

狭帯域不規則雑音を受ける非線形力学系の カオスの挙動について

太田 垣 博 一

岡山理科大学工学部電子工学科

(昭和63年9月30日 受理)

1. 緒 言

本論文においては、次の非線形確率微分方程式で表わされる力学系を取り扱う。

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - (\beta - \alpha x^2)x = F(t) \quad (1)$$

ここで α, β および δ はいずれも正定数で “ \cdot ” は d/dt を表わす。また $F(t)$ は次のように表わされる不規則入力である。

$$F(t) = f \cos(\lambda t) + \sigma \dot{\xi}(t) \quad (2)$$

ここで f, λ は F の周期成分の振幅と角周波数であり、 σ は不規則成分の雑音を意味する正定数、 $\dot{\xi}(t)$ は正規性白色雑音である。すなわち、 $F(t)$ は正弦波信号に変動量の小さい不規則雑音が重畳したいわゆる狭帯域不規則入力である。式(2)において $\sigma = 0$ とした確定力学系においてパラメータのある値に対してカオスの挙動が発生することが知られている。本研究では、微小な雑音が印加された式(1)の力学系の挙動を確率論的な立場から考察し、カオス現象発生の様相を明らかにする。 $x = x_1, \dot{x}_1 = x_2$ とすると、式(1)は

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 - \alpha x_1^3 + \varepsilon \{ \tilde{f} \cos(\lambda t) - \tilde{\delta} x_2 + \tilde{\sigma} \dot{\xi}(t) \} \quad (3)$$

となる。ただしここで $\varepsilon \tilde{\delta} = \delta, \varepsilon \tilde{f} = f, \varepsilon \tilde{\sigma} = \sigma$ であり、 $\varepsilon \geq 0$ は摂動を表わすパラメータである。式(3)において $\varepsilon = 0$ とすると、減衰、外力は消滅し、式(3)の力学系は保存系となる。このときの解を特に (x_{10}, x_{20}) と表わすと、原点は鞍点となり、原点を通る解曲線、すなわちパラトリックス Γ_0 の方程式は

$$\Gamma_0(x_{10}, x_{20}) = \frac{1}{2} x_{20}^2 - \frac{\beta}{2} x_{10}^2 + \frac{\alpha}{4} x_{10}^4 = 0 \quad (4)$$

で与えられる。式(4)の解 (x_{10}, x_{20}) は

$$\begin{aligned} x_{10}(t) &= \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \operatorname{sech}\{\sqrt{\beta}(t-t_0)\}, \\ x_{20}(t) &= \beta \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{sech}\{\sqrt{\beta}(t-t_0)\} \tanh\{\sqrt{\beta}(t-t_0)\} \end{aligned} \quad (5)$$

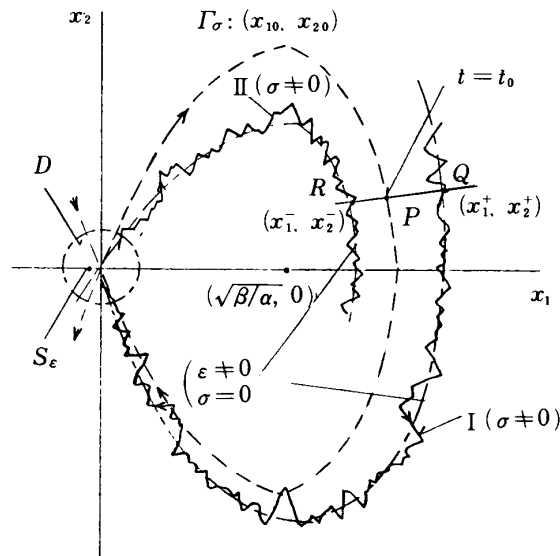


図1 確率システムの鞍点集合

と表わされる。次に $\varepsilon \neq 0$ であるが $\sigma = 0$ の場合を考える。ただし ε は非常に小さいとする。このとき式(3)の右辺第3項の $\varepsilon \delta x_2$ という減衰が存在するため、上述のセパトリックス Γ_0 は存在しなくなる。さらに周期外力 $f \cos(\lambda t)$ によって解軌道も原点に収束しなくなる。このとき周期外力の振幅 f がある値をとるとカオスの挙動と呼ばれる有界かつ一見不規則振動とみられる挙動を示すことが知られている⁴⁾。さらに $\sigma \neq 0$ の場合には、図1の実線で示したような解軌道は $\sigma \neq 0$ の場合の確定軌道（図1，一点鎖線）のまわりを揺動しながら原点の近傍に収束していくと考えられる。いま次のような仮定を設ける。

[仮定1] 式(3)で $\sigma = 0$ ， $\varepsilon > 0$ であるときの解を $x_{1\varepsilon}(t)$ ， $x_{2\varepsilon}(t)$ とするとき、

$$S_\varepsilon \in \lim_{t \rightarrow \infty} (x_{1\varepsilon}^+(t), x_{2\varepsilon}^+(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_{1\varepsilon}^-(t), x_{2\varepsilon}^-(t))$$

であるような鞍点集合 S_ε が存在する。（図1参照）

[仮定2] 式(3)で $\varepsilon > 0$ かつ σ が十分小さいときの解を $x_{1\sigma}(t)$ ， $x_{2\sigma}(t)$ とするとき、 S_ε の近傍において、次の条件

$$P_r\{\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{1\sigma}^+(t), x_{2\sigma}^+(t)) \in D\} = 1$$

および

$$P_r\{\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{1\sigma}^-(t), x_{2\sigma}^-(t)) \in D\} = 1$$

を同時に満たす領域 D が存在する ($S_\varepsilon \subset D$)。

すなわち D は確率システムにおける鞍点集合である。確定系において、安定多様体と不安定多様体が鞍点以外で交わるとき、この点をホモクリニック点といい、このようなホモクリニック点が存在すればシステムがカオスの挙動を呈示することが知られている⁷⁾。一方

確率系においては、式(3)の解軌道 I および II は確定系における安定多様体および不安定多様体が微小な不規則雑音によって振動されたものと考えられる。この場合の解軌道 I および II は次の仮定を満たすものとする。

[仮定 3] 任意の時刻 t_0 に対して、

$$P_r\{(x_{1\sigma^+}(t), x_{2\sigma^+}(t)) \subset \Gamma_\eta^{(s)}([t_0, \infty))\} = 1$$

および

$$P_r\{(x_{1\sigma^-}(t), x_{2\sigma^-}(t)) \subset \Gamma_\eta^{(u)}((-\infty, t_0])\} = 1$$

が成立する。ただしここで $\Gamma_\eta^{(s)}$ および $\Gamma_\eta^{(u)}$ は、確定系の安定多様体および不安定多様体上の解軌道 $(x_{1\epsilon^+}(t), x_{2\epsilon^+}(t))$, $(x_{1\epsilon^-}(t), x_{2\epsilon^-}(t))$ の η -近傍である。

$$\Gamma_\eta^{(s)}([t_0, \infty)) = \{(x_1, x_2) | \sqrt{(x_1 - x_{1\epsilon^+}(t))^2 + (x_2 - x_{2\epsilon^+}(t))^2} < \eta, \\ t \in [t_0, \infty)\}$$

$$\Gamma_\eta^{(u)}((-\infty, t_0]) = \{(x_1, x_2) | \sqrt{(x_1 - x_{1\epsilon^-}(t))^2 + (x_2 - x_{2\epsilon^-}(t))^2} < \eta, \\ t \in (-\infty, t_0]\}$$

ここで η は十分小さい正定数で、 $\eta = O(\sigma)$ である。

仮定 3 のもとで確定系のホモクリニック点に対応して、確率系のホモクリニック集合を定義する (図 2)。

[定義] 任意の時刻 $t = t_0$ において、集合 $\Gamma_\eta^{(s)}$ と $\Gamma_\eta^{(u)}$ に対して

$$\Gamma_\eta^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(u)} \neq \phi$$

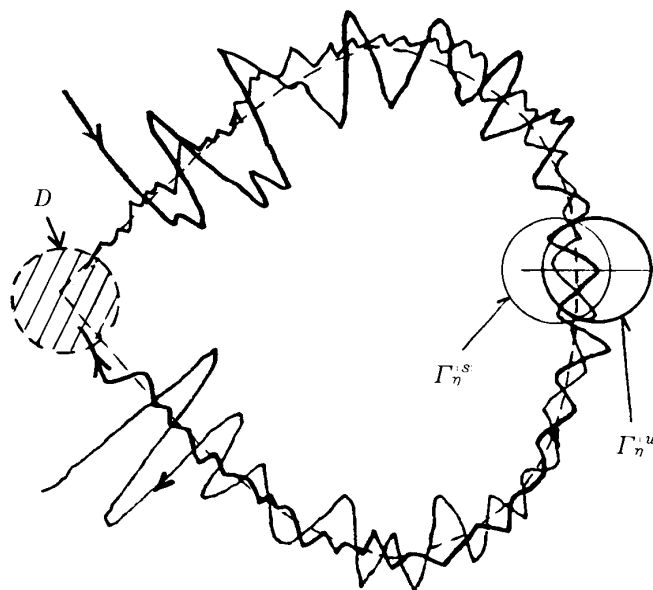


図 2 確率システムホモクリニック集合

が成立するとき、集合 $\Gamma_7^{(s)} \cap \Gamma_7^{(u)}$ を確率系のホモクリニック集合 (homoclinic set) という。

2. 確率系のホモクリニック集合

本節でメルニコフ (Mel'nikov) 関数の概念⁸⁾を式(3)のように不規則な振動を受ける力学系に拡張することによって、確率システムの場合のホモクリニック集合の発生を調べる。いま $t \rightarrow \pm\infty$ で領域 D に到達する摂動系 ($\varepsilon \neq 0, \sigma \neq 0$) の解曲線 ($x_{1\sigma^\pm}(t, t_0), x_{2\sigma^\pm}(t, t_0)$) を次のように近似する。

$$\begin{aligned} x_{1\sigma^\pm}(t, t_0) &\cong x_{10}(t, t_0) + \sqrt{\varepsilon} x_{11^\pm}(t, t_0) + \varepsilon x_{12^\pm}(t, t_0) \\ x_{2\sigma^\pm}(t, t_0) &\cong x_{20}(t, t_0) + \sqrt{\varepsilon} x_{21^\pm}(t, t_0) + \varepsilon x_{22^\pm}(t, t_0) \end{aligned} \quad (6)$$

また式(3)をつぎのように書き直しておく。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_0(x_1, x_2) + \sqrt{\varepsilon} p_1(x_1, x_2, \lambda t, \dot{\xi}) \\ \dot{x}_2 &= q_0(x_1, x_2) + \sqrt{\varepsilon} q_1(x_1, x_2, \lambda t, \dot{\xi}) \end{aligned} \quad (7)$$

ただしここで

$$\begin{aligned} p_0 &= x_{20}, \quad p_1 \equiv 0 \\ q_0 &= (\beta - \alpha x_{10}^2) x_{10}, \\ q_1 &= \sqrt{\varepsilon} [-3\alpha x_{11}^2 x_{10} + (\tilde{f} \cos(\lambda t) - \tilde{\delta} x_{20}) + \tilde{\sigma} \dot{\xi}] \end{aligned} \quad (8)$$

である。式(6)を式(7)に代入して ε について整理すると

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= x_{20}, \quad \dot{x}_{20} = \beta x_{10} - \alpha x_{10}^3 \\ \dot{x}_{11} &= x_{21}, \quad \dot{x}_{21} = (\beta - 3\alpha x_{10}^2) x_{11} + \sigma \dot{\xi} \\ \dot{x}_{12} &= x_{22}, \quad \dot{x}_{22} = (\beta - 3\alpha x_{10}^2) x_{12} - 3\alpha x_{11}^2 x_{10} + (\tilde{f} \cos(\lambda t) - \tilde{\delta} x_{20}) + \tilde{\sigma} \dot{\xi} \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。ただしここで \pm の符号は省略する。図 1 において、 Γ_0 上の点 $P(x_{10}, x_{20})$ を通り Γ_0 と直交する直線が軌道 I および II と交わる点をそれぞれ $Q(x_{1\sigma^+}(t_0), x_{2\sigma^+}(t_0))$ および $R(x_{1\sigma^-}(t_0), x_{2\sigma^-}(t_0))$ とすると、 \overline{PQ} および \overline{PR} は、いずれも曲線 Γ_0 からのアトラクタのずれを表わしている。いま点 R を基準にとったときのずれ \overline{RQ} を表わす量を $\Delta_\sigma(t_0)$ とすると

$$\Delta_\sigma(t_0) = -q_0(x_{10}, x_{20})[x_{1\sigma^+}(t_0) - x_{1\sigma^-}(t_0)] + p_0(x_{10}, x_{20})[x_{2\sigma^+}(t_0) - x_{2\sigma^-}(t_0)] \quad (10)$$

となる。ここで $\Delta_\sigma(t_0)$ を確率メルニコフ関数と呼ぶこととする。いま、式(10)の $\Delta_\sigma(t_0)$ を ε が十分小さい値であるとして次のように展開し、 $n = 2$ までで近似する。

$$\Delta_\sigma(t_0) = \sum_n \Delta^{(n)}(t_0) \sqrt{\varepsilon}^n \cong \sqrt{\varepsilon} \Delta^{(1)}(t_0) + \varepsilon \Delta^{(2)}(t_0) \quad (11)$$

式(11)の $\Delta_\sigma(t_0)$ は式(9)を用いて次のように計算される。(付録)

$$\overline{\Delta_\sigma(t_0)} \cong \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} [-\tilde{f} \cos(\lambda t) + \delta x_{20}] x_{20} dt + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} 3\alpha \overline{x_{11}^2(t)} x_{10} x_{20} dt \quad (12)$$

ここで $\overline{(\cdot)} = E\{\cdot\}$ を表わす。式(12)の x_{10} , x_{20} は式(5)で与えられており, x_{11} は式(9)第3式の確率微分方程式の解である。したがって, 式(12)の第1項は確定量の影響を表わし, 第2項は確率量の影響を表わしている。式(12)によると確率システムのホモクリニック集合の存在に対し, 次の定理が成立する。

[定理1] もし確率メルニコフ関数 $\Delta_\sigma(t_0)$ に対し, 次の条件

$$\max_{0 \leq t_0 < \infty} \overline{\Delta_\sigma(t_0)} > 0, \quad \min_{0 \leq t_0 < \infty} \overline{\Delta_\sigma(t_0)} < 0 \quad (13)$$

が成立するならば, 式(7)の力学系にホモクリニック集合が存在する。

(証明) ホモクリニック集合は存在するか, しないかのどちらかである。もしホモクリニック集合が存在しないならば, 定義1から $\Gamma_\eta^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(u)} = \phi$ が成立している。したがって集合 $\Gamma_\eta^{(s)}$ は点 $(\sqrt{\beta/a}, 0)$ からみて $\Gamma_\eta^{(u)}$ の外側にあるかまたは内側にある(図1, 2参照)。それゆえ, どんな t_0 に対しても

$$\Pr\left\{ \sup_{0 \leq t_0 < \infty} \Delta_\sigma(t_0) > 0 \right\} = 1 \quad (14-a)$$

または

$$\Pr\left\{ \sup_{0 \leq t_0 < \infty} \Delta_\sigma(t_0) < 0 \right\} = 1 \quad (14-b)$$

が成立しなければならない。式(14-a)(14-b)はそれぞれ

$$\min_{0 \leq t_0 < \infty} \overline{\Delta_\sigma(t_0)} > 0 \quad (15-a)$$

または

$$\max_{0 \leq t_0 < \infty} \overline{\Delta_\sigma(t_0)} < 0 \quad (15-b)$$

を意味しているが, 式(15)と定理の条件式(13)は両立しない。したがって定理の条件が成立すれば $\Gamma_\eta^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(u)} \neq \phi$ である。すなわち定義1から, 式(7)の確率システムにホモクリニック集合が存在する。

定理1により, もし式(7)の力学系にホモクリニック集合が存在するならば, 後に示されるように $0 \leq t_0 < \infty$ に対し図2に示されているようなホモクリニック集合 $\Gamma_\eta^{(s)} \cap \Gamma_\eta^{(u)}$ は無限に存在する。それゆえ仮定3を満たしている解過程は, 無限回ホモクリニック集合に含まれることになり, これらの集合においてお互いに交叉すると考えられる。このとき式(7)の確率システムは, 確定システムでホモクリニック点が存在するときにカオスの挙動が発生することに対応してカオスの挙動を呈示する。

3. 確率量 $x_{11}(t)$ の導出

式(9)の第2式において, $x_{11}(t) = z(t)$ と書き改めると, これは

$$\ddot{z} - (\beta - 3\alpha x_{10}^2)z - \tilde{\sigma}\dot{\xi} = 0 \quad (16)$$

と書き直される。 $x_{10}(t)$ は式(5)で与えられているものである。まず $\tilde{\sigma} = 0$ のときを考え, このとき $z = z_d$ とすると, z_d は

$$\ddot{z}_d - (\beta - 6\beta \sec h^2(\tau))z_d = 0, \quad \tau = \sqrt{\beta}(t - t_0) \quad (17)$$

を満たす。ここで $u(\tau) = -6\beta \sec h^2(\tau)$ はポテンシャル関数と呼ぶ。この場合の解 $z_d(t)$ は一般に次のように書ける⁹⁾

$$z_d(t) = e^{-\sqrt{\beta}t} + \int_t^\infty k(t, s)e^{-\sqrt{\beta}s} ds \quad (18)$$

ここで積分核 $k(t, s)$ は

$$k(t, s) = -d_1 \zeta_1(t)e^{-\kappa_1 s} - d_2 \zeta_2(t)e^{-\kappa_2 s} \quad (19)$$

で与えられる。ただしここで $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ はポテンシャル関数 $u(t)$ と積分核 $k(t, t)$ が満たす関係式¹⁰⁾

$$2dk(t, t)/dt = -6\beta \sec h^2(\tau) \quad (20)$$

の固有関数であり, d_1, d_2 は定数である。固有関数 $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ は次の連立方程式を満たすものである¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) + \frac{d_1^2}{2k_1} e^{-2\kappa_1 t} \zeta_1(t) + \frac{d_1 d_2 e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t}}{k_1 + k_2} \zeta_2(t) - d_1 e^{-\kappa_1 t} &= 0 \\ \zeta_2(t) + \frac{d_2 d_1 e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t}}{k_1 + k_2} \zeta_1(t) + \frac{d_2^2}{2k_2} e^{-2\kappa_2 t} \zeta_2(t) - d_2 e^{-\kappa_2 t} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)の解 $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ によって定まる積分核 $k(t, s)$ を用いて式(18)によって $Z_d(t)$ を表わし, これが式(17)の解となるように d_1 および d_2 を定めると結果は次のようになる。

$$d_1 = \sqrt{6\sqrt{\beta}} e^{\sqrt{\beta}t_0}, \quad d_2 = \sqrt{12\sqrt{\beta}} e^{2\sqrt{\beta}t_0} \quad (22)$$

$$k(t, s) = -6\sqrt{\beta} \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{-\tau'} - 12\sqrt{\beta} \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{-2\tau'}, \quad \tau' = \sqrt{\beta}(s - t_0) \quad (23)$$

$$\zeta_1(t) = \sqrt{6\sqrt{\beta}} \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2}, \quad \zeta_2(t) = 2\sqrt{3\sqrt{\beta}} \frac{1}{(e^\tau - e^{-\tau})^2} \quad (24)$$

次に式(16)で $\tilde{\sigma} \neq 0$ の場合の解 $z(t)$ について考察する。式(16)で $u(t) = 3\alpha x_{10}^2$ の項が存在しない場合の解で, 仮定 1 ~ 3 を満たす解軌道 I, II に相当するものは次式で与えられる。

$$z_0(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \left\{ \int_t^\infty e^{\sqrt{\beta}(t-s)} dw(s) + \int_{-\infty}^t e^{-\sqrt{\beta}(t-s)} dw(s) \right\} \quad (25)$$

それゆえ、ポテンシャル関数 $u(t)$ が存在するときの式(16)の解 $z(t)$ は式(25)を用いて次のように構成される。

$$\begin{aligned} z(t) = & -\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \left\{ \int_t^\infty e^{\sqrt{\beta}(t-s)} dw(s) + \int_{-\infty}^t e^{-\sqrt{\beta}(t-s)} dw(s) \right\} \\ & + \int_t^\infty k_-(t, s) \left(-\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_s^\infty e^{\sqrt{\beta}(s-s_0)} dw(s_0) \right) ds \\ & + \int_{-\infty}^t k_+(t, s) \left(-\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^s e^{-\sqrt{\beta}(s-s_0)} dw(s_0) \right) ds \end{aligned} \quad (26)$$

ただしここで現われる積分核 $k_-(t, s)$ および $k_+(t, s)$ は Gelfand-Levitan 方程式¹⁰⁾によって決定されるもので次のように与えられる。

$$\begin{aligned} k_-(t, s) = & -6\sqrt{\beta} \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{-\tau} - 12\sqrt{\beta} \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{-2\tau'} \\ k_+(t, s) = & 6\sqrt{\beta} \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{\tau'} - 12\sqrt{\beta} \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} e^{2\tau'} \end{aligned} \quad (27)$$

式(26)で、フビニの定理¹¹⁾を用いて積分の順序を交換し、整理すると $z(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} z(t) = & -\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_t^\infty \left[e^{-\sqrt{\beta}s_0} \left\{ e^{\sqrt{\beta}t} + \int_t^{s_0} k_-(t, s) e^{\sqrt{\beta}s} ds \right\} \right] dw(s_0) \\ & -\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^t \left[e^{\sqrt{\beta}s_0} \left\{ e^{-\sqrt{\beta}t} + \int_{s_0}^t k_+(t, s) e^{-\sqrt{\beta}s} ds \right\} \right] dw(s_0) \end{aligned} \quad (28)$$

式(27)の積分核を式(28)に代入すると、式(16)の解は

$$\begin{aligned} z(t) = & -\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_t^\infty \left\{ e^\tau e^{-\tau_0} + 6 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (\tau - \tau_0) e^{-\tau_0} \right. \\ & \left. + 12 \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^{-\tau} e^{-\tau_0} - e^{-2\tau}) \right\} dw(s_0) \\ & -\frac{\tilde{\sigma}}{2\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^t \left\{ e^{-\tau} e^{\tau_0} + 6 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (\tau - \tau_0) e^{\tau_0} \right. \\ & \left. - 12 \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^\tau e^{\tau_0} - e^{2\tau_0}) \right\} dw(s_0) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ただしここで $\tau_0 = \sqrt{\beta}(s_0 - t_0)$ である。

4. $\overline{\Delta_\sigma(t_0)}$ の導出とカオスの挙動の発生条件

はじめに式(29)を用いると $z^2(t)$ は

$$z^2(t) = \frac{\tilde{\sigma}^2}{4\beta} \left[\left\{ \int_t^\infty F_1(s_0) dw(s_0) \right\}^2 + \left\{ \int_{-\infty}^t F_2(s_0) dw(s_0) \right\}^2 \right] \\ + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2\beta} \int_t^\infty F_1(s_0) dw(s_0) \int_{-\infty}^t F_2(s_0) dw(s_0) \quad (30)$$

となる。ここで $F_1(s_0)$ および $F_2(s_0)$ は

$$F_1(s_0) = e^\tau e^{-\tau_0} + 6 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (\tau - \tau_0) e^{-\tau_0} \\ + 12 \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^{-\tau} e^{-\tau_0} - e^{-2\tau_0}) \\ F_2(s_0) = e^{-\tau} e^{\tau_0} + 6 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (\tau - \tau_0) e^{\tau_0} \\ - 12 \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^\tau e^{\tau_0} - e^{2\tau_0}) \quad (31)$$

である。式(30)の計算を進めるために、次の2つの定理を用意する。

[定理2] $f(s)$, $g(s)$ は次の条件を満足する関数であるとする。

- (i) ルベーク可測
- (ii) $f \in L_2([t, \infty))$, $g \in L_2((-\infty, t])$
- (iii) $[t, \infty)$ 上のどんな区間 $s \in [t, T]$ に対しても、分解 $t = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T$ が存在して、

$$f(s) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \{f(s_{j-1}) + f(s_j)\} \chi_{[s_{j-1}, s_j]}(s)$$

が成り立つ。ただしここで、 χ は区間 $[s_{j-1}, s_j]$ 上の指標関数であり、 γ は $\gamma = \max_{1 \leq j \leq n} (s_j - s_{j-1})$ である。同様に $(-\infty, t]$ 上の区間 $s' \in [T', t]$ に対しても、分割 $T' = s'_0 < s'_1 < \dots < s'_n = t$ が存在して

$$g(s) = \lim_{\gamma' \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \{g(s_{j-1}') + g(s_j')\} \chi_{[s_{j-1}', s_j']}(s')$$

が成立する。ここで $\gamma' = \max_{1 \leq j \leq n} (s'_j - s'_{j-1})$ である。このとき

$$E \left\{ \left(\int_t^\infty f(t-s) dw(s) \right)^2 \right\} = \int_t^\infty f^2(t-s) ds$$

および

$$E \left\{ \left(\int_{-\infty}^t g(t-s') dw(s') \right)^2 \right\} = \int_{-\infty}^t g^2(t-s') ds'$$

が成立する。

[定理3]¹²⁾ 定理2の条件(i)と(ii)のもとで

$$E \left\{ \int_t^\infty f(t-s) dw(s) \int_{-\infty}^t g(t-s) dw(s) \right\} = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}^*(\lambda) \hat{g}(\lambda) \left\{ \frac{c_-(\lambda)}{c_+(\lambda)} \right\} d\lambda$$

が成立する。ここで $\hat{\cdot}$ は $f(t)$, $g(t)$ のフーリエ変換, $c_+(\lambda)$, $c_-(\lambda)$ は $f(t)$, $g(t)$ のフーリエ逆変換を表わす。また \cdot^* は \cdot の共役複素数を表わしている。

定理2および3の証明はここでは省略する。定理2, 3を用いると $\overline{z^2(t)}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{z^2(t)} = & \frac{\tilde{\sigma}^2}{4\beta} \left[1 + 9 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^{2\tau} + e^{-2\tau}) + 12 \frac{e^{4\tau} + e^{-4\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} \right. \\ & - 4 \frac{e^{2\tau} - e^{-2\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} - 20 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} (e^{3\tau} - e^{-3\tau}) + 192 \frac{e^{-2\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}} \\ & \left. + 1152 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^4} e^{-\tau} + 96 \frac{e^{2\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2} - 3456 \frac{1}{(e^\tau + e^{-\tau})^4} \right] \quad (32) \end{aligned}$$

式(32)および式(5)を用いると式(12)の第2項は

$$\begin{aligned} & 3\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \overline{z^2(t)} x_{10}(t) x_{20}(t) dt \\ & = -\frac{576}{\sqrt{\beta}} \tilde{\sigma}^2 \int_0^{\infty} \left[12 \frac{(e^\tau - e^{-\tau})^2}{(e^\tau + e^{-\tau})^6} - \frac{(e^\tau + e^{-\tau})^2}{(e^\tau + e^{-\tau})^4} \right] d\tau \\ & = -\frac{48}{5\sqrt{\beta}} \tilde{\sigma}^2 \quad (33) \end{aligned}$$

となる。したがって式(12)の確率メルニコフ関数の期待値(平均確率メルニコフ関数) $\overline{\Delta_\sigma(t_0)}$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_\sigma(t_0)} \cong & \varepsilon \left[\frac{4\beta\sqrt{\beta}}{3\alpha} \tilde{\delta} + \tilde{f}\pi\lambda\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\beta}}\right) \sin(\lambda t_0) \right. \\ & \left. - \frac{48}{5\sqrt{\beta}} \tilde{\sigma}^2 \right] \quad (34) \end{aligned}$$

式(34)で第1項と第2項はそれぞれ減衰パラメータと外力の確定成分のパラメータに依存しており, 第3項は確率成分のパラメータに依存している。また, 式(34)で $\tilde{\sigma}$ の値を0とすると式(7)の力学系で確率成分が存在しなくなり, このとき式(34)の確率メルニコフ関数は確定系のメルニコフ関数と一致することがわかる。

5. デジタル・シミュレーション

前節までで確率メルニコフ関数の平均値に基づいて種々の挙動の判別が可能となることが示されたが, この判定基準が実際の現象をどの程度まで検証しうるのかを確認するために, 見本過程についてのデジタル・シミュレーション実験を行なった。ここでは式(3)を

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1(t_n) - x_1(t_{n-1}) = x_2(t_{n-1})\Delta t \\ \Delta x_2 &= x_2(t_n) - x_2(t_{n-1}) = \{\beta x_1(t_{n-1}) - \alpha x_1(t_{n-1})^3 - \delta x_2(t_{n-1})\}\Delta t \\ &\quad + \{f' \cos(\lambda t_{n-1})\Delta t + \sigma' n_1(t_{n-1})\sqrt{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (35)$$

としてルンゲ・クッタ法によって離散化し式(35)の計算を行なった。ここで $n_1(t_{n-1})$ 正規ガウス系列である。また $\alpha = 100, \beta = 10, \lambda = 3.76$ とし離散時間間隔は $\Delta t = t_n - t_{n-1} = 0.0084$, 初期値は $(0.316, 0)$ と設定した。図3~6は $\varepsilon = 1, \tilde{f} = 1.0, \tilde{\delta} = 2.0$ で $\tilde{\sigma}^2$ をパラメータとした式(35)の $x_1(t_n)$ の見本過程を示す。図中の破線は沈点の x_1 座標 $s_1 = \sqrt{\beta/\alpha} \cong 0.316$ を示している。図3は $\tilde{\sigma}^2 = 0$ の場合で、このとき沈点 s_1 のまわりで確定的な周期振動がみられる。図4は $\tilde{\sigma}^2 = 0.01$ の不規則雑音が印加した場合で、このときも図3の場合と同様に s_1 のまわりでほぼ周期的な振動をする。図5は $\tilde{\sigma}^2 = 0.2$ とした場合で、そのときの挙動は2つの沈点 s_1 と $-s_1 (= -0.316)$ の間で不規則な跳躍をくり返しており、有界な変動をするカオスの挙動を呈示している。一方、式(34)の確率メルニコフ関数の期待値は

$$\Delta\sigma(t_0) \cong 0.422\tilde{\delta} - 0.504\tilde{f} \sin(3.76t_0) - 3.036\tilde{\sigma}^2 \quad (36)$$

となり、図3~5の場合のパラメータ値に対してこれを図示すると図7(a)~(b)のようになる。図7でA, Bはそれぞれ図3, 4の場合に対応しており、いずれも $\overline{\Delta\sigma(t_0)} > 0$ である。図7でCの場合には、 $\overline{\Delta\sigma(t_0)}$ は正と負の値をとっており、確率システムにおけるホモクリニック集合が存在しカオスの挙動が発生することを裏づけている。さらに、図6に $\tilde{f} = 0.2, \tilde{\delta} = 0.2, \tilde{\sigma}^2 = 0.2$ としたときの $x_1(t_n)$ の見本過程を図7にDにそのときの $\overline{\Delta\sigma(t_0)}$ を示す。この場合、 $\overline{\Delta\sigma(t_0)} < 0$ となっており解軌道IとIIの位置関係は $\overline{\Delta\sigma(t_0)} > 0$ の場とは反対に

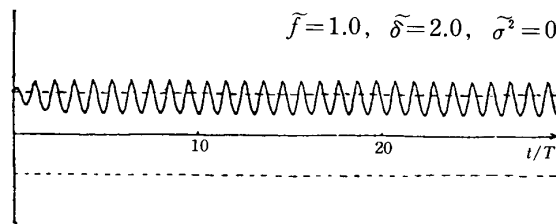


図3 $\tilde{\sigma}^2 = 0$ の場合の式(35)の見本過程

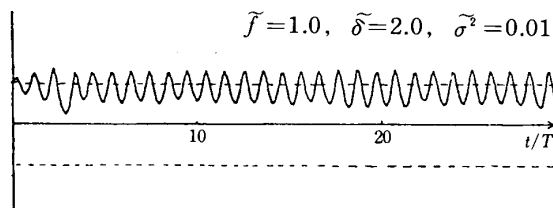


図4 $\tilde{\sigma}^2 = 0.01$ の場合の式(35)の見本過程

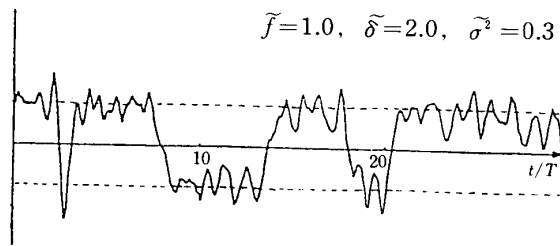


図5 $\tilde{\sigma}^2 = 0.2$ の場合の式(35)の見本過程

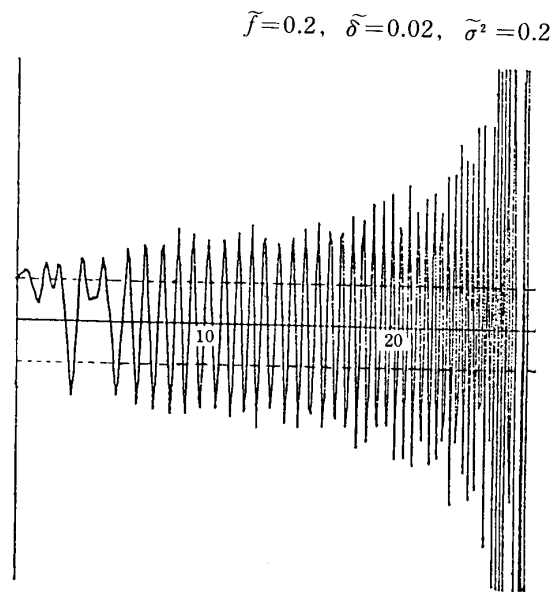


図6 $\tilde{\sigma}^2 = 0.3$ の場合の式(35)の見本過程

なるので、あらゆる見本過程は解軌道IIに沿って鞍点集合から遠ざかると考えられるが、

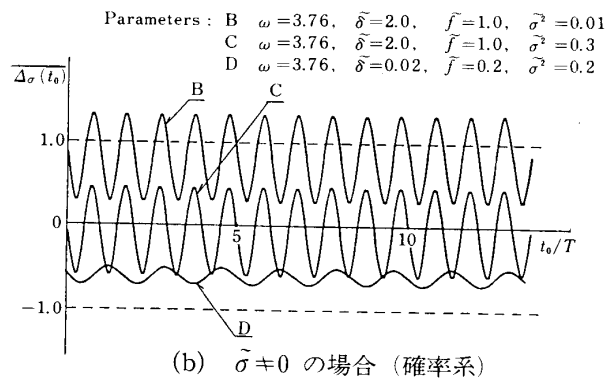
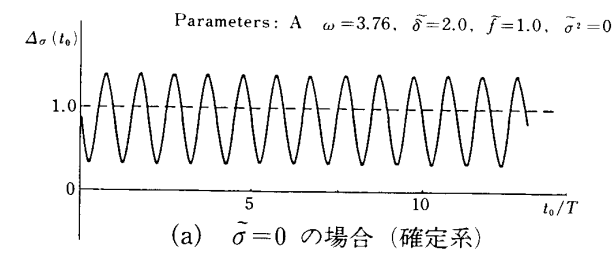


図7 平均確率メルニコフ関数の計算例

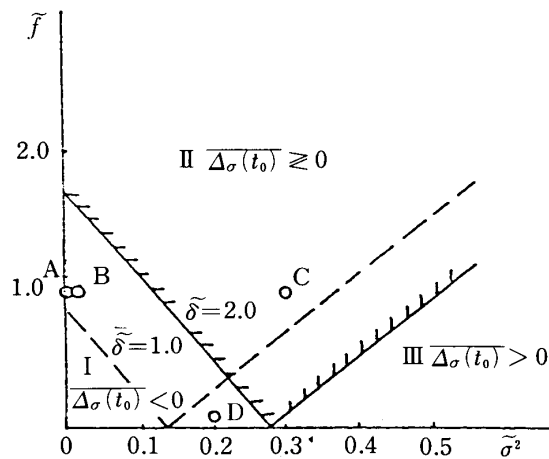


図8 ホモクリニック集合の存在領域

図6は発散状態を示しておりこれを裏づけている。

さらに、図7 B, Cのときのパラメータの値に対し、ホモクリニック集合の存在条件、すなわちカオスの挙動が発生する条件は式(34)の平均確率メルニコフ関数に定理1を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} 0.422 \tilde{\delta} - 0.504 \tilde{f} - 3.036 \tilde{\sigma}^2 &\leq 0 \\ 0.422 \tilde{\delta} + 0.504 \tilde{f} - 3.036 \tilde{\sigma}^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)から得られたホモクリニック集合の存在領域を図8に示しておく(斜線領域)。なお図中A, B, C, Dは図7のものに対応している。

6. 結 言

本研究において、狭帯域不規則雑音の印加する非線形確率システムの挙動について確定システムのメルニコフ関数の概念を拡張した確率メルニコフ関数を考えることによって考察した。その結果、雑音のカオスの挙動発生への影響が理論的に明らかにされ、さらに実験的にも確認された。

謝 辞

本研究に対し多大の助言を頂いた京都工芸繊維大学砂原善文先生、福井大学朝倉俊行先生に深甚の謝意を表します。

参考文献

- 1) F.C. Moon and P.J. Holmes, J. Sound and Vib. 65—2 (1979) 275
- 2) A.E. Cook and P.H. Roberts, Proc. the Cambridge Phil. Soc., 68 (1970) 549

- 3) F.C. Moon and Y.H. Rao, Trans. J. Appl. Mech. 36—3 (1969) 92
- 4) P.J. Holmes, Philo. Trans. of the Royal Soc., 292 (1979) 420
- 5) E.N. Lorentz, J. the Atmospheric Sci., 20 (1963) 130
- 6) D.R.J. Chillingworth, Differential Topology with a view to Applications, Pitman, (1976)
- 7) S. Smale, Differen. and Combin. Topology, Chairns S. Ed., Princeton Univ. Press, (1965)
- 8) V.K. Mel'nikov, Trans. Moscow Math. Soc., 12—1 (1963) 1
- 9) I. Key and H.E. Moses, J. Applied physics, 27—12 (1956) 1503
- 10) 田中俊一, 伊達悦朗, KdV 方程式, 紀伊國屋, (1979)
- 11) E.B. Dynkin, Markov Processes Vol. II, (1965) 207
- 12) 飛田武幸, 櫃田倍之, ガウス過程, 紀伊國屋, (1976)
- 13) E.J. Mcshane, Calculus and Stochastic Models, Academic Press N.Y., (1974)

A. 付 録

任意の時刻 t における $\Delta_\sigma(t, t_0)$ は

$$\begin{aligned}
 \Delta_\sigma(t, t_0) &= -q_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{1\sigma}^+(t, t_0) \\
 &\quad + p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{2\sigma}^+(t, t_0) \\
 &\quad - \{-q_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{1\sigma}^-(t, t_0) \\
 &\quad + p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{2\sigma}^-(t, t_0)\} \\
 &= \Delta_\sigma^+(t, t_0) - \Delta_\sigma^-(t, t_0)
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

で与えられる。式(6)を式 (A-1) に代入して

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(1)\pm}(t, t_0) &= -q_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{11}^\pm(t, t_0) \\
 &\quad + p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{21}^\pm(t, t_0) \\
 \Delta^{(2)\pm}(t, t_0) &= -q_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{12}^\pm(t, t_0) \\
 &\quad + p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))x_{22}^\pm(t, t_0)
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

を得る。式 (A-2) を t について微分し, 式(7), (8)を用いると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\Delta^{(1)\pm}(t, t_0) &= p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))\tilde{\sigma}\tilde{\xi} \\
 \frac{d}{dt}\Delta^{(2)\pm}(t, t_0) &= p_0(x_{10}(t), x_{20}(t))[\tilde{f}\cos(\lambda t) - \tilde{\delta}x_{20}(t) \\
 &\quad - 3\alpha(x_{11}^\pm(t, t_0))^2x_{10}(t)]
 \end{aligned} \tag{A-3}$$

を得る。式 (A-3) を区間 $[t_0, \infty), (-\infty, t_0]$ 上で積分すると

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)\pm}(t_0) &= -\int_{t_0}^{\pm\infty} p_0(x_{10}(t), x_{20}(t)) \tilde{\sigma} d\omega(t) \\
\Delta^{(2)\pm}(t_0) &= -\int_{t_0}^{\pm\infty} p_0(x_{10}(t), x_{20}(t)) [\tilde{f} \cos(\lambda t) - \tilde{\delta} x_{20}(t) \\
&\quad - 3\alpha(x_{11}^\pm(t, t_0))^2 x_{10}(t)] dt
\end{aligned} \tag{A-4}$$

を得る。式 (A-4) を

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)}(t_0) &= \Delta^{(1)+}(t_0) - \Delta^{(1)-}(t_0) \\
\Delta^{(2)}(t_0) &= \Delta^{(2)+}(t_0) - \Delta^{(2)-}(t_0)
\end{aligned} \tag{A-5}$$

に代入し、雑音が微小であるとして式 (A-4) で $\Delta^{(1)}(t_0)$ を消去すると、

$$\Delta_\sigma(t_0) = \varepsilon \Delta^{(2)}(t_0) \tag{A-6}$$

が得られる。それゆえ式 (A-4), (A-5) より

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma(t_0) &\cong -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x_{10}(t), x_{20}(t)) [\tilde{f} \cos(\lambda t) \\
&\quad - \tilde{\delta} x_{20}(t) - 3\alpha(x_{11}(t, t_0))^2 x_{10}(t)] dt
\end{aligned} \tag{A-7}$$

を得る。式 (A-7) の期待値をとると

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta_\sigma(t_0)} &\cong -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x_{10}(t), x_{20}(t)) [\tilde{f} \cos(\lambda t) - \tilde{\delta} x_{20}(t)] dt \\
&\quad - \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x_{10}(t), x_{20}(t)) 3\alpha(\overline{x_{11}(t, t_0)})^2 x_{10}(t) dt
\end{aligned}$$

となる。

On Chaotic Behaviour of Nonlinear Dynamical Systems with Narrow-Band Random Disturbance

Hirokazu OHTAGAKI

Department of Electronic Engineering

Okayama University of Science

Ridai-cho 1-1 Okayama 700 Japan

(Received September 30, 1988)

In this paper, the principal line of attack is to study the chaotic behaviour in nonlinear dynamical systems with narrow-band random disturbance. By extending the Mel'nikov function in deterministic systems to the one in stochastic systems, the random disturbance to the occurrence of chaotic behaviour is studied and the numerical experiments are demonstrated.