

ロボットマニピュレータの最適軌道計画

逢坂 一正*・倉橋 康浩**

*岡山理科大学工学部機械工学科

**牧野フライス製作所

(昭和63年9月30日 受理)

1. はじめに

工業用ロボットの多機能化とその進歩には目をみはるものがあり、さらに知能ロボットに対する関心も高まり一部には実用化されつつある。このような工業用ロボットで実際に仕事を行う部分はマニピュレータ部である。したがってロボットマニピュレータの制御問題は非常に重要で、これに関する研究は非常に多い。従来のサーボ機構での位置、速度のフィードバックによるPID制御、これに重力補償や姿勢による慣性モーメントの大まかな変化を考慮した制御、あるいは干渉をもつ多変数系の制御問題として各関節間の干渉を考慮して協調をはかることを明確にした制御、運動速度分解制御、加速度分解制御、適応制御、学習制御など¹⁾がある。

これらの制御を行うとき、マニピュレータの目標軌道は前もって決まっているのが普通である。この目標軌道を決める軌道計画問題については、関節座標系で空間経路が与えられる場合に経路の移動量を用いて簡単なアルゴリズムで最短時間軌道を求めるShinらの報告²⁾、一般的な評価関数の場合に動的計画法を用いるVukobratovicらの報告³⁾などがある。文献2は最短時間軌道しか求まらないが、文献3は一般的な評価関数を考えているので一般性がある。

本報告では、一般的な評価関数に基づく最適軌道計画問題を設定し、文献3とは異なる手法、最大傾斜法を用いて問題を解く手法を提案する。ロボットの作業空間においてマニピュレータのワーク運搬動作を想定し、エンドエフェクターの始点、終点の座標が与えられた場合の最適軌道を求める問題を検討する。得られた最適軌道の妥当性を3リンクモデルによる数値シミュレーションにより確認する。

2. 最適軌道計画問題

問題の対象とするマニピュレータの略図をFig. 1に示す。剛体リンクと回転形関節がそれぞれ n 個からなる直鎖状構造で、 n 番目のリンクの先端にエンドエフェクターが装着されるものとする。 i 番目($1 \leq i \leq n$)のリンクの質量を m_i 、関節間の長さを l_i とし、エンドエフェクターは質点と見なして質量を m_{n+1} とする。マニピュレータの2次元空間における

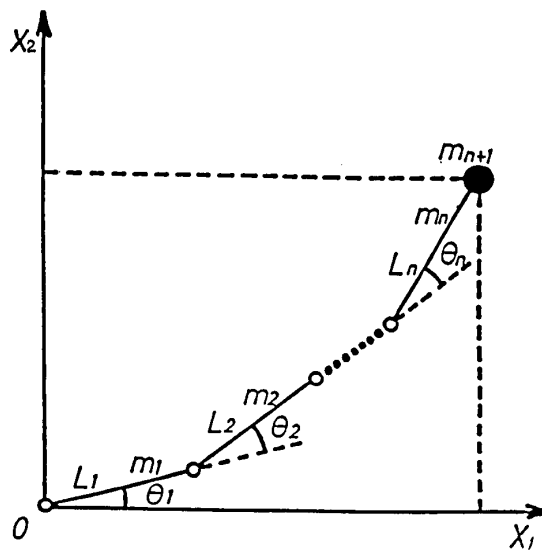


Fig. 1 N-link model of manipulators

運動と3次元空間における運動に本質的差異はないので、作業空間は一般には3次元であるが、簡単のため図のように2次元 (X_2 軸が重力方向) とする。

エンドエフェクターの座標位置 (Fig. 1の黒丸の座標位置) の始点 $X(O)$ 、終点 $X(T)$ の座標が与えられてマニピュレータを運動させる場合の最適軌道を求めることを考える。ここで、時間変数は $t \in [0, T]$ とする。

マニピュレータの運動方程式は次のように表される⁴⁾。

$$M(\theta) \ddot{\theta} + \dot{M}(\theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}' M(\theta) \dot{\theta}) + g(\theta) = \tau \quad (1)$$

ここで、 $'$ は転置を表し、 $\theta \in R^n$ は関節座標ベクトル、 $M(\theta) \in R^{n \times n}$ は慣性行列、 $\dot{M}(\theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}' M(\theta) \dot{\theta}) \in R^n$ はコリオリ力・遠心力ベクトル、 $g(\theta) \in R^n$ は重力ベクトル、 $\tau \in R^n$ は関節トルクベクトルである。

運動開始時、終了時でマニピュレータは完全に停止するものとして軌道の境界条件を次のように決める。

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0, \theta(T) = \theta_T \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}(T) = 0 \\ \ddot{\theta}(0) &= \ddot{\theta}(T) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 θ_0 は初期関節座標、 θ_T 終端関節座標である。

評価関数は次のような積分形のものを考える。

$$z = \int_0^T h(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) dt \quad (3)$$

ここで、 $h(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta)$ は凸で非負の関数である。

最適軌道計画は、一般に(2)式を制約条件として(3)式を最小にする関節座標ベクトル θ 、運動時間 T を求める問題であるが、本報告では、求まった θ を(1)式に代入して関節トルクベクトル τ も求めることにする。

作業空間座標 $X = (X_1, X_2)' \in R^2$ と θ の間には次の式が成立する。

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{i=1}^n l_i \cos\left(\sum_{j=i}^n \theta_j\right) \\ X_2 &= \sum_{i=1}^n l_i \sin\left(\sum_{j=i}^n \theta_j\right) \end{aligned} \quad (4)$$

θ が決まれば X は一意に決まるが、 $n > 2$ の構造ではその逆は成立しない。 X を与えて(4)式を満足する θ を決めるには何らかの適当な条件が必要である。それについてはシミュレーション結果で触れる。以後、 $(X(0), X(T))'$ を座標ベクトルと呼ぶ。

この最適軌道計画を次のような手法で行うことを提案する。境界条件(2)式を考慮して各リンクの $\dot{\theta}_i$ を次のように典型的な直交展開であるフーリエ級数に展開できるものとする。

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^m \left[a_{ij} \left(\cos \frac{2\pi j}{T} t - 1 \right) + b_{ij} \sin \frac{2\pi j}{T} t \right] \quad (5)$$

ここで、 i はリンク番号(1, 2, ..., n), j はフーリエ級数項番号(1, 2, ..., m), a_{ij} , b_{ij} はフーリエ係数である。いまフーリエ係数は(2)式を満足しなければならないことから次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij} \times T &= \theta_{i0} - \theta_{iT} \\ \sum_{j=1}^m (j \times b_{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 θ_{i0} , θ_{iT} は i 番目リンクの初期、終端関節座標である。つまり、本報告での最適軌道計画は、与えられる座標ベクトルに対して(4), (6)式を満足して(3)式を最小にするパラメータベクトル $(a_{ij}', b_{ij}', T)' \in R^{2nm+1}$ を求め、それらより関節トルクベクトル τ を求める問題となる。以後、 $(a_{ij}', b_{ij}', T)'$ を軌道ベクトルと呼ぶ。

この問題は非線形最適問題の一種で解析的には解が求まらない。そこで解を探索することにして、その探索法に最大傾斜法を用いることにする。つまり、評価関数 z は軌道ベクトルの非線形関数であり、 $2nm + 1$ 次元の軌道ベクトル空間の超平面である。

運動時間 T を適当な数に等分割して各時刻での軌道を探る概略の手順は次のようになる。

I. 初期時刻 $t = 0$ では(1)式の左辺は第3項の重力だけになるので、マニピュレータの重心が最も低くなる姿勢をとり、かつ(4)、(6)式を満足するように初期軌道ベクトルの a_{ij} 、 b_{ij} を決め、 T は十分に大きい値に決める。

II. 各時刻で z を a_{ij} 、 b_{ij} 、 T で偏微分して最大傾斜方向を求め、(6)式を満足させながら z を減少するように軌道ベクトルを修正する。

III. 各時刻での計算誤差の累積による $t = T$ での(4)式の誤差を解消するため、軌道ベクトルの a_{ij} 、 b_{ij} を微小修正して(4)式を満足させる。

IV. 解探索の収束条件を満足すれば、計算を終了し、満足しなければIIに戻り繰り返し計算する。

3. 数値シミュレーション

数値シミュレーションには運動の自由度に余裕のある3リンクモデル($n = 3$)を用いる。また各リンクは断面一様な剛体棒とする。ここで(1)式の計算に必要な $M(\theta)$ 、 $g(\theta)$ を求めておこう。対称な慣性行列 $M(\theta)$ の各成分は次式となる。

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)l_1^2 + \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3 + m_4\right)l_2^2 + \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2 + (m_2 + 2m_3 + 2m_4)l_1l_2 \cos \theta_2 + (m_3 + 2m_4)l_2l_3 \cos \theta_3 + (m_3 + 2m_4)l_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{12} = m_{21} = \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3 + m_4\right)l_2^2 + \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2 + \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)l_1l_2 \cos \theta_2 + (m_3 + 2m_4)l_2l_3 \cos \theta_3 + \left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)l_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{13} = m_{31} = \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2 + \left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)l_2l_3 \cos \theta_3 + \left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)l_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{22} = \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3 + m_4\right)l_2^2 + \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2 + (m_3 + 2m_4)l_2l_3 \cos \theta_3$$

$$m_{23} = m_{32} = \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2 + \left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)l_2l_3 \cos \theta_3$$

$$m_{33} = \left(\frac{1}{3}m_3 + m_4\right)l_3^2$$

また重力ベクトル $g(\theta) = (g_1 \ g_2 \ g_3)'$ の各成分は次式となる。

$$g_1 = g \left\{ \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)l_1 \cos \theta_1 + \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right)l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \left(\frac{1}{2}m_3 + m_4\right)l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\}$$

$$g_2 = g \left\{ \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) l_3 \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\}$$

$$g_3 = g \left(\frac{1}{2} m_3 + m_4 \right) l_3 \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

ここで、 g は重力加速度である。

マニピュレータの最適軌道を評価するには多くの項目が考えられるが、ここでは運動に要するエネルギーと運動時間最短を取り上げ、 $h(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta)$ の具体例として次式を採用する。

$$h(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = c_1 \tau' \tau + c_2 \tag{7}$$

ここで、 c_1, c_2 は正の定数である。この式の右辺第1項は運動エネルギーを第2項は運動時間最短を想定している。 c_1, c_2 の比を変えることでどちらに重点をおいて評価するかを選べる。

以下、シミュレーション結果について述べる。各リンクとエンドエフェクターの質量、長さを示す。 $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0.5, m_4 = 5$ (単位: kg), $l_1 = 0.3, l_2 = 0.25, l_3 = 0.15$ (単位: m)である。これらは人間の腕が5 kgのバーベルを上下することを想定している。解の収束条件は、繰り返し計算における軌道ベクトルの変動量の相対誤差の絶対値(下式)の平均値が 10^{-4} 以下になることが5回連続することとする。

$$\left| \frac{a_{ij}^{k+1} - a_{ij}^k}{a_{ij}^k} \right| \quad \left| \frac{b_{ij}^{k+1} - b_{ij}^k}{b_{ij}^k} \right| \quad \left| \frac{T^{k+1} - T^k}{T^k} \right|$$

ここで、 k は繰り返し計算回数を表す。

本格的な解探索の前にフーリエ展開の項数 m と運動時間の分割数を適当な値に決めなければならない。そこでまず m の評価関数 z に及ぼす影響を調べる。軌道ベクトルのうち、運動時間は $T = 4.6$ (単位: s)と固定した。座標ベクトル(0.7, 0.0, 0.0, 0.7)に対して第1リンクだけ運動させたときの z と m の関係を Fig. 2 に示す。ここで、 $c_1 = 1, c_2 = 10^5$ とした。また初期軌道ベクトルの a_{ij}, b_{ij} は全て0(単位: rad/s)とした。 m が5以上になると z の値はほとんど変化しなくなる。 m が小さいほど計算時間は短くてすむので以後は $m = 5$ を採用する。同様に運動時間の分割数も小さいほど計算時間は短くてすむので、この例で幾つかの場合を計算した結果、軌道ベクトルが充分滑らかさをもつ40を採用する。

座標ベクトルが指定されただけでは関節ベクトルは決まらない。いま、座標ベクトル(0.7, 0.0, 0.0, 0.2)において、 $X(O)$ は特異点なので1個の初期姿勢しかとれないが、 $X(T)$ に対しては8個の終端姿勢がある。これら終端姿勢による8個の局所解が考えられる。これらの局所解を得るには初期軌道ベクトルを変えて探索するよりしかたがない。8個全ての局所解を示すにはスペースをとりすぎるので、ここでは3個の局所解の各リンクの初期、終端時の関節ベクトル(単位: 度)と座標ベクトル、速度パターン、運動軌跡の略図、最

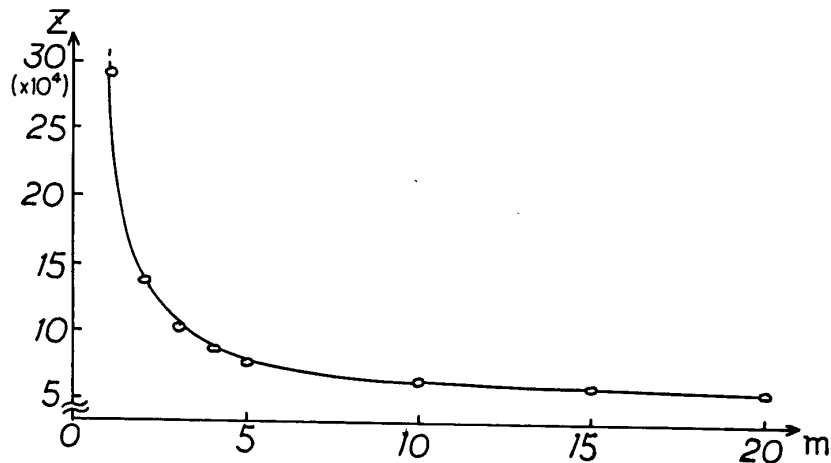
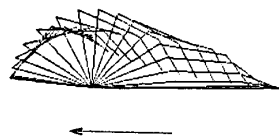


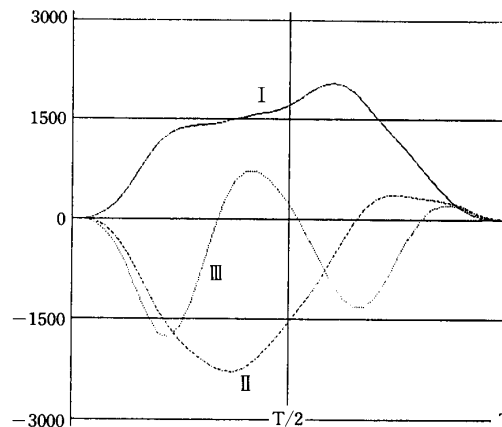
Fig. 2 Variation of performance index z vs. a function of Fourier coefficient number m

* 関節角度			* 位置		
	O	T		O	T
関節1	0.00	174.00	X ₁ 座標	0.7000	0.0000
関節2	0.00	-121.28	X ₂ 座標	0.0000	0.2000
関節3	0.00	64.36			

リンクの軌跡



関節角速度



J	A1	B1	A2	B2	A3	B3
1	-2.662	-0.012	2.319	-2.961	-0.096	-0.317
2	-0.579	0.495	-0.060	0.900	1.746	-1.915
3	0.056	-0.287	0.051	0.261	-0.203	1.040
4	0.009	-0.061	-0.052	0.018	-0.310	0.421
5	0.139	0.025	-0.141	0.061	-0.014	-0.131

Z 22766

Fig. 3 (a) A local optimal trajectory : performance index $z=22766$

適軌道ベクトルと評価関数 z を Fig. 3(a), (b), (c)に示す。ここで、 $c_1 = 1$, $c_2 = 10^5$ とし、初期軌道ベクトルの a_{ij} , b_{ij} は適当に設定し、 $T = 1$ とした。(a)は8個の姿勢のうちで z が最大であり、リンク1, 2, 3の回転方向がそれぞれ正, 負, 負である。(b)は8個の姿勢のうちで z がほぼ中間の値であり、回転方向はそれぞれ正, 正, 正である。 z が最小になるのは(c)であり、回転方向はそれぞれ負, 正, 負となった。この最適解はリンク系の運動軌跡ができるだけ短く、また重心の位置ができるだけ低い条件を満足しているので妥当な解であると思う。

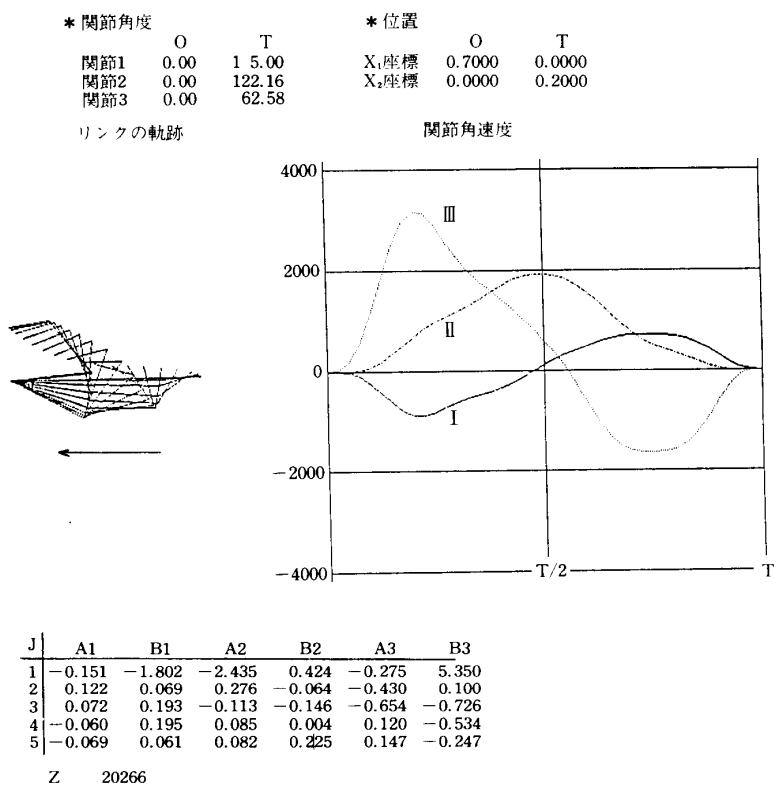


Fig. 3 (b) A local optimal trajectory : performance index $z=20266$

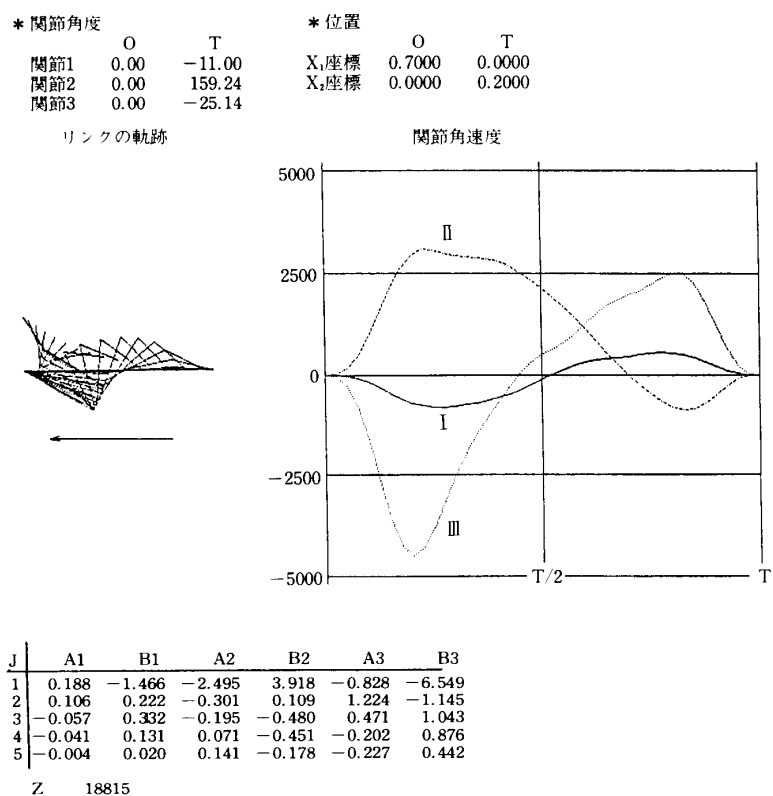
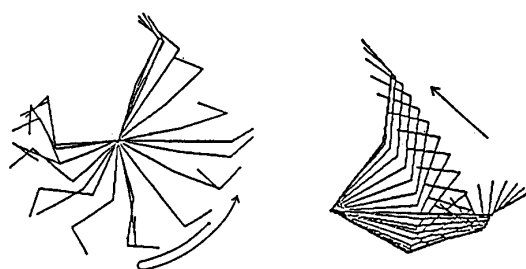
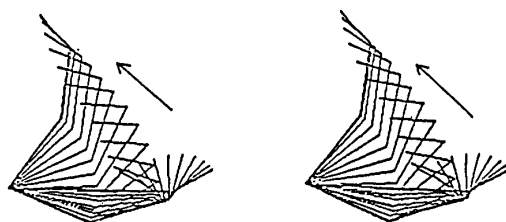


Fig. 3 (c) The global optimal trajectory : performance index $z=18815$



$$C_1=1, C_2=1 \quad T=1.900 \quad C_1=1, C_2=10^4 \quad T=0.330$$



$$C_1=1, C_2=10^5 \quad T=0.188 \quad C_1=1, C_2=10^6 \quad T=0.100$$

Fig. 4 Variations of the optimal trajectory for several pairs of performance index coefficients c_1, c_2

座標ベクトル $(0.68, 0.075, 0.100, 0.600)'$ に対し, (7)式で $c_1 = 1$ に固定し, c_2 を $1, 10^4, 10^5, 10^6$ と変えた場合の運動軌跡の略図を Fig. 4 に示す。ここで, 初期軌道ベクトルは $a_{31} = 0.575$ の他は a_{ij}, b_{ij} は全て 0 とし, $T = 1$ とした。 $c_2 = 1$ の場合は評価関数の運動に要するエネルギーに比重をかけたと思われる。この場合, 人間がボーリングの玉を投げるときのように一度振り下げてから [はずみ] をつけて振り上げる運動パターンになっている。運動時間に比重をかけたと思われるのが $c_2 = 10^6$ の場合の運動パターンである。また実際に人間がバーベルを持ち上げる場合の運動パターンは $c_2 = 10^5$ の場合に近いと思われるが, c_2 が $10^4, 10^5, 10^6$ の場合の運動パターンは基本的には同じパターンになっている。 $C_2 = 0$ の場合の過渡的な運動パターンはいわゆる [グルグル回り] のパターンになって安定な解が得られない。つまり運動に要するエネルギーだけで評価すると, 運動時間が無限に長い準静的な運動パターンが最適ということになる。

4. おわりに

ロボットマニピュレータの最適軌道計画問題を設定し, その軌道ベクトルを求めるのに最大値斜法を用いる解探索法を提案して数値シミュレーションを行った結果, 次のような結論が得られた。

- (1) シミュレーションでの数値例では, 提案した解探索法で解が得られる。

(2) 終端姿勢により局所解が存在するので、提案した解探索法で最適軌道を得るには初期ベクトル設定の試行錯誤が必要である。

(3) 評価関数の運動に要するエネルギー相当項と運動時間項の比重を変えると異なる運動モード（[はずみ] をつけるモードとつけないモード）が得られる。

(4) 計算繰り返し回数が500-800回程度と多くてかなりの計算時間を要する。

設定した問題に一般的な解が存在するという保障はない。しかし、物理的には実際に行われる問題設定になっているので、少なくとも準最適解が存在するものと考えている。これに関する検討と計算時間短縮に関する検討はこれからの課題である。

終わりにいつもご指導いただいている大阪府立大学の小野敏郎教授に感謝します。

参考文献

- 1) 計測自動制御学会：特集『ロボットアームの制御』，計測と制御，Vol.25，No. 1（1986）
- 2) K. G. Shin, N. D. McKay：A Dynamic Programming Approach to Trajectory Planning of Robotic Manipulators, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-31-6, pp. 491-500（1986）
- 3) M. Vukoburatovic, M. Kircanski：A Method for Optimal Synthesis of Manipulation Robot Trajectories, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol.104, pp. 188-193（1982）
- 4) 有本卓：ロボットの力学と制御-III，システムと制御，Vol. 29, No. 10, pp. 671-679（1986）

A Optimal Trajectory Planning of Robotic Manipulators

Kazumasa OHSAKA* and Yasuhiro KURAHASI**

**Department of Mechanical Engineering,*

Okayama University of Science,

1-1 Ridai-cho, Okayama 700, Japan

***MAKINO MILLING MACHINE Co. Ltd.*

4023 Nakatu, Aikawa-cho, Aikou-gun

Kanagawa, 243-03, Japan

(Received September 30, 1988)

This paper presents a method for optimal trajectory planning of robotic manipulators of which all joints are rotational. When the start and end points of end effector are given in the Cartesian coordinates, Fourier coefficients representing each joint velocity and interval of motion which specify the optimal trajectory in joint coordinates are searched by using the method of steepest descent.

As numerical examples, the trajectories of three-link manipulator are simulated. And it is confirmed that the optimal trajectory is generated by the proposed method.