いたものである。

一寸した計算の後、作用 (1) は次のように書き直される。

$$I = \int d^4 x b (L_M(q, D_k q) + aR + a_1 F_{km\mu\nu} F^{km\mu\nu}) \quad (6)$$

この作用から変分法により 2 種類の方程式 (ここでは物質場 q は特定しないので、これについての方程式は考えないことにする) が得られる。まず、テトラッド b_k^μ について変分すると次のアインシュタイン方程式が導かれる²。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2a} (T_M^{\mu\nu} + T_L^{\mu\nu}) \quad (7)$$

ここで、 $T_M^{\mu\nu}$ と $T_L^{\mu\nu}$ はそれぞれ q 場とローレンツゲージ $A_{km\mu}$ に対するエネルギー運動量テンソル

で、各々次式で定義している。

$$T_M^{\mu\nu} = -b_k^\mu b^{m\nu} \frac{\partial L_M}{\partial D_k q} D_m q + g^{\mu\nu} L_M \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T_L^{\mu\nu} &= -a_1 (4F_{km\lambda}{}^\nu F^{km\lambda\mu} \\ &\quad - g^{\mu\nu} F_{km\lambda\kappa} F^{km\lambda\kappa}) \quad (9) \end{aligned}$$

次に、ローレンツゲージ場 $A_{km\mu}$ について変分すると次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (b F^{km\mu\nu}) = \frac{1}{4a_1} (S_M^{km\mu} + S_L^{km\mu}) \quad (10)$$

ここで、 $S_M^{km\mu}$ と $S_L^{km\mu}$ は、各々次式で定義した量で、 q 場とローレンツゲージ場のスピン角運動量テンソル密度と考えることができる。

$$S_M^{km\mu} = -\frac{i}{2} b b_{r,\mu} \frac{\partial L_M}{\partial D_r q} S^{km} q \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_L^{km\mu} &= -4a_1 b (F^{kn\mu\nu} A^m_{n\nu} \\ &\quad + F^{nm\mu\nu} A^k_{n\nu}) \quad (12) \end{aligned}$$

上に得た 2 種類の方程式 (7) と (10) から直ちに次の保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (T^{\mu\nu} + a T_G^{\mu\nu}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial S^{km\mu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (14)$$

ここで、 $T^{\mu\nu}$ と $S^{km\mu}$ は各々次のように置いた。

$$T^{\mu\nu} = b (T_M^{\mu\nu} + T_L^{\mu\nu}) \quad (15)$$

$$S^{km\mu} = S_M^{km\mu} + S_L^{km\mu} \quad (16)$$

また $T_G^{\mu\nu}$ は重力場のエネルギー運動量テンソル密度で、相対論と同じように次のように定義した。

$$T_G^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial b_k^{\lambda,\mu}} b_k^{\lambda,\nu} + \delta^{\mu\nu} \mathcal{G} \quad (17)$$

ただし、 \mathcal{G} は、リーマンスカラー R より作られる、クリストッフエル記号 $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}$ を用いた次の量である。

$$g = b \left(\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\beta \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \nu\alpha \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \right) g^{\mu\nu} \quad (18)$$

² b_k^μ による変分のため、一般には 16 個の方程式が得られ、最終的にそれらは 2 階のテンソル方程式の形にまとめられる。従って、それら 16 個の方程式は、このテンソル方程式の対称部分 10 個と反対称部分 6 個の組に分けられる。ここでの我々のパラメータの選択は、この反対称部分が、源のエネルギー・運動量テンソル $T_M^{\mu\nu}$ が対称であるとする恒等的に満たされる選択となっている。詳しくは付録を見て頂きたい。 $T_M^{\mu\nu}$ の対称性については議論の余地があるかもしれないが、物理的な要請からすれば真つ当であるように思われるため、ここでは、以後そのように仮定して行くことにする。

2.2 ローレンツゲージ場の方程式

ローレンツゲージ場の方程式 (10) は、明らかにポアンカレゲージ変換に対して陽な共変形をしていないが、Kibble の定義した共変微分を用いると、陽に共変な形に書き直すことができる。しかしながら、我々はここで、相対論の自然な拡張という観点で PGT を考えていることと、ポアンカレゲージ変換は、本来一般座標変換と、これと独立した局所ローレンツ変換とからなる変換で、局所ローレンツ変換は、内部変換であるテトラッド系の局所回転と見なすべきものであるとの観点から進み、局所ローレンツ変換の陽な共変性は陰に隠れるが、一般座標変換の下での共変性はより鮮明になるため、相対論的アプローチが可能となる形に書き直すことにする。

まず Kibble の共変微分のレビューから始める。これはポアンカレゲージ変換に対して

$$\delta\alpha = \frac{i}{2}\omega_{km}S^{km}\alpha + \xi^\lambda{}_{,\mu}\Sigma_\lambda{}^\mu\alpha$$

と変換するローカル量とワールド量の混合量 α に対して、次のように定義されている。

$$D_\mu\alpha = \alpha_{,\mu} + \frac{i}{2}A_{km\mu}S^{km}\alpha + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\Sigma_\lambda{}^\nu\alpha \quad (19)$$

ここで、 $\Sigma_\lambda{}^\mu$ は、 α のワールド成分の、つまり一般座標変換の下での変換性によって決まる変換ジェネレータである。また接続係数 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は、メトリック条件に対応する条件

$$D_\mu b_k{}^\nu = 0 \quad (20)$$

を課すことによりローレンツゲージ場に関係付けられる。

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = b_k{}^\lambda (b^k{}_{\mu,\nu} + A^k{}_{m\nu}b^m{}_\mu)$$

Kibble の共変微分 (19) から、次の関係

$$A_{km\mu} = K_{km\mu} - \Delta_{km\mu}$$

に注目すると、ワールドな量に対しては普通の相対論に於ける共変微分に帰着するが、スピノールを含めた全てのローカル場やワールドとローカルの混合場に対しては定義された共変微分が自然に得られる。

$$\nabla_\mu\alpha = \alpha_{,\mu} - \frac{i}{2}\Delta_{km\mu}S^{km}\alpha + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \Sigma_\lambda{}^\nu\alpha \quad (21)$$

ここで、 $\Delta_{km\mu}$ はリッチの回転係数として知られる量で、また $K_{km\mu}$ は、並進ゲージ場の強さ C_{kmn} ($\equiv C_{km\mu}b_n{}^\mu$) を用いて定義されたコントーションと呼ばれている量である。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta_{km\mu}b_n{}^\mu \equiv \Delta_{kmn} &= - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} b_{k\lambda}b_m{}^\mu b_n{}^\nu \\ &+ b_m{}^\mu b_n{}^\nu b_{\kappa\mu,\nu} \end{aligned} \quad (22)$$

$$K_{km\mu}b_n{}^\mu \equiv K_{kmn} = \frac{1}{2}(C_{kmn} + C_{mnk} + C_{nmk}) \quad (23)$$

共変微分 ∇_μ は、 $\nabla_\mu b_k{}^\nu = 0$ など全てのテトラッド場に対して 0 となり、従ってメトリック条件

$$\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

を自動的に満たす。またこの共変微分はスピノール場に対しても定義されているので、PGT の各方程式を相対論のスピノール形式であるニューマン・ペンローズ形式に自然に書き直すことができるというメリットもある。

しかしながら、我々はここで、接続係数としてクリストッフェル記号のみを持つ純粋な相対論における共変微分 (これをセミコロン (;) によって表す) を用いて方程式を書き下すことにする。共変微分 (;) は、形式的には ∇_μ 微分において、演算を受ける対象のローカル成分、つまりラテン添字に対する成分への演算を無視する (つまりローカル量をスカラー扱いにする) ことに対応する。従って、もはや $b_k{}^\mu{}_{;\nu} \neq 0$ となるが、メトリック条件 $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ は依然として成り立つ。

こうして、一寸した計算の後、ローレンツゲージ場の方程式 (10) は、次の相対論的形式で書かれる。

$$F^{km\mu\nu}{}_{;\nu} + A^k{}_{r\nu}F^{r\mu\nu} + A^m{}_{r\nu}F^{k\tau\nu} = \frac{1}{4a_1}S_M{}^{km\mu} \quad (24)$$

2.3 複素形式でのローレンツゲージ場の方程式

我々は更に、我々の目的である Yang-Mills 理論において知られている Wu-Yang 解に類似な解を PGT において探しているため、この目的に適う形式にローレンツゲージ場の方程式 (24) を書き直すことにする。このためには次の複素量を導入すればよいことが分かっている [4]。

$$\begin{aligned} (\vec{A}_\mu)_a &= A_{0a\mu} + \frac{i}{2}\epsilon_{abc}A_{bc\mu}, \\ (\vec{F}_{\mu\nu})_a &= F_{0a\mu\nu} + \frac{i}{2}\epsilon_{abc}F_{bc\mu\nu}, \\ (\vec{S}_{M\mu})_a &= S_{M0a\mu} + \frac{i}{2}\epsilon_{abc}S_{Mbc\mu}. \end{aligned}$$

これらの複素量を用いると、方程式 (24) は次の複素 Yang-Mills 形式に書かれる。

$$\vec{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} - i\vec{A}_\nu \times \vec{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4a_1}\vec{S}_M^\mu \quad (25)$$

そして、またローレンツゲージ場の強さに対する式は、(4) より次の形に纏められる。

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \vec{A}_{\nu,\mu} - \vec{A}_{\mu,\nu} - i\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu. \quad (26)$$

3 Wu-Yang type 解

3.1 前提条件

この節に於いて我々は、上に得た方程式のセット (7) と (25) を以下に与える条件の下に解くのであるが、その前に次の点に注意しておくことにする。

- 未知量は q 場を除くとテトラッド場 16 個、ローレンツゲージ場 24 個で計 40 個。
- 一方、方程式の数は、今の場合、単純計算で 34 個であるが、保存則 (14) へ導いた方程式間の恒等的関係 $10(=4+6)$ 個のため、独立なものは更に 10 個少なく 24 個となる。
- 従って、一意的に解を決めるには 16 個の補助条件が必要である。

このような状況において我々は次のような解を考える。

1. 物質場 q は原点付近にのみ分布していて、時間変動しない。
2. q 場の振る舞いは考えない。所謂、外部解のみを考える。
3. q 場の周りには静的で球対称な時空とローレンツゲージ場が分布している。

具体的には、Yang-Mills 理論の Wu-Yang 解 [6] に類似な解を考えるのである。

次に補助条件について考える。まずテトラッド場についてであるが、この 16 個の成分は、現状条件下ではテトラッドは陽には表に出て来ず、メトリック $g_{\mu\nu}$ を通してのみ寄与するため、実質 10 個である。更に、一般座標変換の任意性を利用して、座標を固定することにより、6 個に減じ、更に球対称性と時間独立性を考慮して、結局次のように 2 つの未知量 $\mu(r)$ と $\nu(r)$ にまで絞り込むことができる。

$$ds^2 = e^{2\mu(r)} (dx^0)^2 - e^{2\nu(r)} \left\{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right\} \quad (27)$$

ここで、

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \quad (28)$$

と置いた。

一方、ローレンツゲージ場については、この独立な成分 24 個に対して、方程式 (25) の独立な数は 18 個であるため、6 個の補助条件が必要である。このため Yang-Mills 理論に倣い次のゲージ条件を課すことにする。

$$\vec{A}^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (29)$$

3.2 方程式系

以上の準備の下に、前述の条件に従ってつぎのように置いて出発する。

$$\vec{A}_\mu = \begin{cases} \vec{A}_0 = 0, & \vec{A}_{i,0} = 0 \\ A_{(a)i} = \epsilon_{aij} x^j \frac{A(r)}{r} \end{cases} \quad (30)$$

更に、複素場 $A(r)$ は、2 つの実数場 $\Phi(r)$ と $\Xi(r)$ を用いて、次のように置くことにする。

$$A(r) = \frac{i}{r} (1 - \Phi(r) - i\Xi(r)) \quad (31)$$

添字についてであるが、ここおよび以後では、添字 a, b, c, i, j, k, \dots のラテン添字は全て 1 から 3 の間の何れかを表すものとする。特に、ここでの j のように、一つの式で上下同時に現れる添字については、1 から 3 までの和を取るダミー添字とする。

実際の計算は、座標系 (x^1, x^2, x^3) から極座標系 (r, θ, ϕ) に移って、更に次に示すように、座標 r を \tilde{r} に、関数 $\nu(r)$ を $\eta(\tilde{r})$ へと変換して行うことにする。

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r e^{\nu(r)} \\ e^{-\eta(\tilde{r})} &= 1 - \tilde{r} \frac{d\nu}{d\tilde{r}} \end{aligned}$$

このとき、メトリック $g_{\mu\nu}$ は次式で与えられる。

$$ds^2 = e^{2\mu(\tilde{r})} (dx^0)^2 - e^{-2\eta(\tilde{r})} (d\tilde{r})^2 - \tilde{r}^2 \left\{ (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right\} \quad (32)$$

関数 μ と η の満たす方程式は、アインシュタイン方程式 (7) より得られる。その独立なものとして次の 2 式を導くことができる。

$$\tilde{r}(\dot{\mu} - \dot{\eta}) = -8a_1\kappa \left(\dot{\Xi}^2 - \dot{\Phi}^2 \right) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{r}\dot{\eta} + 1 - e^{-2\eta} &= 8a_1\kappa \left(\dot{\Xi}^2 - \dot{\Phi}^2 \right) \\ &= -\frac{4a_1\kappa}{\tilde{r}^2} \Psi e^{-2\eta} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、ドット ($\dot{\cdot}$) は、 \tilde{r} についての微分を表している。また、

$$\Psi \equiv (\Xi^2 - \Phi^2 + 1)^2 - 4\Phi^2\Xi^2 \quad (35)$$

と置いたことに注意。

一方、 Φ と Ξ の満たす方程式は式 (25) より得られる。

$$\tilde{r}^2 \ddot{\Phi} + \tilde{r}^2 \dot{\Phi}(\dot{\mu} + \dot{\eta}) - e^{-2\eta} \Phi (\Phi^2 - 3\Xi^2 - 1) = 0 \quad (36)$$

$$\tilde{r}^2 \ddot{\Xi} + \tilde{r}^2 \dot{\Xi}(\dot{\mu} + \dot{\eta}) - e^{-2\eta} \Xi (3\Phi^2 - \Xi^2 - 1) = 0 \quad (37)$$

最後に、外から課したゲージ条件 (29) は、今の場合には自動的に満たされることに注意して頂きたい。

3.3 解の導出

解を求めるために、Wu-Yang に倣い \tilde{r} の代わりに次の変数 ξ を用いる。

$$\tilde{r} = e^\xi$$

このとき、式 (36) と (37) は、次の 4 つの 1 階の連立微分方程式の組に書くことができる。

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{d\xi} = \psi \\ \frac{d\Xi}{d\xi} = \chi \\ \frac{d\psi}{d\xi} = (2 - e^{-2\eta} + 4a_1\kappa e^{-2(\xi+\eta)}\Psi)\psi \\ \quad + e^{-2\eta}\Phi(\Phi^2 - 3\Xi^2 - 1) \\ \frac{d\chi}{d\xi} = (2 - e^{-2\eta} + 4a_1\kappa e^{-2(\xi+\eta)}\Psi)\chi \\ \quad + e^{-2\eta}\Xi(3\Phi^2 - \Xi^2 - 1) \end{cases} \quad (38)$$

これらの方程式から、解曲線の接線ベクトルは、4 次元の位相空間 (Φ, Ξ, ψ, χ) の中で次の場合においてのみ 0 となるのがわかる。

1. $(0, 0, 0, 0)$
2. $(+1, 0, 0, 0)$
3. $(-1, 0, 0, 0)$

これらは明らかに、与方程式の特解である。そして、この各々と式 (33) と (34) とを合わせて解くと次の結果が得られる。

- $(0, 0, 0, 0)$ の場合

1. ローレンツゲージ場 $\mathcal{A}(r) = \frac{i}{r}$
2. ローレンツゲージ場の強さ

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{(a)i} \equiv \mathcal{F}_{(a)0i} = 0 \\ \mathcal{H}_{(a)i} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{F}_{(a)jk} = -\frac{ia_1\kappa}{r^4} \end{cases}$$

3. ローレンツゲージ場のエネルギー密度

$$T_{(L)00} = \frac{4a_1}{\tilde{r}^4} e^{2\mu}$$

4. 時空は Reissner-Nordström 型

$$\begin{aligned} e^{-2\mu} &= \frac{c_2}{1 + \frac{c_1}{\tilde{r}} + \frac{4a_1\kappa}{\tilde{r}^2}} \\ e^{2\eta} &= 1 + \frac{c_1}{\tilde{r}} + \frac{4a_1\kappa}{\tilde{r}^2} \end{aligned}$$

ただし、 $c_{1,2}$ は積分定数

- $(\pm 1, 0, 0, 0)$ の場合

1. ローレンツゲージ場

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(r) &= 0 \quad (\Phi = 1), \\ \mathcal{A}(r) &= \frac{2i}{r} \quad (\Phi = -1) \end{aligned}$$

2. ローレンツゲージ場の強さ

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{(a)i} = 0 \\ \mathcal{H}_{(a)i} = 0 \end{cases}$$

3. ローレンツゲージ場のエネルギー密度

$$T_{(L)00} = 0$$

4. 時空は Schwarzschild 型

$$e^{-2\mu} = \frac{c_2}{1 + \frac{c_1}{\tilde{r}}}$$

$$e^{2\eta} = 1 + \frac{c_1}{\tilde{r}}$$

ただし、 $c_{1,2}$ は積分定数

ところで、 $0 < \tilde{r} < \infty$ で有界である解としては、更に 2 つある。つまり、

- $\tilde{r} \rightarrow \infty$ において、時空は Schwarzschild 的で、 e, f を任意の定数として、

$$\Phi = 1 - \frac{e}{\tilde{r}} + O(2)$$

$$\Xi = -\frac{f}{\tilde{r}} + O(2)$$

となり、

- $\tilde{r} \rightarrow 0$ においては、時空は Reissner-Nordström 的になり、

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \Xi \rightarrow 0$$

となるものと、形式的にはこれらと同じであるが、 Φ の符号を逆転したものの 2 つである。次節ではこれらの解の内の一つについて数値的に求めた解を示す。

3.4 数値解

前節の最後で述べた 2 つの可能な解の中で、 $(e, f > 0)$ の場合を取り上げて、それを数値的に解き、その振る舞いを調べることにする。そのために先ず、 Φ, Ξ 、およびこれらの導関数と、ローレンツゲージ場、およびその強さとの間の関係を列挙しておく。

$$\vec{\mathcal{A}}_\mu \equiv \vec{v}_\mu + i\vec{a}_\mu \quad \text{ただし、}\vec{v}_\mu, \vec{a}_\mu \text{ は実場}$$

とすると、

$$\vec{v}_1 = 0, \quad \vec{v}_2 = -\Xi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{v}_3 = \Xi \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (39)$$

$$\vec{a}_1 = 0, \quad \vec{a}_2 = -(1 - \Phi) \vec{e}_\varphi, \quad \vec{a}_3 = (1 - \Phi) \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (40)$$

また、

$$\vec{\mathcal{H}}_i \equiv \vec{H}^P_i + i\vec{H}^A_i \quad \text{ただし、}\vec{H}^P_i, \vec{H}^A_i \text{ は実場}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\vec{H}^P_1 &= -2\Phi\Xi \sin\theta \vec{e}_r, \\ \vec{H}^P_2 &= -\Xi' \sin\theta \vec{e}_\theta, \\ \vec{H}^P_3 &= -\Xi' \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\vec{H}^A_1 &= (\Phi^2 - \Xi^2 - 1) \sin\theta \vec{e}_r, \\ \vec{H}^A_2 &= \Phi' \sin\theta \vec{e}_\theta, \\ \vec{H}^A_3 &= \Phi' \vec{e}_\varphi\end{aligned}\quad (42)$$

ここで、プライム (') は r による微分であり、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ は、各々 r, θ, φ 方向を向いた単位ベクトルである。これから、 Ξ は、"ポテンシャル" \vec{a}_μ と、"場" \vec{H}^P_μ に、また Φ は、"ポテンシャル" \vec{a}_μ と、 \vec{H}^A_μ に関わり深い量であることがわかる。

また、時空の曲がりの程度を調べるために、ニュートンポテンシャル

$$\phi_N = -\frac{GM}{\tilde{r}} = -\frac{c^2 \tilde{r}_s}{2 \tilde{r}} \quad (43)$$

との比較をする。ただし、 $\tilde{r}_s \equiv \frac{2MG}{c^2}$ は質量 M の物体の Schwarzschild 半径である。このために形式

的に $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と置き、比較する"ポテンシャル"として

$$\phi \equiv \frac{c^2}{2} h_{00} = -\frac{c^2}{2} (1 - e^{2\mu}) \quad (44)$$

を用いることにする。

3.5 数値解の結果のグラフィカル表示

ここでは、計算結果をグラフィカルに示すことにする。

計算は、 $e = f = 1$ として、次の場合を仮定して行った。

1. 太陽型 ($c_2 = 1, c_1 = \tilde{r}_s = 3\text{km}$)
 - (a) $4a_1\kappa = 1 \times 10^{-2} \text{ km}^2$
 - (b) $4a_1\kappa = 1 \times 10^4 \text{ km}^2$
2. 原子核型 ($c_2 = 1, c_1 = \tilde{r}_s = 1 \times 10^{-15} \text{ km}$)
 - (a) $4a_1\kappa = 1 \times 10^{-5} \text{ km}^2$
 - (b) $4a_1\kappa = 1 \times 10^2 \text{ km}^2$

結果は次の通りである (図の左が \tilde{r} の関数としての $1 - \Phi$ と Ξ を、右がニュートンポテンシャルと我々のとの間の関係を表している)。

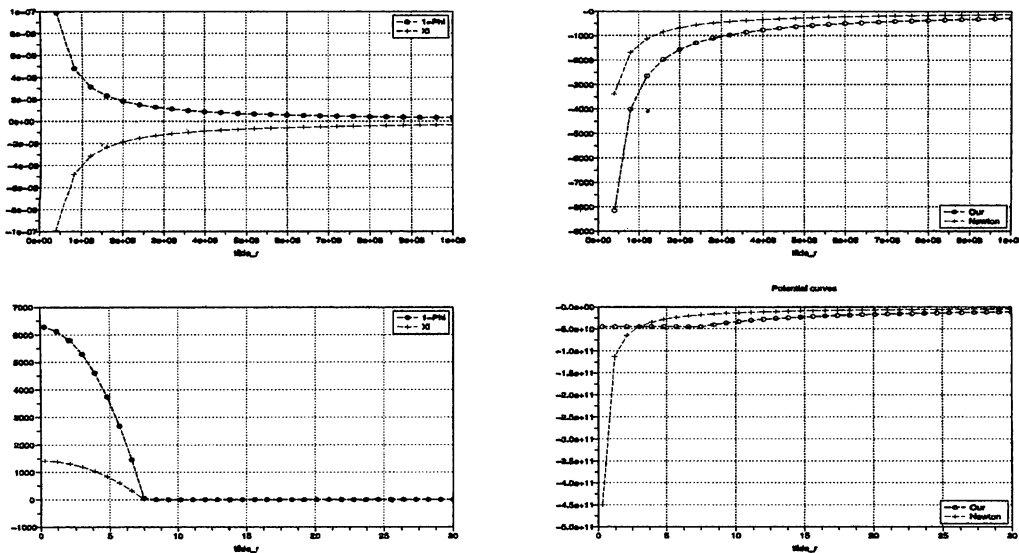


Figure 1: 1(a) の場合

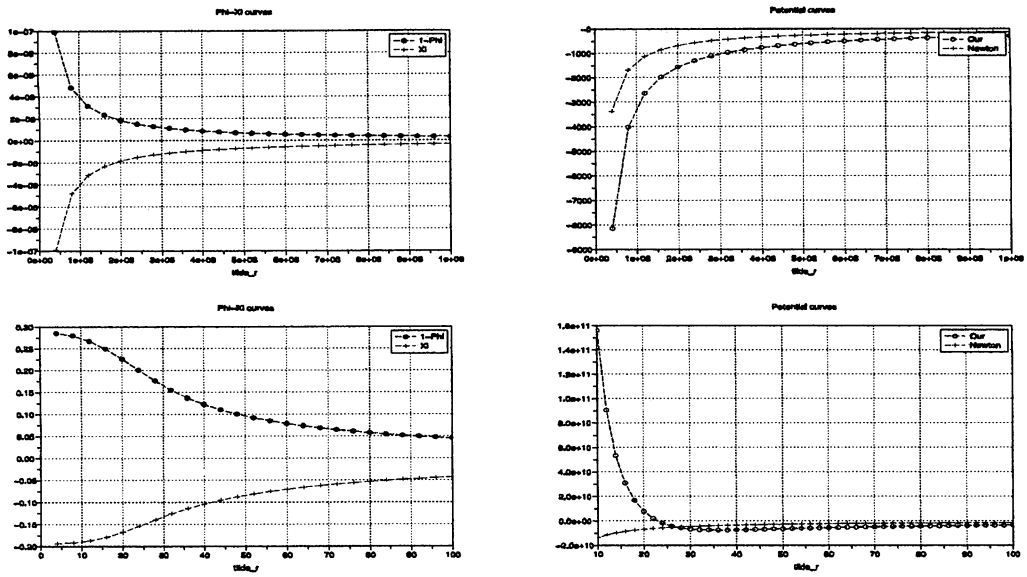


Figure 2: 1(b) の場合

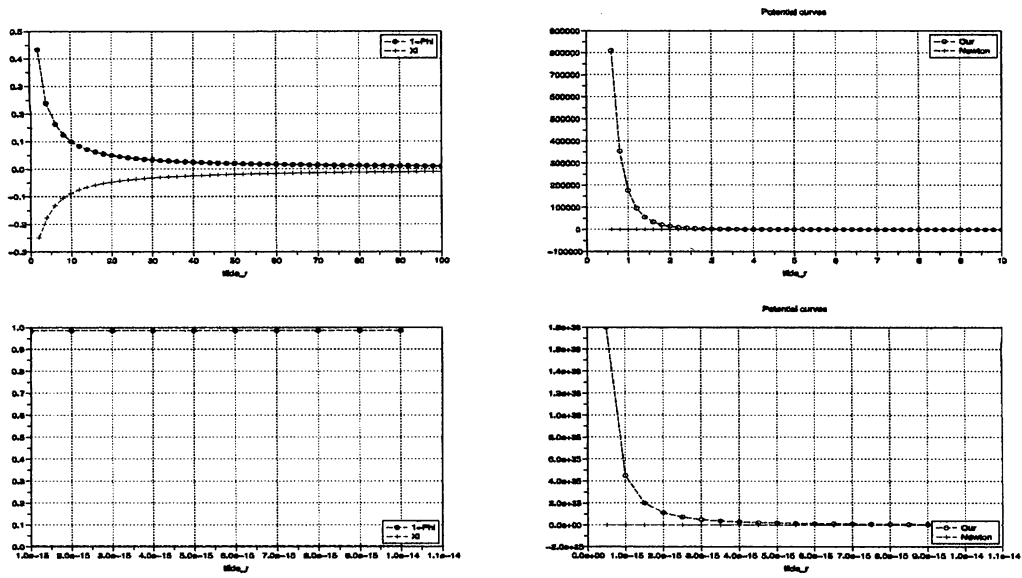


Figure 3: 2(a) の場合

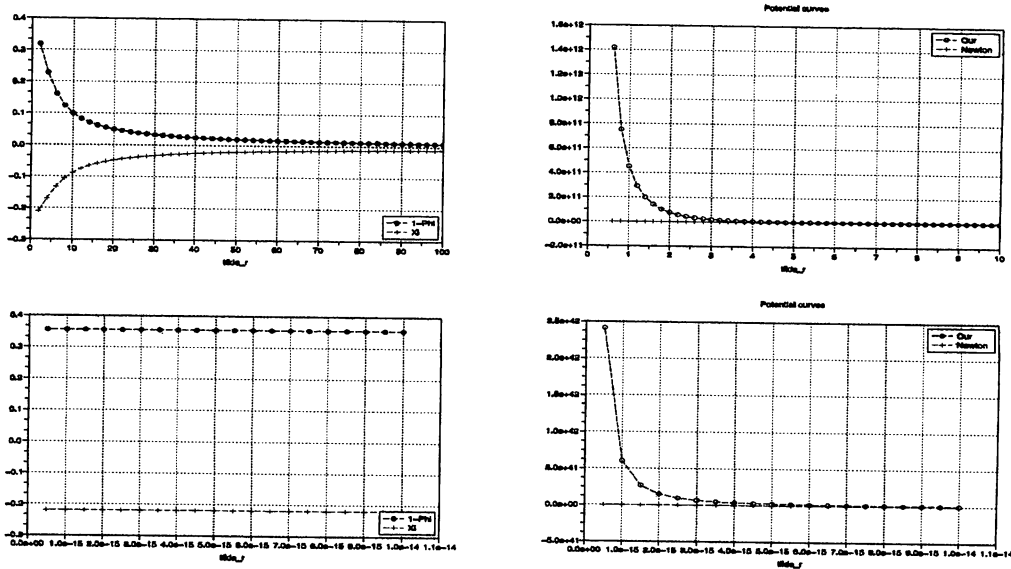


Figure 4: 2(b) の場合

4 まとめと課題

この論文において、我々は PGT における Wu-Yang タイプ解を探し、3 種類の厳密解とそれらと関連する数値解を求めた。厳密解から、源は、ニュートン質量とゲージ荷 $4a_{1K}$ を持っていて、源に近い所では、ゲージ荷は電荷と同じ効果を持ち、時空は Reissner-Nordström 的に、また遠く離れた所ではゲージ荷の時空への効果は無視され Schwarzschild 的になることが分かった。更に、方程式を数値的に解くことによって、これら”両端の振る舞い”に結びつく中間領域でのゲージ場と時空の振る舞いをグラフィカルな結果として得た。

次に、数値解のグラフィカルな結果についてであるが、厳密解の積分定数 c_1 を源のニュートン質量による Schwarzschild 半径と見なし、この値により、典型的な場合として、太陽型と原子核型に分類して計算を行った。

図から分かる通り、大雑把に言って、定性的な振る舞いは、各場合について大体同じである。”ポテンシャル”は、源に近づくに従って強い反発力を示すのが特徴であるが、この”ポテンシャル”は、時空の曲がり弱いときにのみ、そう解釈できるものであり、ここでは単なる目安として導入した物である。従って、今後の課題として、

1. 源のゲージ荷に直接感応しないスカラー粒子を飛ばしてその運動を調べることによって源の周りの時空構造を調べる。
2. ゲージ荷に感応するスピナー粒子を飛ばしてその振る舞いを調べ、実験データとの比較等を行う。

などが上げられる。これらについては順次調査して行く予定である。

謝辞

この論文作成に当たり、数式処理については Maxima、数値計算については Scilab という 2 つのオープンソースソフトウェアを使用させて頂いた。開発に携わって来られた方々にお礼と感謝の気持ちを捧げたい。また、全体を査読して頂き、貴重なアドバイスとコメントを頂いた関西外国語大学教授の大谷晃也先生に感謝申し上げたい。

A PGT の作用

以下に林 [3] による一般的な PGT モデルと我々との間の関係を示す。

林の作用は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 I = \int d^4x b (& L_M + \alpha {}^T C_{kmn} {}^T C^{kmn} + \beta {}^V C_k {}^V C^k \\
 & + \gamma {}^A C_k {}^A C^k + a_1 A_{kmnp} A^{kmnp} \\
 & + a_2 B_{kmnp} B^{kmnp} + a_3 C_{kmnp} C^{kmnp} \\
 & + a_4 E_{km} E^{km} + a_5 G_{km} G^{km} \\
 & + a_6 F^2 + a F). \quad (45)
 \end{aligned}$$

ここで、 $a, a_i (i = 1 \sim 6)$ および、 α, β, γ は結合定数で、 $A_{kmnp}, B_{kmnp}, \dots$ はローレンツゲージ場の強さ F_{kmnp} の既約成分である³。

この作用を、恒等式 (5) を用いて書き直すと

$$I = \int d^4x b \{L + b^{-1}(2ab b^{m\mu} {}^V C_{m,\mu})\}, \quad (46)$$

が得られる。ここで、

$$L = L_M + a R + L_C + L_F \quad (47)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 L_C &= C_1 {}^T C_{kmn} {}^T C^{kmn} + C_2 {}^V C_k {}^V C^k \\
 &+ C_3 {}^A C_k {}^A C^k \\
 L_F &= a_1 A_{kmnp} A^{kmnp} \\
 &+ a_2 B_{kmnp} B^{kmnp} + a_3 C_{kmnp} C^{kmnp} \\
 &+ a_4 E_{km} E^{km} + a_5 G_{km} G^{km} \\
 &+ a_6 F^2 \quad (48)
 \end{aligned}$$

そして、新たに

$$C_1 = \alpha + \frac{2}{3} a, \quad C_2 = \beta - \frac{2}{3} a, \quad C_3 = \gamma + \frac{3}{2} a. \quad (49)$$

と置いた。

この作用から次の 3 種類の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 2a \hat{G}^{km} + \nabla_n I^{(km)n} + K_{nr}{}^{(k} I^{nr)m)} - \eta^{km} L_C \\
 = T_{(M)}^{(km)} + T_{(L)}^{(km)} \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_n I^{[km]n} + K_{nr}{}^{[k} I^{nr]m)} = T_{(M)}^{[km]} + T_{(L)}^{[km]} \quad (51)$$

そして、

$$\begin{aligned}
 \nabla_p H^{kmnp} + K^k{}_{rp} H^{rmnp} + K^m{}_{rp} H^{krnp} \\
 + I^{[km]n} = S_{(M)}^{kmn} \quad (52)
 \end{aligned}$$

ここで、添字を囲む 2 種類の括弧 () と [] は、それぞれ対応する量の対称成分と反対称成分を表していること、および次の量を定義して用いていることに注意して頂きたい。

$$I^{kmn} = 2 \frac{\partial L_C}{\partial C_{kmn}}, \quad H^{kmnp} = 2 \frac{\partial L_F}{\partial F_{kmnp}}, \quad (53)$$

³ これらの厳密な定義については [4] を参照せよ。

更に、

$$\begin{aligned}
 T_{(L)}^{km} &= b^k{}_\mu b^{m\nu} T_{(L)}^{\mu\nu} \\
 &= -F_{pqn}{}^k H^{pqnm} + \eta^{km} L_F, \quad (54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(M)}^{km} &= b^k{}_\mu b^{m\nu} T_{(M)}^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{\partial L_M}{\partial D_m q} D^k q + \eta^{km} L_M \quad (55)
 \end{aligned}$$

そして、

$$S_{(M)}^{km\mu} = -\frac{i}{2} b_l{}^\mu \frac{\partial L_M}{\partial D_l q} S^{km} q. \quad (56)$$

さて、我々のモデルであるが、アインシュタイン理論への自然な移行ということで、我々は次の選択を行った。

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \quad (57)$$

$$a_1 = \frac{3}{4} a_2 = a_3 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} a_5 = 6a_6 \quad (58)$$

この結果

$$L_C = 0 \quad (59)$$

$$L_F = a_1 F_{kmnp} F^{kmnp} \quad (60)$$

従って、

$$I^{kmn} = 0, \quad H^{kmnp} = 4a_1 F^{kmnp} \quad (61)$$

となり、 T_L^{km} は対称になる。このようにして、本論での方程式に到達する。

References

- [1] R.Utiyama, Phys.Rev.101, 1597(1957),
- [2] T.W.B.Kibble, J.Math.Phys.2, 212(1961),
- [3] K.Hayashi, Prog.Theor.Phys.39, 494(1968),
- [4] S.Nakariki, J.Math.Phys.32, 1612(1991),
- [5] 例えば、F.W.Hehl, J.Nitsch and P.von der Heyde, in *the Einstein Commemorative Volume*, ed. A. Held (Plenum Press, New York, 1980), p.329 および、その中の引用文献,
- [6] T.T.Wu and C.N.Yang, in *Properties of Matter under Unusual Conditions*, edited by S.Fernbach and H.Mark (Interscience, New York,1969), p.349.

Wu-Yang type solutions in Poincaré Gauge Theory and their spacetime

Koichi AKIYAMA, Ken-ichi MURAKAMI, Tsutomu TASHIRO*
and Shin-ichi NAKARIKI*

*Graduate School of Informatics,
*Department of Computer Simulation,
Faculty of Informatics,
Okayama University of Science,
1-1 Ridai-cho, Okayama 700-0005, Japan*

(Received September 27, 2007; accepted November 2, 2007)

We investigate the existence of Wu-Yang type solution in Poincaré Gauge Theory (PGT), which is the same kind of research as done by one of the authors in 1991. However, in this time, we exclude the restriction "Kalb ansatz" assumed at that time and we do not use a tetrad form but a tensor form. As a result, we obtain several kinds of exact solutions and some numeric solutions, of which we think as ones created by a point source with both a mass and "a Lorenz gauge Charge"

We further investigate numerically (and graphically) the behavior of the gauge field and the structure of spacetime, which are given by our solutions. As a result, we show graphically the effect of the gauge field on the spacetime.

Keywords: Poincaré gauge theory; Wu-Yang type solutions; Spacetime structure.