円柱対称性を有する Poincaré ゲージ理論の厳密解

山 岡 雅 一・中 力 眞 一*
岡山理科大学大学院理学研究科応用物理学専攻
*岡山理科大学理学部応用物理学科

（1995年 9 月30日　受理）

この論文において我々は，複素 Einstein-Yang-Mills 理論に帰着し得る Poincaré ゲージ理論の一つのモデルを取り上げ，円柱対称性の仮定の下に，通常の Einstein-Maxwell (EM) 理論における軸対称解の解法を応用して，Poincaré ゲージ理論の一つの厳密解が得られることを示す。また，我々の求めた解は，特別な場合として通常の EM 理論において Melvin 解として知られる厳密解を含むことを示す。

1．はじめに

R. Utiyama[1]によって創始され，T.W.B. Kibble[2]により完成されたいわゆる Poincaré ゲージ理論 (PGT) は，並進ゲージ場及び Lorentz ゲージ場の 2 種類のゲージ場を有する理論である。この理論は，更に K. Hayashi[3]により，2 種類のゲージ場の両方について，それらの場の強さより作られる 2 次までの不変量を10個の結合定数によって連結したものをラグランジュアンとして採用するという，より一般的な理論へと拡張された。

最近[4-6]，この Hayashi による理論は，10個の結合定数の間にある関係が成り立つとき，複素 Einstein-Yang-Mills (CEYM) 理論に帰着され得ることが，著者の一人 (S. Nakariki) により示された。我々は，この CEYM 理論より出発することにする。

CEYM 方程式は，次に示す Einstein 方程式と複素 Yang-Mills 方程式（括弧内に，それらの PGT における名称を示す。）の 2 つの方程式からなる方程式系である†。

$$
\begin{cases} 2a\hat{G}^{\mu\nu} = T_{(\mathrm{M})}{}^{\mu\nu} + T_{(\mathrm{L})}{}^{\mu\nu} & \text{(並進ゲージ場の方程式)} \\ \vec{\mathfrak{F}}^{\mu\nu}{}_{;\nu} - i\vec{\mathfrak{A}}_{\nu}\times\vec{\mathfrak{F}}^{\mu\nu} = \mathfrak{g}\,\vec{\mathfrak{S}}_{(\mathrm{M})}{}^{\mu} & \text{(Lorentz ゲージ場の方程式)} \end{cases} \tag{1.1}
$$

ここで，

$$
\vec{\mathfrak{F}}_{\mu\nu} = \vec{\mathfrak{A}}_{\nu,\mu} - \vec{\mathfrak{A}}_{\mu,\nu} - i\vec{\mathfrak{A}}_{\mu}\times\vec{\mathfrak{A}}_{\nu} \tag{1.2}
$$

これらの式は，Hayashi の理論より，次のパラメタ条件の下に導出されたものである。

---

† ここでは参考文献 5 で用いられている記法を採用している。

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = C_3 = 0, \\ 4a_1 = 3a_2 = 2a_4 = 24a_6, \quad 2a_3 = a_5, \\ g_1 = 2(a_1 + a_3), \quad g_2 = 0, \\ h_1 = 0, \quad h_2 = 2a_3 - a_4 \end{cases} \tag{1.3}$$

我々は，また，上の方程式を解くために次の恒等式（PGT における Bianchi 恒等式と呼ばれる）を補助的に用いる。

$$\vec{\mathfrak{F}}^{\dagger\mu\nu}{}_{;\nu} - i\vec{\mathfrak{A}}_\nu \times \vec{\mathfrak{F}}^{\dagger\mu\nu} = 0 \tag{1.4}$$

CEYM 方程式の解を得るために，まず，

$$\vec{\mathfrak{A}}_\mu = \vec{\beta}\,\mathfrak{A}_\mu$$

と置く。このとき，$\mathfrak{A}_\mu$ は，次の複素形式の Einstein-Maxwell 方程式（CEM 方程式）によって決定される。ただし，$\vec{\beta}$ は，ある複素 3 元定数ベクトルである。

$$\begin{cases} 2a\hat{G}^{\mu\nu} = T_{(\mathrm{M})}{}^{\mu\nu} + T_{(\mathrm{L})}{}^{\mu\nu} \\ \mathfrak{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \mathfrak{g}\vec{\beta}^{-1}\cdot\vec{\mathfrak{S}}_{(\mathrm{M})}{}^{\mu} \\ \mathfrak{F}^{\dagger\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

ここに，

$$\vec{\mathfrak{F}}_{\mu\nu} = \vec{\beta}\,\mathfrak{F}_{\mu\nu} \quad \text{with} \quad \mathfrak{F}_{\mu\nu} = \mathfrak{A}_{\nu,\mu} - \mathfrak{A}_{\mu,\nu} \tag{1.6}$$

以降の節で，(1.5) 式を円柱対称性の仮定の下に解いて行くわけであるが，まず，次の小節で複素 Maxwell 方程式を解き易いテトラッド形式を用いて解き，その結果を，次小節で用いて Einstein 方程式を解く，という順序で議論を進めて行きたいと思う。

2．円柱対称性をもつ解

2．1．複素 Einstein-Maxwell 方程式の解

我々は真空中における並進ゲージ場と Lorentz ゲージ場の振舞に関心があるので，以後，物質場（Matter）が無い場合に話しを制限して議論を進めて行くことにする。

Matter の無い場合 $\vec{\mathfrak{S}}_{(\mathrm{M})}{}^{\mu} = 0$，$T_{(\mathrm{M})}{}^{\mu\nu} = 0$ となり，この場合 CEM 方程式は，次に示す Lorentz ゲージ場を源にする Einstein 方程式と真空中における複素 Maxwell 方程式とから成る方程式系の形に書ける。

$$\hat{G}^{\mu\nu} = \kappa T_{(\mathrm{L})}{}^{\mu\nu} \quad \text{(Einstein 方程式)} \tag{2.1}$$

ここで，$\kappa \equiv 1/2a$ は，Einstein の重力定数であり，$T_{(\mathrm{L})}{}^{\mu\nu}$ は，次式で与えられる Lorentz ゲージ場のエネルギー・運動量テンソルである。

$$T_{(\mathrm{L})}{}^{\mu\nu} \equiv b_k{}^{\mu} b_m{}^{\nu} T_{(\mathrm{L})}{}^{km} = b_k{}^{\mu} b_m{}^{\nu} (-F_{pqn}{}^{k} \mathfrak{H}^{pqnm} + \eta^{km} L_{\mathrm{F}}) \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \\ \mathfrak{F}^{\dagger\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \end{cases} \quad (\text{複素 Maxwell 方程式}) \tag{2.3}$$

我々は算術的理由から複素 Maxwell 方程式を，次に与える複素テトラッド形式に書き直す。

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{km|n}\, \eta^{mn} = 0 \\ \mathfrak{F}_{km|n} + \mathfrak{F}_{mn|k} + \mathfrak{F}_{nk|m} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ここで，$\mathfrak{F}_{km}$ 等は対応するギリシャ添字の量 $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ 等の局所成分であり，それぞれテトラッド $b_k{}^{\mu}$ を用いて次の様に定義したものである。

$$\mathfrak{F}_{km} = b_k{}^{\mu} b_m{}^{\nu} \mathfrak{F}_{\mu\nu}$$
$$F_{km|n} \equiv b_k{}^{\mu} b_m{}^{\nu} b_n{}^{\lambda} F_{\mu\nu;\lambda}$$

また，η^{km} は Minkowski 計量である。

我々の目的のために，円柱対称性を考慮してテトラッド $b_k{}^{\mu}$ に対して，次の形のものを仮定する。

$$\begin{cases} b_0{}^{\mu} = (e^{u_1-u_2}, \ 0\ , \ 0\ , \ 0\ ) \\ b_1{}^{\mu} = (\ 0\ , \ e^{u_1-u_2}, \ 0\ , \ 0\ ) \\ b_2{}^{\mu} = (\ 0\ , \ 0\ , \ \dfrac{e^{u_1}}{r}, \ 0\ ) \\ b_3{}^{\mu} = (\ 0\ , \ 0\ , \ 0\ , \ e^{-u_1}) \end{cases} \tag{2.5}$$

ただし u_1, u_2 は共に r のみの関数である。このとき計量（メトリック）$g^{\mu\nu} \equiv b_k{}^{\mu} b_m{}^{\nu}$ は次のような形になる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= e^{-2u_1}[e^{2u_2}(dt^2 - dr^2) - r^2 d\varphi^2] - e^{2u_1} dz \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで $x^{\mu} \equiv \{t, r, \varphi, z\}$ とした。

更に，場の強さ $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ に対しても，軸対称性を考慮して次の形のものを仮定する。

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu} = \mathfrak{H}(r) \delta_{\mu}{}^{1} \delta_{\nu}{}^{2} \tag{2.7}$$

これをテトラッド形式で書くと，

$$\mathfrak{F}_{(1)(2)} = \frac{e^{2u_1-u_2}}{r} \mathfrak{H}(r), \quad (\text{他は全て } 0) \tag{2.8}$$

と書かれ，これを CM 方程式(2.4)に代入することによって，$\mathfrak{H}(r)$ についての方程式が得

られる。即ち，

$$2r\mathfrak{H}u_1'+r\mathfrak{H}'-\mathfrak{H}=0 \tag{2.9}$$

ここで，$\mathfrak{H}(r)$ は，一般に複素関数であるので，$\mathfrak{H}=H(r)\exp[i\varphi(r)]$（ただし $H(r)$ および，$\varphi(r)$ は実関数）と置いて上式に代入して解くと，次の結果が得られる。

$$\mathfrak{H}(r)=\mathfrak{H}_0 re^{-2u_1(r)},\quad \mathfrak{H}_0=\text{複素定数} \tag{2.10}$$

これより (1.6) 式を用いると，場の強さ $\vec{\mathfrak{F}}_{km}$ は，

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{F}}_{km}&=\vec{\beta}\frac{e^{2u_1-u_2}}{r}\mathfrak{H}(r)(\delta_k{}^1\delta_m{}^2-\delta_k{}^2\delta_m{}^1)\\&=\vec{\mathfrak{H}}_0e^{-u_2}\mathfrak{H}(r)(\delta_k{}^1\delta_m{}^2-\delta_k{}^2\delta_m{}^1)\end{aligned} \tag{2.11}$$

と書かれ，更に，これを本来のテンソル形に書き直せば，

$$F_{kmnp}:\begin{cases}F_{0a(1)(2)}=e^{-u_2}H_{01[a]}\\F_{ab(1)(2)}=\epsilon_{abc}e^{-u_2}H_{02[c]}\\\text{他は全て }0\end{cases} \tag{2.12}$$

となる。ここで $H_{01[a]}$, $H_{02[a]}$ はそれぞれ複素定数ベクトル $\vec{\mathfrak{H}}_0$ の実部の $[a]$-成分，および虚部の $[a]$-成分である。ただし，a, b, c は 1 から 3 までの値を取るものとする。

2．2．Einstein 方程式

前節の結果を用いて，Lorentz ゲージ場のエネルギー・運動量テンソル $T_{(\mathrm{L})}{}^{km}$ は，(2.2) 式により次のように計算される。

$$\begin{cases}T_{(\mathrm{L})}{}^{00}=T_{(\mathrm{L})}{}^{11}=T_{(\mathrm{L})}{}^{22}=-T_{(\mathrm{L})}{}^{33}=2(a_1+a_3)e^{-2u_2}(\vec{H}_{02}{}^2-\vec{H}_{01}{}^2)\\T_{(\mathrm{L})}{}^{km}=0\quad(\text{for } k\neq m)\end{cases} \tag{2.13}$$

これらの式から，明らかに $T_{(\mathrm{L})}=\eta_{km}T_{(\mathrm{L})}{}^{km}=0$ であることがわかる。従って，Einstein 方程式 (2.1) は次の 2 つの方程式に分解される。

$$\begin{cases}R^{km}=\kappa T_{(\mathrm{L})}{}^{km}\\R\quad=0\end{cases} \tag{2.14}$$

ここで，R^{km} は Ricci テンソル，R は Riemann スカラー曲率である。

この式より，次の 3 つの方程式が得られる。

$$\frac{e^{2u_1}}{r}(u_1'-u_2'+ru_1''-ru_2'')=2(a_1+a_3)\kappa(\vec{H}_{01}{}^2-\vec{H}_{02}{}^2) \tag{2.15}$$

$$\frac{e^{2u_1}}{r}(u_1'+u_2'+ru_1''-ru_2''-2ru_1'^2) = -2(a_1+a_3)\kappa(\vec{H}_{01}{}^2-\vec{H}_{02}{}^2) \tag{2.16}$$

$$\frac{e^{2u_1}}{r}(u_1'+ru_1'') = -2(a_1+a_3)\kappa(\vec{H}_{01}{}^2-\vec{H}_{02}{}^2) \tag{2.17}$$

また，下式より次の式が得られる。

$$ru_1''-ru_2''+u_1'-ru_1'^2 = 0 \tag{2.18}$$

この内(2.17)式は，直ちに積分できて次の結果が得られる。

$$e^{u_1} = \frac{\beta_0}{2c_1c_2}[r^{1-c_1}+c_2{}^2r^{1+c_1}] \tag{2.19}$$

また，この結果を(2.16)，(2.18)式に代入して，

$$u_2 = \int\frac{c_2{}^4(1+c_1)^2r^{2c_1}+(1-c_1)^2r^{-2c_1}+2c_2{}^2(1+c_1{}^2)}{r(r^{-c_1}+c_2{}^2r^{c_1})^2}dr+\text{const.} \tag{2.20}$$

が得られ，この積分も初等的に行うことができて，u_2 は，結局，

$$e^{u_2} = c_3r^{(1-c_1)^2}(1+c_2{}^2r^{2c_1})^2 \tag{2.21}$$

と求められる。ここで，c_1，c_2，c_3 は積分定数であり，また β_0 は，

$$\beta_0{}^2 \equiv 2(a_1+a_3)\kappa(\vec{H}_{02}{}^2-\vec{H}_{01}{}^2) \tag{2.22}$$

と置かれていることに注意されたい。

上の一般的な解の内で，ここでは特に $c_1=1$，$c_2=\beta_0/2$，$c_3=1$ なるときの解，即ち，

$$e^{u_1} = 1+\frac{\beta_0{}^2}{4}r^2 \tag{2.23}$$

$$e^{u_2} = \left(1+\frac{\beta_0{}^2}{4}r^2\right)^2 \tag{2.24}$$

なる解に注目したい。というのは，これは普通の Einstein-Maxwell 理論において Melvin 解[7]として知られる解に形の上で等しく，また物理的にも大変興味深いためである。従って，一般の場合についての議論は別の機会に譲り，この論文では以後，この特殊な場合についてのみ議論を進めて行きたいと思う。

今や我々の時空は(2.23)と(2.6)により，次の Melvin 解と同じ形の計量によって与えられる。

$$ds^2 = \left(1+\frac{\beta_0{}^2r^2}{4}\right)^2(dt^2-dr^2-dz^2)-\frac{r^2}{\left(1+\frac{\beta_0{}^2r^2}{4}\right)^2}d\varphi^2 \tag{2.25}$$

ただ，Melvin 解との違いは，我々の β_0 の定義式(2.22)から分かるように，$\beta_0{}^2$ が Melvin 解が 0 あるいは正の値のみしか取り得ない[†]のに対して，我々の場合は正，負，0 のいずれの値をも取る得る点にある。

2．3．Lorentz ゲージ場 $A_{km\mu}$

(2.11)式に(2.23)式を代入して，今や Lorentz ゲージ場の強さは次のように求まる。

$$\vec{\mathfrak{F}}_{km}=\frac{\vec{\mathfrak{H}}_0}{\left(1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}\right)^2}(\delta_k{}^1\delta_m{}^2-\delta_k{}^2\delta_m{}^1) \tag{2.26}$$

これを本来のテンソル形式で書くと，

$$F_{kmnp}:\begin{cases}F_{0a(1)(2)}=\dfrac{H_{01[a]}}{\left(1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}\right)^2}\\ F_{ab(1)(2)}=\epsilon_{abc}\dfrac{H_{02[c]}}{\left(1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}\right)^2}\\ \text{他は全て }0\end{cases} \tag{2.27}$$

と書かれる。

この強さを与える Lorentz ゲージ場 $A_{km\mu}$ は，円柱対称性から $\mathfrak{A}_r=\mathfrak{A}_z=0$ となり，またゲージ不変性（$\mathfrak{F}_{\mu\nu}=\mathfrak{A}_{\nu,\mu}-\mathfrak{A}_{\mu,\nu}$ はゲージ変換 $\mathfrak{A}_\mu\rightarrow\mathfrak{A}_\mu+\partial_\mu\chi$（$\chi$ は任意の複素関数）の下に不変）により $\mathfrak{A}_t=0$ とすることができるため，残りの一つの $\mathfrak{A}_\varphi$ は次式により求められる。

$$\mathfrak{F}_{12}=\mathfrak{A}_{\varphi,r}-\mathfrak{A}_{r,\varphi}=\mathfrak{A}_{\varphi,r}=\mathfrak{H}(r)=\frac{\mathfrak{H}_0r}{1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}} \tag{2.28}$$

こうして，これを解いて次の結果が得られる。

$$\mathfrak{A}_\varphi=\begin{cases}-\dfrac{2\mathfrak{H}_0}{\beta_0^2}\dfrac{1}{1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}} & (\beta_0^2\neq0)\\ \dfrac{1}{2}\mathfrak{H}_0r^2 & (\beta_0^2=0)\end{cases} \tag{2.29}$$

これをテンソル形式に書き直して，求める Lorentz ゲージ場 $A_{km\mu}$ に対する式が得られる。即ち，

$$A_{km\mu}:\begin{cases}A_{0a2}=-\dfrac{2H_{01[a]}}{\beta_0^2}\dfrac{1}{1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}}\\ A_{ab2}=-\epsilon_{abc}\dfrac{2H_{02[c]}}{\beta_0^2}\dfrac{1}{1+\frac{\beta_0^2r^2}{4}} & (\beta_0^2\neq0)\\ A_{km\mu}=0\quad\text{for }\mu=(0,\ 1,\ 3)\end{cases} \tag{2.30}$$

† Melvin 解では，β_0 は磁界の強さに比例する量である。

$$A_{km\mu}: \begin{cases} A_{0a2} = \frac{1}{2} H_{01[a]} r^2 \\ A_{ab2} = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} H_{02[c]} r^2 \\ A_{km\mu} = 0 \quad \text{for } \mu = (0,\ 1,\ 3) \end{cases} \qquad (\beta_0{}^2 = 0) \qquad (2.30)$$

後者は，時空が平らな特別な場合における解である。

3. おわりに

我々は，この論文において，CEYM 理論に帰着し得る Poincaré ゲージ理論の一つのモデルを考え，CEM 方程式を経由して，円柱対称性を有するPoincaré ゲージ理論の新たな一つの解を見出してきた。

我々の解は，特別な場合において，通常の EM 方程式の厳密解である Melvin 解に類似なものとなった。この解は，しかしながら，以下に示す点において Melvin 解に無い性質を含んでいる。即ち，時空構造は，我々の場合，$\beta_0{}^2 \equiv 2(a_1 + a_3)\kappa(\vec{H}_{02}{}^2 - \vec{H}_{01}{}^2)$ によって分類されるが，これは，明らかに，正，負，0 のいずれの値をも取ることができ，0 と正以外の値を取り得ない Melvin 解の場合とは大きく異なる。特に，負の場合の時空構造は，未だ知られていないタイプのものである。

また，同じ $\beta_0 = 0$ のときですら，時空は共に平坦なものとなるが，これは Melvin 解の場合は単に磁場が存在しないという理由によるものであるが，我々の場合は 2 種類の"磁場" が互いに重力に対して反対の効果を持ち，お互いに打ち消し合って時空の上に影響を及ぼさないという理由によるものと考えられる。

最後に，$\beta_0{}^2 < 0$ の場合における時空についての調査を行い，物理的対象として，これがどのような時空構造に対応するのかを考察することは今後の課題としたい。

References

1) R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
2) T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).
3) K. Hayashi, Prog. Theor. Phys. **39**, 494 (1968).
4) S. Nakariki, J. Math. Phys. **32**, 1612 (1991).
5) S. Nakariki, in *Proceedings of the 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* edited H. Sato and T. Nakamura (World Scientific Pub., 1992) 511.
6) S. Nakariki, M. Beppu and Y. Kazama, Bulle. Okayama Univ. Science, **29A**, 67 (1994).
7) M.A. Melvin, Phys. Letters **8**, 65 (1964).

A Cylindrically Symmetric Solution in Poincaré Gauge Theory

— Melvin-like Solution —

Masakazu YAMAOKA, Shin-ichi NAKARIKI
Department of Applied Physics,
Faculty of Science,
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1995)

In this paper we consider a model of Poincaré gauge theory which is reducible to the *complex* Einstein-Maxwell (CEM) theory via the *complex* Einstein-Yang-Mills theory, and investigate the possibility of exact solutions under the condition of cylindrical symmetry. In this purpose we apply a method by which one has gotten some solutions for the *ordinary* Einstein-Maxwell (OEM) theory. As a result, we get a general solution which includes Melvin solution known in OEM theory.