

# レイリーフェージングチャネルにおける多値 QAM のビット誤り率

小西 憲一

岡山理科大学工学部情報工学科  
(2006年 9 月 27 日 受付、2006年 11 月 6 日 受理)

## 1. まえがき

普及が著しい最近の 3G 携帯電話でもわかるように、ワイヤレスデジタルモバイルシステムはかつての音声主体の通信からマルチメディア通信へとその中心的機能は移りつつある。限られた周波数資源においてそのような機能を十分に発揮するためには更なる高速伝送を可能にする、よりスペクトル利用効率の高いデジタル変調方式が要求される。伝送帯域幅を増加せずに高いスペクトル利用効率を実現する変調方式として最も魅力ある方式が多値 QAM(M-ary Quadrature Amplitude Modulation, 以下 M-QAM と記す)方式である。通常、M-QAM 方式のビット誤り率 (BER) を閉形式で正確に計算することは煩雑で困難なことが多く、従来から種々の近似式の形式が提案されて用いられてきた。多値数  $M$  が 16 値や 64 値の場合の正確な BER の計算式は得られていたものの、任意の  $M$  の値に対する正確な BER の計算式は知られていなかった。ようやく近年になって、情報ビット列の M-QAM シンボルへのマッピングをグレイ符号配置にしたときの正確な BER が任意の  $M$  の値に対し計算できる閉形式の計算式が見出された。従来から知られていた多くの近似式による M-QAM の BER では、SN 比の高い領域では正確な値に近いが、SN 比の低い領域では正確さに欠けることが多い。

この論文では、まず任意の  $M$  に対して正確な BER を与える計算式と代表的ないくつかの近似式をまとめて記述し、AWGN チャネルにおいて SN 比の低い領域での BER を計算して近似式の近似の度合いについて検討する。次いで、モバイルマルチメディア通信を念頭において、典型的な電波伝搬環境であるレイリーフェージングチャネルにおけるシングルチャネル受信の場合とマルチチャネル受信の場合の M-QAM の厳密な BER の理論式を求め、いくつかの計算例を示す。特に、文献に見当たらない多値数  $M$  が非常に大きい場合の BER の計算結果例は有用な基礎資料となると思われる。また、実用的な平均 SN 比の範囲では近似式が有用なことを示す。

## 2. AWGN チャネルにおける M-QAM の BER について

グレイ符号マッピング格子型信号点配置の M-QAM 信号空間ダイアグラムの一例として、64 値 QAM の場合を図 1 に示す。

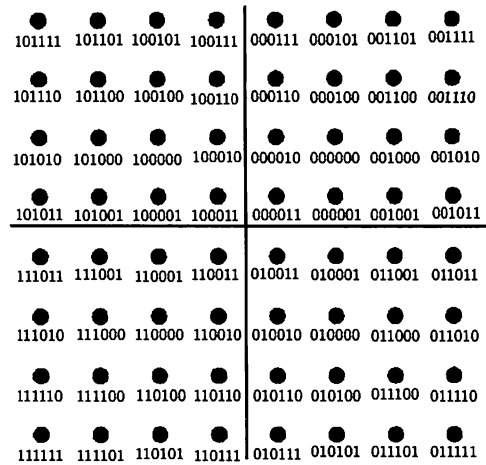


図 1. グレイ符号マッピング 64 値 QAM の信号空間ダイアグラム

情報ビット列の M-QAM シンボルへのマッピングをグレイ符号とした場合の AWGN チャネルにおける M-QAM の BER の厳密式は D. Yoon と K. Cho らによって見出された [1], [2]. それは次式で与えられる。

$$P_{b,M} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^k)\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+2^k-1}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \operatorname{erfc} \left( (2 \cdot i + 1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right) \right\} \quad (1)$$

上式において

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (2)$$

はガウスの誤差補関数である。また、 $M$  は多値数、 $E_b$  は 1 ビット当りのエネルギー、 $N_0/2$  は相加白色ガウ

ス雑音の両側電力スペクトル密度である。[ $x$ ]はガウスの記号で $x$ の整数部を表す。ただし、M-QAMの $M$ 個のシンボルはどれも等確率で送信されるという仮定がおかれている。

式(1)の厳密式が見出されるまでは M-QAM の BER は近似式を使って評価されることが多かった。高 SN 比の領域で比較的良好な BER を与える、これまでに知られている M-QAM の BER の代表的な近似式をまとめると以下ようになる。

a) I. Korn[3], B. Sklar[4]の近似式

$$P_{b,M} \cong \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right) \quad (3)$$

b) J. Lu, K.B. Letaief, J.C.-I. Chuang, M.L. Liou の近似式[5]

$$P_{b,M} \cong \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \operatorname{erfc} \left( (2 \cdot i - 1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right) \quad (4)$$

c) L.-L. Yang, L. Hanzo の近似式[6]

$$P_{b,M} \cong \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right) + \frac{\sqrt{M}-2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( 3 \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right) \quad (5)$$

以上の式(1)及び式(3)から式(5)を1ビット当りの SN 比  $E_b/N_0$  の低い領域で計算した結果の一例として、256値 QAM の場合の BER を図2に示す。横軸の  $E_b/N_0$  を -10 dB から +10 dB に取っている。図2からわかるように、L.-L. Yang と L. Hanzo の近似式(5)が最も良好な近似であると判断できる。また、I. Korn や B. Sklar の近似式(3)は全ての SN 比の領域で常に低い値が出てくる。J. Lu らの近似式(4)は  $E_b/N_0 < -5$  dB の領域で  $P_{b,M}$  が 1/2 を超えてそのような低 SN 比の領域ではこの近似式は使えないと理解できる。図には  $E_b/N_0 > 10$  dB の結果は示されていないが、そのような高 SN 比の領域ではどの近似式も良好な値を与える。

### 3. レイリーフェージングチャネルにおける M-QAM の BER

#### 3.1 シングルチャネル受信

D. Yoon と K. Cho らの M-QAM の BER の厳密式をもとにレイリーフェージングチャネルにおける BER を求める。フェージングチャネルにおいては、上記で  $E_b/N_0$  と書いていた SN 比は瞬時的な値でありこれは

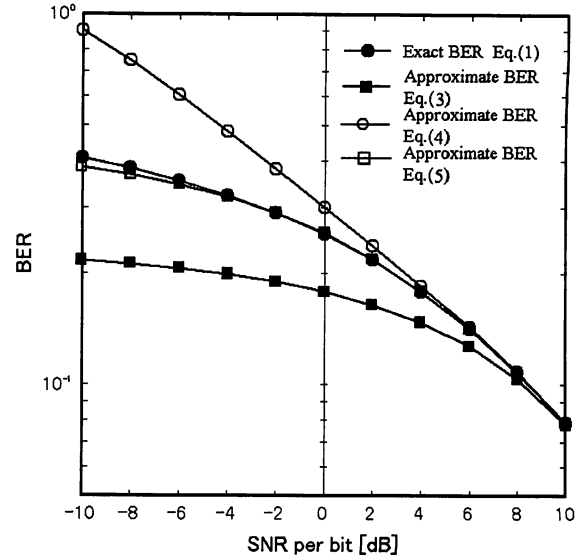


図2. 256 値 QAM の BER (厳密値と近似値)

ランダム変数であるから、それを  $\gamma_b = E_b/N_0$  とおく。レイリーフェージングの場合、 $\gamma_b$  の確率密度関数は次のような指数分布となる。

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\bar{\gamma}_b} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (6)$$

ここで、 $\bar{\gamma}_b$  は  $\gamma_b$  の平均値である。いま、フェージングは十分に低速なフラットフェージングであるとし、受信機においてフェージングチャネルの全パラメータの完全な推定が可能で、任意の多値数の M-QAM に対して同期検波が可能であるとする。そのような仮定の下では、レイリーフェージングチャネルにおける M-QAM の平均 BER  $\bar{P}_{b,M}$  は D. Yoon と K. Cho らの厳密式を  $\gamma_b$  の関数として  $P_{b,M}(\gamma_b)$  とおいて、それを  $\gamma_b$  の確率密度関数の式(6)で平均化して得られる。すなわち

$$\bar{P}_{b,M(\text{Rayleigh})} = \int_0^\infty P_{b,M}(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (7)$$

である。式(7)を計算した結果は

$$\bar{P}_{b,M(\text{Rayleigh})} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\frac{i+2^{k-1}}{\sqrt{M}}} \cdot \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2+i)^2 \alpha \bar{\gamma}_b}}} \right) \right\} \quad (8)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \quad (9)$$

とおいている。

式(8)の計算結果の一例として、 $M=16, 64, 256, 1024, 4096$  の場合の平均 BER を図 3 に示す。横軸は 1 ビット当りの平均 SN 比  $\bar{\gamma}_b$  である。

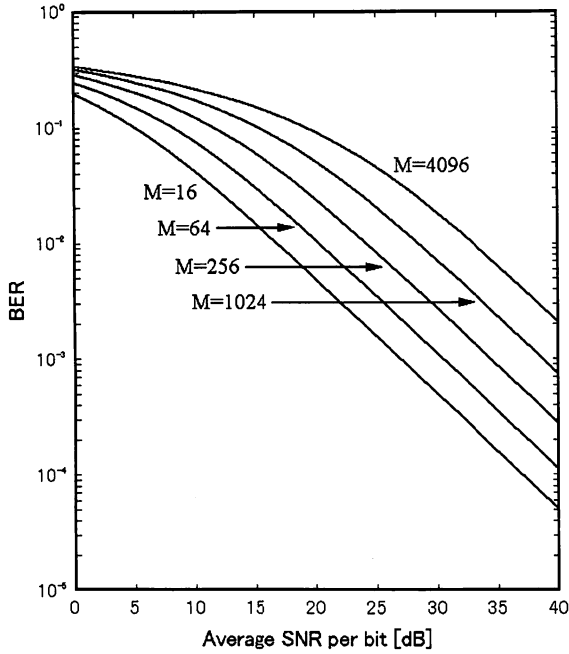


図 3. レイリーフェージングチャンネルにおける M-QAM の BER の計算例

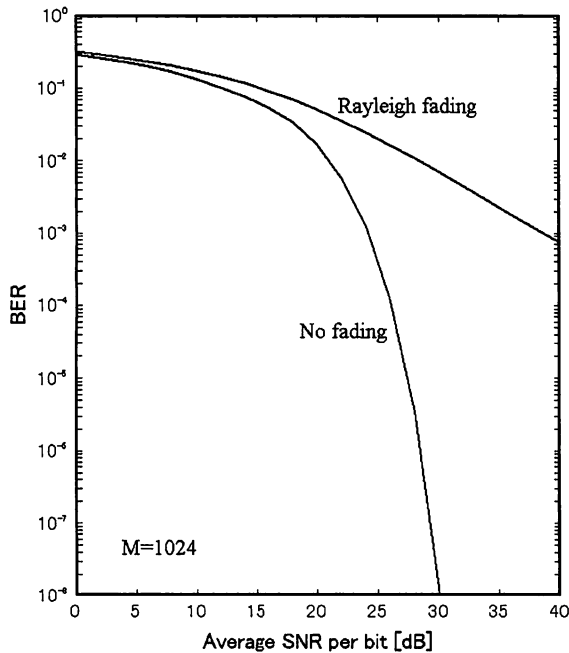


図 4. AWGN チャンネルとレイリーフェージングチャンネルにおける 1024 値 QAM の BER

また、図 4 は一例として  $M=1024$  値の QAM の BER を AWGN チャンネル (フェージングなし) の場合とレイリーフェージングチャンネルの場合を比較のために併記したものである。平均 BER  $\bar{P}_{b,1024} = 10^{-3}$  において 14dB 以上、 $\bar{P}_{b,1024} = 10^{-4}$  においては 22dB 以上の SN 比劣化 (同一 BER を与えるのに必要なシステムマージン) があるのでダイバーシチ受信、誤り訂正符号などなんらかのフェージング対策が必要である。

L.-L. Yang と L. Hanzo の近似式をもとに求めたレイリーフェージングチャンネルの場合の M-QAM の BER を厳密値と比較して表 1 に示す。

表 1. 厳密値と Yang, Hanzo の近似式に基づく M-QAM の BER (レイリーフェージングチャンネル)

Ave.SNR	M	Exact BER	Approx. BER
0 dB	16	$1.9757 \times 10^{-1}$	$2.0339 \times 10^{-1}$
	64	$2.4706 \times 10^{-1}$	$2.5105 \times 10^{-1}$
	256	$2.8903 \times 10^{-1}$	$2.8412 \times 10^{-1}$
	1024	$3.1955 \times 10^{-1}$	$2.9394 \times 10^{-1}$
	4096	$3.4119 \times 10^{-1}$	$2.8317 \times 10^{-1}$
10 dB	16	$4.2371 \times 10^{-2}$	$4.2991 \times 10^{-2}$
	64	$7.6680 \times 10^{-2}$	$7.7158 \times 10^{-2}$
	256	$1.2423 \times 10^{-1}$	$1.2379 \times 10^{-1}$
	1024	$1.7402 \times 10^{-1}$	$1.7054 \times 10^{-1}$
	4096	$2.1784 \times 10^{-1}$	$2.0589 \times 10^{-1}$
20 dB	16	$4.8854 \times 10^{-3}$	$4.9479 \times 10^{-3}$
	64	$1.0620 \times 10^{-2}$	$1.0668 \times 10^{-2}$
	256	$2.4107 \times 10^{-2}$	$2.4064 \times 10^{-2}$
	1024	$5.1438 \times 10^{-2}$	$5.1082 \times 10^{-2}$
	4096	$9.1965 \times 10^{-2}$	$9.0611 \times 10^{-2}$
30 dB	16	$4.9634 \times 10^{-4}$	$5.0259 \times 10^{-4}$
	64	$1.1078 \times 10^{-3}$	$1.1127 \times 10^{-3}$
	256	$2.7133 \times 10^{-3}$	$2.7090 \times 10^{-3}$
	1024	$7.0292 \times 10^{-3}$	$6.9935 \times 10^{-3}$
	4096	$1.8122 \times 10^{-2}$	$1.7985 \times 10^{-2}$
40 dB	16	$4.9713 \times 10^{-5}$	$5.0338 \times 10^{-5}$
	64	$1.1126 \times 10^{-4}$	$1.1175 \times 10^{-4}$
	256	$2.7487 \times 10^{-4}$	$2.7445 \times 10^{-4}$
	1024	$7.3190 \times 10^{-4}$	$7.2833 \times 10^{-4}$
	4096	$2.0524 \times 10^{-3}$	$2.0386 \times 10^{-3}$

Yang と Hanzo の近似式に基づいて求めた BER は、厳密値に比べて 64 値以下ではわずかに高めに、また 256 値以上ではわずかに低めに出ている。相対誤差は平均 SN 比や多値数  $M$  によりばらつきがあるが、多くの場合に相対誤差  $10^{-2}$  以下で実用的な SN 比の範囲 (実用上は所要回線品質を満足する必要があるが、たとえば

平均 BER  $10^{-2}$  以下を想定してそのような BER を与えるような SN 比の範囲という意味) においては十分に良好な M-QAM の BER 近似計算式として使うことができる。

### 3. 2 マルチチャネル (ダイバーシチ) 受信

この節ではレイリーフェージングチャネルにおいてマルチチャネル (すなわちダイバーシチ) 受信する場合の M-QAM の BER を考える。ここでは合成後の受信信号 SN 比が最大になる意味で最適なダイバーシチ合成法である最大比合成 (Maximal Ratio Combining, MRC) ダイバーシチ受信とする。いま, ダイバーシチの各ブランチの受信信号は独立で同一統計に従うレイリーフェージングを受けるものとする。MRC 合成後のトータルのビット当りの SN 比を  $\gamma_{b,i}$  と書くと,  $\gamma_{b,i}$  は各ブランチの SN 比の和

$$\gamma_{b,i} = \sum_{l=1}^L \gamma_{b,l} \quad (10)$$

で与えられる。ここで,  $\gamma_{b,l}$  は各ブランチでの 1 ビット当りの SN 比,  $L$  はダイバーシチのブランチ数 (チャネル数) である。各ブランチのフェージングが独立・同一統計のレイリーフェージングであるとき,  $\gamma_{b,l}$  の確率密度関数は自由度  $2L$  の  $\chi^2$  (カイ 2 乗) 分布となり,

$$p(\gamma_{b,l}) = \frac{\gamma_{b,l}^{L-1}}{(L-1)! \bar{\gamma}_b^L} \exp\left(-\frac{\gamma_{b,l}}{\bar{\gamma}_b}\right) \quad (11)$$

と書ける。式(11)においては  $\bar{\gamma}_b$  はブランチ当りの 1 ビット当りの平均 SN 比である。このとき, 平均 BER は  $\gamma_{b,i}$  の関数としての式(1)の M-QAM の BER  $P_{b,M}(\gamma_{b,i})$  を式(11)で平均化して

$$P_{b,M(\text{MRC})} = \int_0^\infty P_{b,M}(\gamma_{b,i}) p(\gamma_{b,i}) d\gamma_{b,i} \quad (12)$$

より計算される。式(12)は文献[7]の式(4-14-5)を参考にして計算すると閉形式で求めることができ,

$$\bar{P}_{b,M(\text{MRC})} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{i+1}{\sqrt{M}} \rfloor} \left( 2^{k-1} - \left[ \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right] \right) \cdot \frac{(1-\mu)^L}{2^{L-1}} \sum_{l=0}^{L-1} \binom{L-1+l}{l} \cdot \left( \frac{1+\mu}{2} \right)^l \right\} \quad (13)$$

となる。ここで

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2 \cdot i + 1)^2 \alpha \bar{\gamma}_b}}}, \quad \begin{aligned} i &= 0, 1, 2, \dots, (1-2^{-k})\sqrt{M} - 1 \\ k &= 1, 2, \dots, \log_2 \sqrt{M} \end{aligned} \quad (14)$$

である。

$M = 256, 1024, 4096$  値に対して式(13)を計算した結果の例を図 5, 6, 7 に示す。横軸は  $\bar{\gamma}_b$  である。ダイバーシチブランチ数は  $L=2, 4$  の場合を計算した。図中には比較のために  $L=1$ , すなわちダイバーシチなし (シングルチャネル受信) の場合を併記している。

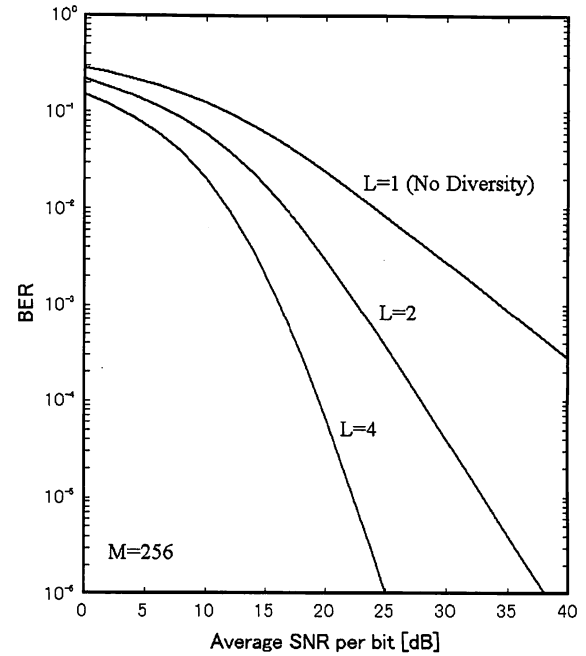


図 5. MRC ダイバーシチ受信の場合の BER (256 値 QAM)

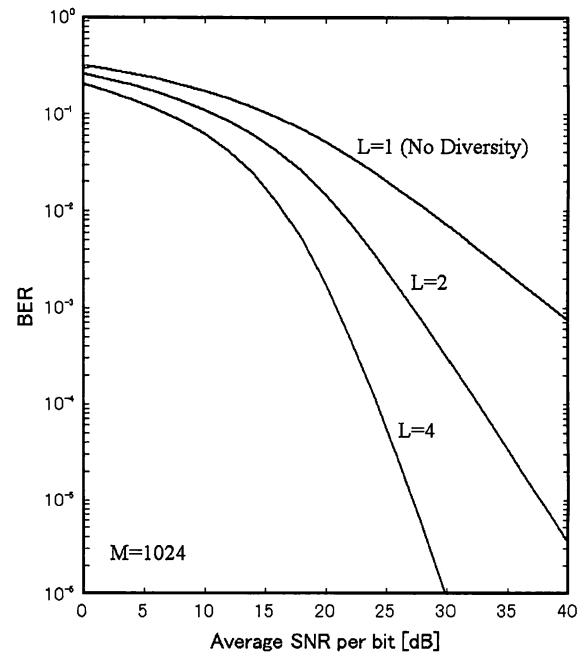


図 6. MRC ダイバーシチ受信の場合の BER (1024 値 QAM)

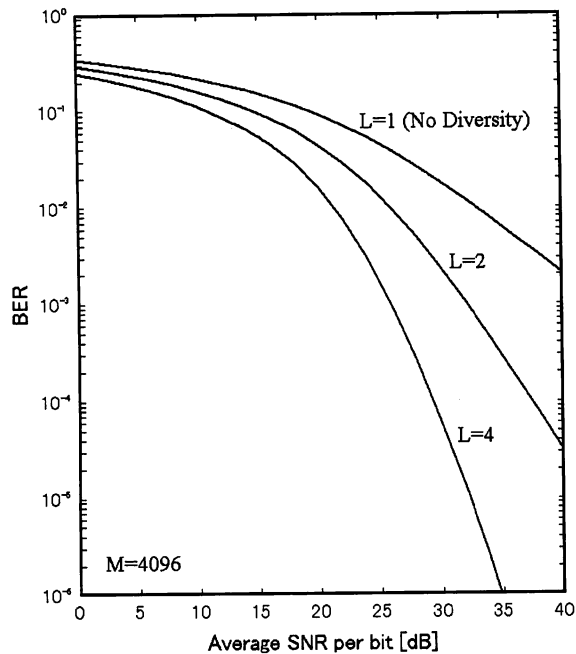


図 7. MRC ダイバーシチ受信の場合の BER (4096 値 QAM)

ダイバーシチ受信することによって BER 特性が大きく改善されることがわかる。平均 BER  $\bar{P}_{b,M(MRC)} = 10^{-3}$  において、ダイバーシチなしに対して  $L=2$  の場合に 11dB から 12dB,  $L=4$  の場合に 17.5dB から 18dB のダイバーシチ利得 (同一 BER 与えるのに必要な平均 SN 比の低減量) が得られている。

#### 4. むすび

典型的なモバイル伝搬環境であるレイリーフェージングチャネルにおいて、M-QAM の BER を AWGN チャネルにおける厳密式に基づいて計算した。BER はダイバーシチを用いないシングルチャネル受信の場合と、MRC ダイバーシチ合成を用いるマルチチャネル受信

の場合について求めた。  $M=1024$  値や 4096 値のように非常に大きな多値数の場合の計算結果は文献に見当たらないので、有用な基礎資料になると思われる。フェージングチャネルにおいては AWGN チャネルの場合に比べて SN 比劣化が大きいが、ダイバーシチを用いることで改善でき、平均 BER  $\bar{P}_{b,M(MRC)} = 10^{-3}$  においてブランチ数 2 の場合で 11dB から 12dB, ブランチ数 4 の場合で 18dB のダイバーシチ利得が得られることがわかった。また、これまで M-QAM の BER を計算するときに用いられた 2, 3 の代表的な近似計算式について検討し、D. Yoon と K. Cho らの近似式に基づけば実用的な SN 比の範囲において良好な BER を与えることもわかった。

#### 参考文献

- [1] D. Yoon, K. Cho and J. Lee, "Bit Error Probability of M-ary Quadrature Amplitude Modulation," *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC 2000-Fall)* Boston, MA, vol. 5, September 2000, pp. 2422 – 2427.
- [2] K. Cho and D. Yoon, "On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 1074 – 1080, July 2002.
- [3] I. Korn, *Digital Communications*: Van Nostrand Reinhold, 1985.
- [4] B. Sklar, *Digital Communications*: Prentice-Hall, 1988.
- [5] J. Lu, K. B. Letaief, J. C.-I. Chuang and M. L. Liou, "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 181 – 184, Feb. 1999.
- [6] L.-L. Yang and L. Hanzo, "Recursive Algorithm for the Error Probability Evaluation of M-QAM," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 4, pp. 304 – 306, Oct. 2000.
- [7] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed.: McGraw-Hill, 1995.

# Bit Error Rate Performance of M-ary QAM over Rayleigh Fading Channel

Ken-ichi KONISHI

*Department of Information and Computer Engineering, Faculty of Engineering,  
Okayama University of Science,*

*1-1 Ridai-cho, Okayama 700-0005, Japan*

(Received September 27, 2006; accepted November 6, 2006)

In this paper, we first briefly review the exact closed-form expression and a few approximate expressions of the bit error rate (BER) of coherent M-ary square-shaped quadrature amplitude modulation (QAM) constellations with Gray coded bit mapping over the additive white Gaussian noise (AWGN) channel. Then we derive the exact closed-form expressions of BER of M-QAM over Rayleigh fading channel based on the exact BER expression for the AWGN. We consider multi-channel (diversity) reception as well as single-channel reception. The maximal ratio combining (MRC) is employed for the multi-channel receiver, and assuming independent, identically distributed Rayleigh fading. Perfectly known channel state information is assumed in evaluating the BER performance over fading channels.

**Keywords:** bit error rate (BER) performance; M-ary QAM; Gray coding; Rayleigh fading channel; maximum ratio combining (MRC); diversity reception.