

# 格子上の三点形の合同類別に関する一考察

宮 垣 嘉 也・島 田 英 之

岡山理科大学工学部情報工学科

(1996年10月7日 受理)

## 1. ま え が き

近年の計算機科学の発展にともない離散数学や組合せ論とそれらの応用に関する研究がますます盛んになっている<sup>1)</sup>。格子上の幾何学もその範ちゅうに入り、整数論の一部として早くから研究されてきた<sup>2)</sup>。これらの分野では、離散性からくる困難さの故に未解決の問題も多い<sup>3)</sup>。

本論文では、整数値のみをとる直交座標平面（2次元正方格子，以下単に格子）上で定義される拡張された三角形（以下，三点形と呼ぶ）を，合同性によって類別するとき，その類の数についての一つの上限式を与える。

## 2. 予備的事項

### 2.1 三点形と合同

有限な格子の座標  $(x, y)$  を図1のように定める。 $0 \leq x \leq m-1, 0 \leq y \leq n-1, 1 \leq n \leq m$  である。この格子上の異なる3点よりなる図形を三点形(tripoint)と呼ぶことにする。3点を直線で結ぶと，図中(a)のように通常の三角形の場合もあれば，(b)のように同上直線上に並ぶ場合もあるので，三点形は一種の拡張された三角形といえる。

格子上で距離が定義されているものとする。この論文では，2点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  間の距離  $\overline{AB}$  は， $p$  を正の整数として次式(ミンコウスキの距離)で与えられるものとする。

$$\overline{AB} = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

2つの三点形において対応する3つの線分の長さが等しいとき，2つの三点形は合同と定義する。

以下では，図1の有限な格子（以下， $(m, n)$ -格子と記す）上のすべての三点形を合同性(congruity)によって類別するとき，その類の数の上限值を与える式  $N(m, n)$  を導く。

### 2.2 三点形の射影順列

#### 2.2.1 射影順列と合同性

$(m, n)$ -格子上のどんな三点形でも，平行移動，線対称移動の組合せによって，頂点の

1つを原点  $O(0, 0)$  に移動できる(移動が  $(m, n)$ -格子からはみ出すものであっても、最終的には  $(m, n)$ -格子上におさめることができる)。よって、頂点の1つが原点にある三点形のみを類別すればよい。三点形  $OAB$  の頂点を  $x$  軸上に正射影してできる点の座標を、小さい順に並べて順列  $(0, m_1, m_2) \triangleq m_x$  を定義し、 $x$  射影順列と呼ぶ。同様に、 $y$  射影順列  $n_y = (0, n_1, n_2)$  を定義する。 $1 \leq m_1 < m_2 \leq m - 1, 1 \leq n_1 < n_2 \leq n - 1$  である。図2に  $(8, 6)$  格子上の例を示す。射影順列ペア ( $x$  射影順列,  $y$  射影順列) の順に書く  $(m_x, n_y)$  と三点形の合同に関して、次の命題 (P) が成り立つ。

(P): 2組 ( $(m_x, n_y)$  と  $(m'_x, n'_y)$ ) の射影順列ペアから生成される三点形がすべて合同でないならば、それら2組の射影順列ペアは等しくない ( $m_x \neq m'_x$  または  $n_y \neq n'_y$ )。

(P) が正しいことは、その対偶を考えれば直ちに分る。従って、等しくない射影順列ペアを数え上げれば、合同でない三点形の数の上限値を知ることができる。

2.2.2 射影順列の数

本項では、射影順列  $k = (0, k_1, k_2)$  の類別とその数について要約する。1次元の有限  $(0 \leq x \leq L - 1)$  格子上の順列  $(x_1, x_2, \dots, x_i) (x_1 < x_2 < \dots < x_i)$  の類別とその数については、任意の  $L, i (1 \leq i < L)$  に対して既に与えられている<sup>4)</sup>。 $\{k\}$  は、 $i=3$  の場合に相当する。

(i)  $k = (0, k_1, k_2)$  に対し、 $(0, k_2 - k_1, k_2)$  なる射影順列を  $k$  の反転射影順列と呼び、 $\tilde{k}$  と書くことにする。

(ii) 異なる射影順列の総数は

$${}_{L-1}C_2 = (L-1)(L-2)/2 \triangleq a(L) \tag{2}$$

(iii)  $k = \tilde{k}$  となる  $k$  を対称射影順列といい、その個数を  $f(L)$  とすると、

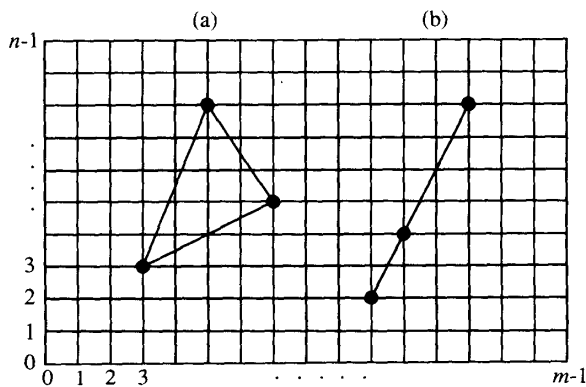


図1 有限な2次元正方格子と三点形  
(a) 三角形, (b) 拡張された三角形

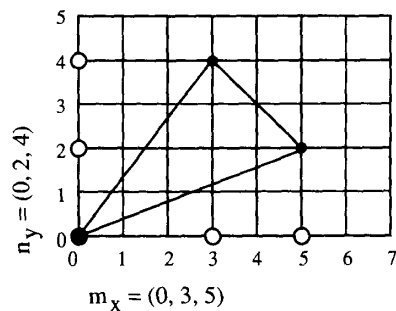


図2 三点形の射影順列  $(m_x, n_y)$  の例

$$f(L) = \begin{cases} (L-1)/2, & L = \text{奇数} \\ (L-2)/2, & L = \text{偶数} \end{cases} \quad (3)$$

(iv)  $k = \tilde{k}'$  のとき,  $k$  と  $k'$  は縮退して同一類とするととき, 異なる非対称射影順列の個数  $h(L)$  は

$$\begin{aligned} h(L) &= [a(L) - f(L)]/2 \\ &= \begin{cases} (L-1)(L-3)/4, & L = \text{奇数} \\ (L-2)^2/4, & L = \text{偶数} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

従って, 互いに反転関係にあるものは同一類と見なすとき, 異なる射影順列の総数は

$$b(L) = f(L) + h(L) = \begin{cases} (L-1)^2/4, & L = \text{奇数} \\ L(L-2)/4, & L = \text{偶数} \end{cases} \quad (5)$$

### 3. 三点形の合同類の上限式

この章では, 異なる射影順列ペアを数え上げる。2.2.1の命題(P)から分かるとおり, 射影順列ペアが異なる場合でも合同な三点形が存在しうるので, 緊密な上限値を与えるために, 重複を注意深く排除しなければならない。そのために三点形をその射影順列ペア  $(m_x, n_y)$  によって場合分けする。すなわち, 図3の(a)~(c)のように,  $m_x, n_y$  がともに3点の列である ((a) か,  $m_x$  または  $n_y$  が2点の列に縮退している ((b) か, 1点に縮退している ((c) か) によって, それぞれ, 3列三点形, 2列三点形, 1列三点形と呼んで区別する。各場合ごとに異なる (合同でない) 三点形の数を数え上げる。

#### 3.1 1列三点形の場合

$m \geq n$  なので異なる  $m_x$  を考えればよく, その数  $N_1$  は明らかに次式となる。

$$N_1 = b(m) \quad (6)$$

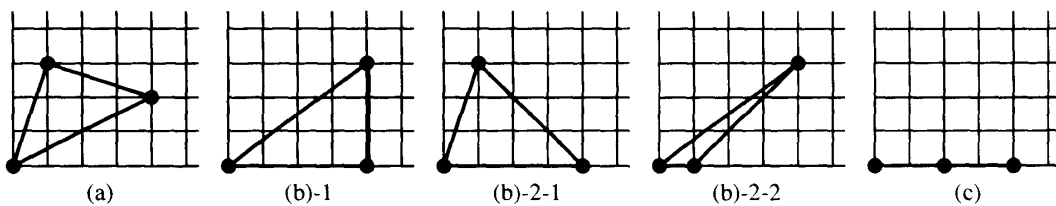


図3 三点形の区別  
(a) 3列三点形, (b) 2列三点形, (c) 1列三点形

### 3.2 2列三点形の場合

この三点形は、平行移動や線対称移動によってすべて、 $x$  軸上または  $y$  軸上に 2 つの頂点を置くようにすることができる。図 3(b) は  $x$  軸上に 2 頂点を置く例を示す。

#### 3.2.1 直角 2 列三点形の場合

2 列三点形のうち図 3(b)-1 のように、 $m_x, n_y$  がともに 2 点順列となるものを考える。 $m \geq n$  なので、図 3(b)-1 のように  $x$  軸上に 2 つの頂点を置くもののみを考えればよい。さらに、重複を避けるために第 3 の頂点 ( $x$  軸上にない頂点) が図 4 の斜線部および周上にあるもののみを考えればよい。逆に、そのような直角三角形はすべて異なっており、その数  $N_{21}$  は明らかに次式となる。

$$N_{21} = n(n-1)/2 + (m-n)(n-1) \quad (7)$$

#### 3.2.2 非直角 2 列三点形の場合

2 列三点形で図 3(b)-2 のように、 $m_x, n_y$  の一方が 3 点順列、他方が 2 点順列となるものを考える。

(i)  $m_x$  が 3 点順列、 $n_y$  が 2 点順列の場合 (2 頂点が  $x$  軸上にある場合) :  $m_1, m_2$  のどちらが  $x$  軸上の頂点かによって 2 通りに分かれ、異なる三点形を与える (例、図 3(b)-2-1 と (b)-2-2)。

(i)  $m_1$  が  $x$  軸上の頂点の場合

この場合、 $m_2$  の  $y$  座標は  $n-1$  個の異なる値をとりうるので、異なる三点形の数  $N_{221}$  は、次式となる。

$$N_{221} = (n-1)a(m) \quad (8)$$

(ii)  $m_2$  が  $x$  軸上の頂点の場合

この場合、 $m_1$  の  $y$  座標が  $n-1$  個の異なる値をとりうるが、同一の  $y$  座標に対して  $m_x$  と  $\bar{m}_x$  は合同な三点形を与える (図 5) ので、異なる三点形の数  $N_{222}$  は、次式で与えられる。

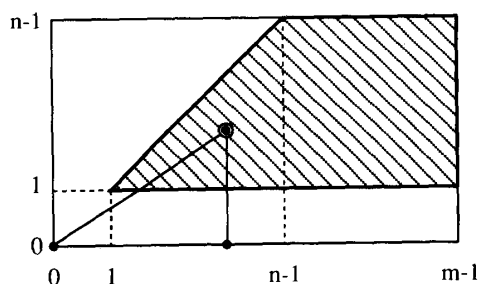


図 4  $x$  軸上に 2 頂点を置く異なる直角三点形の第 3 の頂点の存在範囲。

$$N_{222} = (n-1)b(m) \tag{9}$$

(ii)  $n_y$  が 3 点順列,  $m_x$  が 2 点順列の場合 (2 頂点が  $y$  軸上にある場合) : (i) との重複を避けるため, 第 3 の頂点 ( $y$  軸上にない頂点) の  $x$  座標が  $n+1 \leq x \leq m$  なる  $m-n$  個の異なる値をとる場合のみ考える。 $n_y$  について, (i) の (イ), (ロ) と同様に考えて, (ii) の異なる三点形の数  $N'_{22}$  は, 次式で与えられる。

$$N'_{22} = (m-n)[a(n) + b(n)] \tag{10}$$

以上, (7), (8), (9), (10) を合計して, 異なる 2 列三点形の総数  $N_2$  は, 次式となる。

$$N_2 = (n-1)[n/2 + a(m) + b(m)] + (m-n)[n-1 + a(n) + b(n)] \tag{11}$$

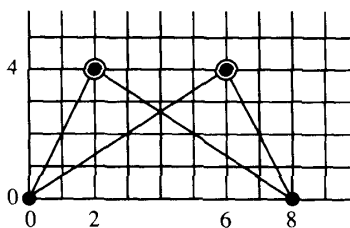
### 3.3 3 列三点形の場合

射影順列ペア  $(m_x, n_y)$  の型によって分類して考察する。一般に, 1 つの射影順列ペアからは, 異なる 2 つの三点形が生成される (図 6)。

#### 3.3.1 $m_x, n_y$ がともに対称射影順列である場合 (SS 型)

この場合,  $(m_x, n_y)$  の総数は,  $f(m)f(n)$  である。しかし,  $m_2 \leq n$  の場合 ( $[f(n)]^2$  個ある) には,  $m_x = n_y$  の場合 ( $f(n)$  個ある) を除いて  $(n_y, m_x)$  と重複するので, その分を減じる必要がある。よって, 異なる三点形の数  $N_{31}$  は, 次式となる。

$$N_{31} = 2 \{ f(m)f(n) - f(n)[f(n)-1]/2 \} = f(n)[2f(m) - f(n) + 1] \tag{12}$$



$$\begin{aligned} m_x &= (0, 2, 8) \\ m'_x &= (0, 6, 8) \\ &= \tilde{m}_x \end{aligned}$$

図 5  $m_x = \tilde{m}_x$  である 2 つの三点形は,  $m_2$  の頂点が  $x$  軸上にあるときは,  $m_1$  の  $y$  座標が等しければ合同となる。

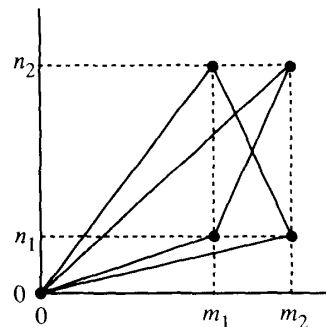


図 6 1 つの  $(m_x, n_y)$  から通常 2 つの三点形が生成される。

### 3.3.2 $m_x, n_y$ の一方が対称射影順列, 他方が非対称射影順列の場合 (SU 型)

まず,  $m_x$  が対称,  $n_y$  が非対称の場合を考える。ペアの組  $[(m_x, n_y), (m_x, \tilde{n}_y)]$  を考えると, 図7に例示するように4つの三点形が生成される。それらの中で合同なものが必ず1組あるので, 異なる三点形の数  $N_{321}$  は  $(m_x, n_y)$  の個数の3倍に等しい。すなわち

$$N_{321} = 3f(m)h(n) \quad (13)$$

次に,  $m_x$  が非対称,  $n_y$  が対称の場合も上記と同様に考えて, 異なる三点形の数 (13) で,  $m$  と  $n$  を入れ換えた値となる。ただし, 正方形  $0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$  内の三点形 ( $m_2 \leq n$ ) は2重に加算されている (その数は (13) で  $m \rightarrow n$  とした値) ので, その分を減じる必要がある。

結局, SU 型の場合の異なる三点形の数  $N_{32}$  は, 次式で与えられる。

$$N_{32} = 3[f(m)h(n) + f(n)h(m) - f(n)h(n)] \quad (14)$$

### 3.3.3 $m_x, n_y$ がともに非対称順列の場合 (UU 型)

図8に示すように, ペアの4つ組

$[(m_x, n_y), (\tilde{m}_x, n_y), (m_x, \tilde{n}_y), (\tilde{m}_x, \tilde{n}_y)]$  に対して, 一般に8つの三点形が生成される。このうち合同な三点形が2組存在する (図8では,  $OA_1B \equiv BA_4O, OA_2B \equiv BA_3O$ )。それ故, 異なる三点形の数, 一般に6つとなる。さらに,  $m_x = n_y$  の場合には, 上記の2組の合同な三点形の他に, もう1組 (図8では,  $OC_2D_1$  と  $OD_2C_1$ ) が合同となり, その場合には, 異なる三点形の数5つとなる。これらのことは, 容易に証明される。以上の考察により

#### (i) $m_x = n_y$ の場合

この場合, 上記のペアの4つ組の異なるものの数は, 反転順列を同一類としたときの異なる  $n_y$  の数に等しいので, 異なる三点形の数  $N_{331}$  は, 次式で与えられる。

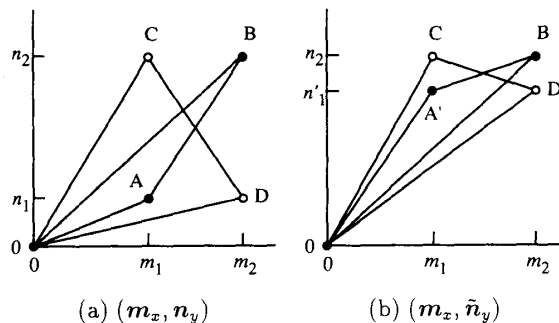


図7 SU 型の射影順列ペアの組  $[(m_x, n_y), (m_x, \tilde{n}_y)]$  から生成される3列三点形, ただし,  $m_x = \tilde{m}_x$ .  $OAB \equiv OA'B$  となる。

$$N_{331} = 5h(n) \tag{15}$$

(ii)  $m_x \neq n_y$  の場合

上記のペアの4つ組の異なるものの数は、反転順列を同一類としたときの異なる  $(m_x, n_y)$  の数に等しく、その数は  $h(m)h(n)$  である。このうち、正方形  $0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$  内においては、(i) の場合の数  $(h(n))$ ,  $(n_y, m_x)$  との重複数、の2つを減じる必要がある。よって、この場合の異なる三点形の数  $N_{332}$  は、次式で与えられる。

$$N_{332} = 6 \{ h(m)h(n) - h(n) - h(n)[h(n) - 1]/2 \} \tag{16}$$

よって、UU 型の場合の異なる三点形の数  $N_{33}$  は、(15), (16) を合わせて次式となる。

$$N_{33} = h(n) [6h(m) - 3h(n) + 2] \tag{17}$$

以上より、異なる3列三点形の数  $N_3$  は、(12), (14), (17) を合計して次式となる。

$$\begin{aligned} N_3 = & f(n) [2f(m) - f(n) + 1] \\ & + 3[f(m)h(n) + f(n)h(m) - f(n)h(n)] \\ & + h(n) [6h(m) - 3h(n) + 2] \end{aligned} \tag{18}$$

以上、3.1, 3.2, 3.3の結果より、三点形の合同類の数(上限値)は、最終的に次式によって与えられる。

$$N(m, n) = N_1 + N_2 + N_3 \tag{19}$$

#### 4. 考 察

$1 \leq n \leq m \leq 20$  の範囲で、 $N(m, n)$  の値と、 $p=2, 3, 4$  の場合の真値を求めた。真値は総当たり探索で合同類別した。その結果、 $p=2$ (ユークリッド距離)の場合、 $n \leq 3$  では常に上限値は真値を与え、その他では相対誤差は数%程度である。 $p=3$  の場合には、

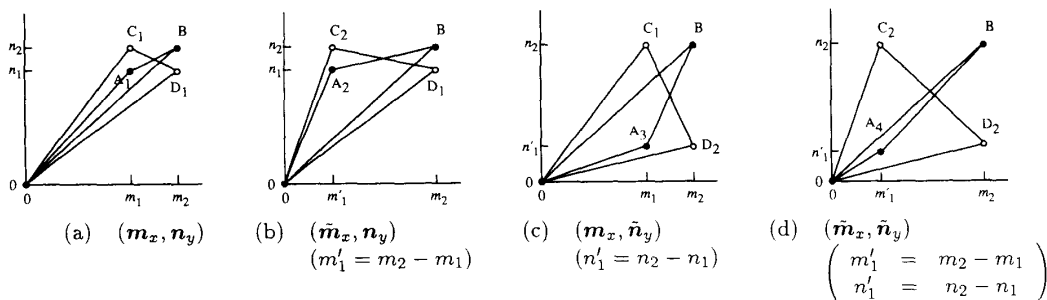


図8 UU 型の射影順列ペアの4つ組が作る8個の3列三点形のうち、2組が合同 ( $OA_1B \equiv BA_4O, OA_2B \equiv BA_3O$ ) となる。 $m_x = n_y$  の場合には、さらにもう1組 ( $OC_2D_1$  と  $OD_2C_1$ ) が合同となる。

$n \leq 9$  で上限値=真値となり、その他でも相対誤差は0.1%以下である。 $p=4$  の場合には、上記  $m, n$  の範囲では上限値は全て真値と一致する。参考までに表1に  $m=20$  の場合の数値を示す。

誤差の原因は、次式を満足する正整数の組  $(x, y, z)$  または  $(x, y, z, w)$  の存在にある。

$$x^p + y^p = z^p \quad (20)$$

$$x^p + y^p = z^p + w^p \quad (21)$$

(20) は、 $p=2$  の場合、ピタゴラス数であり、 $p \geq 3$  の場合、フェルマの大定理\*によって存在しない。(21) を満足するものの例として、 $p=2$  のとき  $(1, 7, 5, 5)$ 、 $p=3$  のとき  $(1, 12, 9, 10)$ 、 $(2, 16, 9, 15)$ 、 $p=4$  のとき  $(59, 158, 133, 134)$  などがある。図9、図10に、射影順列が異なるにもかかわらず合同となる三点形の例を示す。

表1  $m=20$  における上限値  $N(m, n)$  と真値

$n$	上限値 $N(20, n)$	真 値		
		$p=2$	$p=3$	$p=4$
1	90	90	90	90
2	370	370	370	370
3	944	944	944	944
4	1777	1775	1777	1777
5	2880	2869	2880	2880
6	4212	4180	4212	4212
7	5772	5694	5772	5772
8	7513	7372	7513	7513
9	9422	9199	9422	9422
10	11446	11125	11437	11446
11	13560	13134	13549	13560
12	15705	15139	15694	15705
13	17844	17184	17833	17844
14	19912	19143	19901	19912
15	21860	21023	21849	21860
16	23617	22740	23603	23617
17	25122	24222	25108	25122
18	26298	25379	26284	26298
19	27072	26150	27058	27072
20	27361	26439	27347	27361

\*1994年10月に証明された (アンドルー・ワイルズ, プリンストン大学数学年報)。



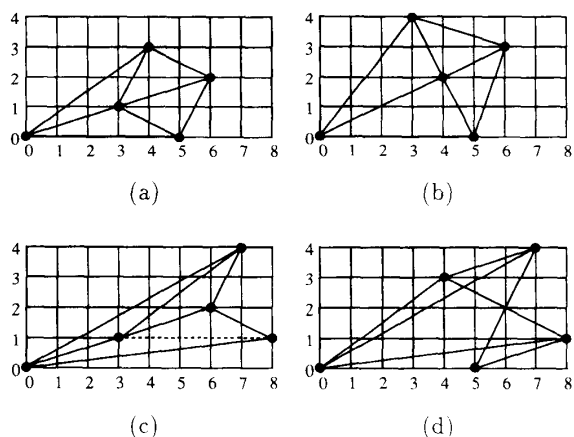


図9  $p=2, m=9, n=5$ において、誤差9の原因となる10組の合同三点形((c)中の1つは理論によって除去されていることに注意)、(a),(b)はピタゴラス数(3, 4, 5)、(c)は(1, 8, 4)、(d)は双方に起因する。

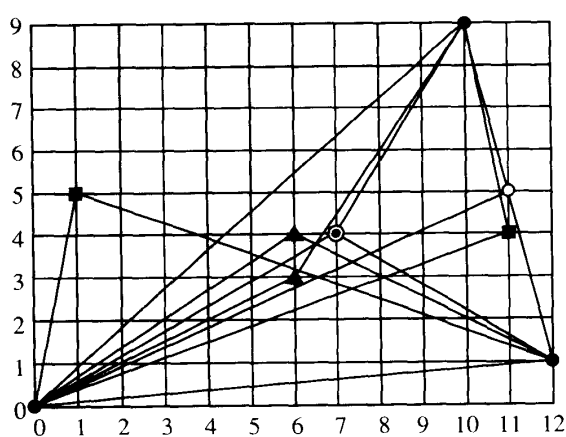


図10  $p=3, m=13, n=10$ において、誤差4の原因となる4組の合同三点形。これらは式(20)を満たす(1, 12, 9, 10)に起因する。

### 5. む す び

有限な2次元正方格子上で、拡張された三角形(三点形と称した)の合同類の数の上限値を与える式を導いた。それは真値に対するかなり緊密な近似値を与え、また、誤差の原因は整数論の問題と関連があることも分った。結果の応用については未知であるが、平面上のパターン認識、回路素子やアンテナの配置、2次元の相関問題などに応用が見い出されるかもしれない。

今後の課題として、真値を与える定式化が望まれるが、誤差の定式化が困難なので、難解である。計算幾何学的手法などで検討してみたい。

### 謝 辞

種々の教示をいただいた倉敷芸術科学大学の船倉武夫教授に謝意を表する。

### 文 献

- 1) 例えば、根井生也：“離散構造”，共立出版(1993).  
P. Frankl, 秋山 仁：“現代組合せ論”，共立出版(1987).  
F. P. プレパラータ, M. I. シェーモス(浅野孝夫, 浅野哲夫訳)：“計算幾何学入門”，総研出版(1992).
- 2) 例えば、高木貞治：“初等整数論講義 第2版”，pp.143-169, 共立出版(1987).  
河田敬義：“基礎数学 数論I”，pp.62-83, 岩波書店(1978).
- 3) F. トート(樋口伊佐夫, 種村正美訳)：“配置の問題”，みすず書房(1983).
- 4) 宮垣嘉也：“直線配列の数に関する二, 三の定理”，信学論(A), **J68-A**, 2, pp.226-227 (1985-02).

A note on the number of congruence classes  
for the tripoints on a finite  
two-dimensional rectangular lattice

Yoshiya MIYAGAKI and Hideyuki SHIMADA

*Faculty of Engineering,*

*Okayama University of Science,*

*Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan*

(Received October 7, 1996)

The formulation of the upper bound of the number of the congruence classes for the extended triangles (named tripoints) on a finite two-dimensional rectangular lattice  $((m, n), N(m, n))$  is derived. It provides a very tight bound to the true value. The result may have applications in the problems related to a pattern recognition, an allocation of circuit elements or antennas, and the two-dimensional correlation.