# 代理制約法の複数制約非線形ナップザック問題への適用

岩崎　彰典・亀高　哲夫*・太田垣博一**
仲川　勇二***・成久　洋之****

岡山理科大学情報処理センター
*岡山理科大学大学院工学研究科電子工学専攻
**岡山理科大学工学部電子工学科
***関西大学総合情報学部
****岡山理科大学工学部情報工学科

（1994年9月30日　受理）

## 1．まえがき

複数制約非線形ナップザック問題は工学応用上適用範囲が広いが厳密解を求めるのはかなり困難である。一方，単一制約非線形ナップザック問題は分枝限定法や動的計画法が開発され，かなり効率よく解くことができる。我々は，複数制約非線形ナップザック問題（原問題）に代理制約法を適用し，単一制約に直した非線形ナップザック問題（代理問題）に対して厳密解法を適用した。代理制約という考え方は，Glover[1] により初めて数理計画法の分野に取り入れられた。Luenberger[2] は，非線形計画問題が準凸問題であるときには，代理制約法によって生成される代理双対問題を解くことによって，与えられた問題を厳密に解き得ることを示した。

複数制約非線形ナップザック問題のような離散最適化問題に代理制約法を適用した場合には問題の離散性のために原問題の厳密解を得ることはできない。しかし，その解は原問題の最適値の上限値を与える。厳密解を得ることが困難である場合，上限値を求めることは工学応用上重要である。

我々は，代理問題の厳密解法としてモジュラアプローチ[3]を採用した。モジュラアプローチは，分枝限定法と動的計画法を改良したもので，変数分離可能な単一制約非線形ナップザック問題を効率よく解くことができる。

本論文では，複数制約非線形ナップザック問題に代理制約法とモジュラアプローチを適用して得られた最適値の上限値と，列挙法による最適値を比較し，品質のよい上限値を得ることができることを示す。

## 2．代理制約法

複数制約非線形ナップザック問題は次のように定式化される。

$$[\mathrm{K}] \qquad \text{maxmize} \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} f_n(x_n), \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad g_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{n \in N} g_{mn}(x_n) \leq b_m, \tag{2}$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n, \tag{3}$$

ここで，$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots, N\}$，$m \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m, \dots, M\}$，$\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, \dots, a_{nK_n}\}$。

この問題を分枝限定法（B&B）や動的計画法（DP）を適用して厳密解を求めることはかなり困難である。その理由は，B&B や DP では目的関数値と制約関数値の比（コスト係数）によって添字の順序の並べ換えができることを仮定している。ところが，複数制約非線形ナップザック問題は制約式が複数であるため，そのような並べ換えを行うことができないからである。

そこで，[K] に代理制約法を適用し，次のような代理双対問題 [SD] を考える。

$$[\mathrm{SD}] \qquad \min_u \max_x \{f(\boldsymbol{x}) : \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leq \beta\}, \tag{4}$$

ただし，

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \sum_{m \in M} u_m g_m(\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

$$\beta = \sum_{m \in M} u_m b_m, \tag{6}$$

$$\sum_{m \in M} u_m = 1, \quad u_m \geq 0. \tag{7}$$

$\boldsymbol{u}$ は代理乗数と呼ばれる。また，[SD] の厳密解を $\boldsymbol{x}^{SD}$，そのときの $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}^{SD}$ とする。

$\boldsymbol{x}^{SD}$ は [K] の最適値の上限値を与える。すなわち [K] の実行可能な解を $\boldsymbol{x}^{FEASIBLE}$ とすれば次式が成立する。

$$f(\boldsymbol{x}^{FEASIBLE}) \leq f(\boldsymbol{x}^{SD}). \tag{8}$$

なぜなら，[K] の実行可能領域を $\mathcal{F}^K$，[SD] の実行可能領域を $\mathcal{F}^{SD}$ とすれば，

$$\forall \boldsymbol{u} \text{ に対して } \mathcal{F}^K \subset \mathcal{F}^{SD} \tag{9}$$

が成立するからである。

また(8)式より $\boldsymbol{x}^{SD}$ が実行可能であれば，$\boldsymbol{x}^{OPT}$ を [K] の厳密解とすると，

$$\boldsymbol{x}^{OPT} = \boldsymbol{x}^{SD} \tag{10}$$

が成立する。

## 3．代理双対問題を解くためのアルゴリズム

代理双対問題［SD］を解くためには2つの解法が必要である。1つは，ある代理乗数 $\boldsymbol{u}$ を選んで生成される問題（代理問題）を厳密に解くための解法であり，もう1つはそこで得られた解の与える目的関数値を最少にするような $\boldsymbol{u}^{SD}$ を求めるための解法である。

### 3．1　モジュラアプローチ

代理問題は単一制約非線形ナップザック問題である。我々はその厳密解としてモジュラアプローチ（MA）を用いた。MA は単一制約で変数分離可能な問題を効率よく解くことができる。MA は DP と同様にボトムアップ的な手法であり，次の(1)，(2)の操作を変数の数が1つになるまで繰り返す。

(1)　各変数に対して深測操作を行い，各変数を構成する要素 $a_{n_k}$ の数を減らす。

(2)　複数の変数を統合して1つの変数にし，変数の数を減らす。

変数が1つになった問題から，与えられた問題の最適解を求めるのは容易である。

深測操作としては B&B の手法である，実行可能性操作，限界値操作，優越性操作を用いている。また，変数を統合するというのは次のように変数の要素集合 $\boldsymbol{A}_n$ の直積をとることを意味している。

$$\mathcal{A}_{NEW}=\mathcal{A}_i\times\mathcal{A}_j,(i,j\in N). \tag{12}$$

我々は，$\mathcal{A}_i$，$\mathcal{A}_j$ の選択方法として，その集合の要素数が最大のものと最少のものを選んで統合すれば，メモリ消費量が少なくしかも高速に解けることを見出している[4]。

### 3．2　COP アルゴリズム

代理問題を解くことによって得られた解の与える目的関数値を最少にするような $\boldsymbol{u}^{SD}$ を求めるための手法として，我々は COP（Cut-off Polyhedron）アルゴリズム[5]を用いた。$\boldsymbol{u}$ は $(M-1)$ 個の自由変数を持ち，その領域が形成する多面体を $U$ とする。COP は初期多面体 $U^1$ を与え，次の操作を繰り返し $\boldsymbol{u}^{SD}$ を求める。第 $i$ 番目の多面体を $U^i$ とする。

(1)　$U^i$ の重心 $\boldsymbol{u}^i$ を代理乗数として，MA によって代理問題の解 $\boldsymbol{x}^i$ を求める。

(2)　$\boldsymbol{x}^i$ を用いて切断面 $\varphi(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{x}^i)\leq\beta$ を求め，縮小された多面体 $U^{i+1}$ を得る。

$\boldsymbol{U}^{i+1}=\phi$ になったとき終了し，そのときの $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u}^{SD}$ となる。

## 4．計算機実験

本実験に用いた計算機は NEWS-5000VI（CAU R4000SC）である。本実験では $f_n$，$g_{mn}$ が整数値をとるように問題を乱数で発生させた。問題の規模は変数の数 $N$ を7，変数を構成する要素数 $K_n$ を10とした。これより大きな問題は列挙法では実用的な時間内に解くことができない。制約数 $M$ を2，3，5とし各300問を解いた結果を表1に示す。表には本手法による上限値と列挙法による最適値の差が0，1，2，3，4となったケースの頻度数を示している。それより大きい差が生じたケースはない。また，表の右端には列挙法に

表1　計算機実験結果（問題数300問）

| $f^U-f^E=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\overline{f^E}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M=2$ | 251 | 40 | 7 | 0 | 2 | 88.88 |
| $M=3$ | 210 | 79 | 11 | 0 | 0 | 86.12 |
| $M=5$ | 175 | 95 | 26 | 1 | 3 | 86.17 |

$f^U$：上限値，$f^E$：列挙法による最適値，$\overline{f^E}$列挙法による最適値の平均

よる最適値の平均を示す。かなり多くのケースで上限値と最適値が一致することがわかる。また，上限値と最適値の差を最適値からの相対誤差として評価した場合，その平均は0.5％であり，最大値は３％である。

## 5．む　す　び

本論文では，複数制約非線形ナップザック問題のように厳密に解くことが難しい問題に対し，代理制約法を適用することによって品質のよい上限値を容易に求めることができることを示した。筆者らは列挙法による最適値との比較はできないものの，変数の数50，変数を構成する要素数50，制約数３でも１分以内に解けることを確認している。

しかしながら，本手法による解は実行不可能である場合が多い。今後は，この方法を発展させ実行可能解をヒューリスティックな解法で見つける方法の開発を考えている。

## 参考文献


1）F. Glover："A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem", Operations Rsearch, **13**, pp. 879—919（1965）

2）D. G. Luenberger："Quasi-convex programming", SIAM Journal of Applied Mathematics, **16**, pp. 1090—1095（1968）

3）Y. Nakagawa："A New Method for Discrete Optimization Problems", Trans. IEICE, Vol. J**73**-A No. 3, pp. 550—556（1990）

4）Y. Nakagawa, M. Hikita, A. Iwasaki："A Farst Exact Method for the Multiple Choice Knapsack Problem", Trang. IEICE, Vol. J**75**-A No. 11, pp. 1752—1754（1992）

5）Y. Nakagawa, M. Hikita, H. Kamada："代理双対問題を解くためのアルゴリズム", Trans. IEICE, Vol. J**67**-A No. 1, pp. 53—59（1984）

# An Application of Surrogate Constraints Method to Multi-Dimensional Nonlinear Knapsack Problem

Akinori IWASAKI, Tetsuo KAMETAKE, Hirokazu OHTAGAKI, Yuji NAKAGAWA and Hiroyuki NARIHISA
*Information Processing Center,*
*Okayama University of Science,*
*Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan*
(Received September 30, 1994)

It is difficult to solve a class of multi-dimensional nonlinear knapsack problem by optimal solution method. We apply surrogate constraints method to a multi-dimensional nonlinear knapsack problem. Introducing a surrogate multiplier, the multi-dimensional nonlinear knapsack problem can be translated to the surrogate problem, which is one-dimensional nonlinear knapsack problem. The optimal solution of the surrogate problem provides upper bounds of the optimal value of given problem. It is important to obtain upper bounds of the optimal value of given problem in engineering application. The surrogate problem can be solved efficiently by Modular Approach. The computational experiments show that our method gives a high quality upper bonds of the optimal value of given problem.