

中継効果の諸属性に関する考察

加藤 常 員

岡山理科大学大学院・理学研究科・システム科学専攻

(昭和63年9月30日 受理)

ネットワークにおいて、各辺に与えられた重みを単調増加な狭義の凸関数により変換した値を新たな重みとした際のある頂点を始点、他のすべての頂点を終点とする最短路問題について議論する。始点と各終点間の最短路の部分路となる辺の集合は、木を形成する。この木は、重みの変換に用いる凸関数の増加性の程度にしたがって変化する。この変化を引越こす中心的な振舞を中継効果、得られる木を半最小木と呼ぶ。重み変換に用いる関数として $f(w) = w^n$ を採用した場合に関して、中継効果の4つの諸属性を示す。さらに、計算機実験から得られた半最小木の変化と中継効果の諸属性との関連を吟味・考察する。

1. はじめに

ネットワークフローの基礎問題である最短路問題や最小木問題は、ネットワークに関連した諸分野の部分問題として多くの研究がなされてきた^{1,2,6,7)}。最短路問題は、求める最短路の始点と終点の選び方によって3種類ほどに分類される²⁾。そのうち、特定の頂点を始点、他のすべての頂点を終点とする最短路問題に関して、いずれかの終点への最短路の部分路に含まれる辺より構成するグラフは、方向性(有向)をさておいたとき、木を形成する。この木は、与えられたネットワークとその始点に対して一意的に定まる。各辺に与えられた重みを単調増加な狭義の凸関数により変換した値を新たな重みとした際、この木は、重みの変換に用いる凸関数の増加性の程度にしたがって変化する。さらに、辺の比に対して十分な増加性を示す凸関数で重みを変換した場合、この木は、最小木に一致する。与えられた重みそのものによる、木を最短路木と名付け、重みを適当に変換することで求まる最短路木と最小木との中間的な木を半最小木と名付ける。また、最短路問題の解法(算法)における辺の採択は、局所的に3頂点間の辺の採択に帰着(最適性の原理)できる。このことから、重み変換による辺の採否は、例えば、「重みが2頂点間の距離、関数が距離(移動)についての(移動による)負担量を与えるとき、 a から c への移動を負担観点から考える際、 b の位置によっては b を中継点として、 $a \rightarrow b \rightarrow c$ の迂回する経路を選択した方が負担が小さくて済む場合がある。」¹⁰⁾などが想定できる。このような意味から、この振舞を中継効果と名付けた。

上述の事柄は、最短路問題と最小木問題およびその関連した多くの問題に新たな視点を

与えてくれる。一方、半最小木、中継効果に関して諸属性を明らかにすることにより、より多くの応用分野を見出すことも期待できる。一般の単調増加な凸関数に関しての中継効果等の議論は、すでに文献(11)で行った。本稿では、非負の値を採る重み w 、変換に用いる関数 $f(w) = w^n$ を採用した場合についての中継効果の諸属性を理論的に示し、考察を行う。さらに、計算機実験から得られた半最小木の変化と中継効果の諸属性との関連を吟味・考察する。

2. 中継効果と半最小木

本稿が対象とする最短路問題および最小木問題の用語を規定し、本研究の着目点について述べる。なお、本稿では、各辺 $e \in E$ に非負な実数値の重み $w(e)$ が付与された無向グラフ $G = (V, E)$ のネットワークに規定して論じる。ここで、 V は頂点の集合、 E は辺の集合を表す。

2点 $s, t \in E$ の間の初等的な道の中で重みの和が最小なものを最短路と呼ぶ。ある頂点 s と他の頂点 t_i の間の最短路に採択された辺の集合を Pst_i するとき、

$$P_s = Pst_1 \cup Pst_2 \cup \dots \cup Pst_i \cup \dots \quad (t_i \in V \text{ and } t_i \neq s) \quad (1)$$

とする。ここで \cup は集合の和を表す。グラフ $T_s = (V, P_s)$ は、木を成す。この木 T_s を最短路木と名付ける。また、ネットワークの木の中で、木の重みの最小なものを最小木と呼ぶ。最短路木と最小木の枝(辺)の濃度は、明らかに等しい。最短路木の重みは最小木の重みに等しいか、またはより大きい。

最短路木を求める Dijkstra の算法^{3,4)} および最小木を求める Prim 算法^{3,5)} は、本質的には

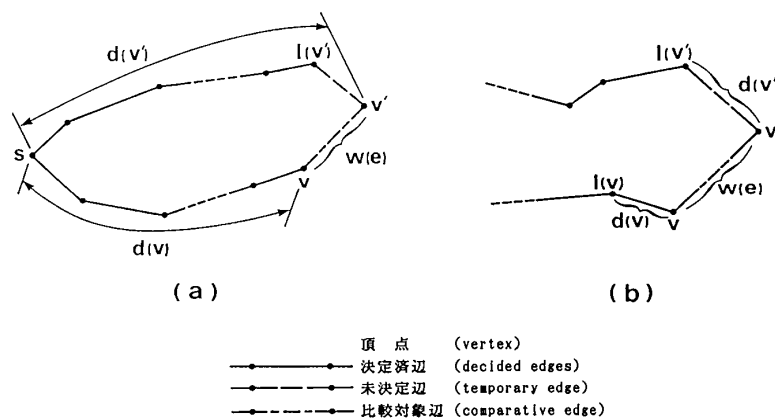


図1 Dijkstra の算法および Prim の算法
 (a) Dijkstra の算法
 最短路の判定: $d(v') > d(v) + w(e)$
 (b) Prim の算法
 最小木の判定: $d(v') > w(e)$

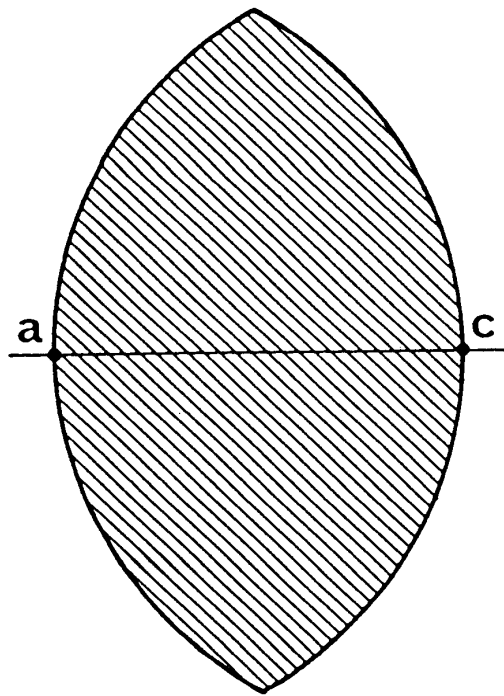


図2 最小木における頂点の非存在領域

共に一種の貪欲算法である。その差異は、判定部分で着目される辺の数と具体的に判定に用いられる不等式(関係)である。Dijkstraの算法では、図1(a)のような辺 e に着目した3項関係を判定し、Primの算法では図1(b)のような、頂点 v' に着目した2項目関係の判定となっていると言える。また、重みがユークリッド距離であるとき、辺 (a, c) が最小木の枝に含まれる必要十分条件は、図2に示すような領域内に a, c 以外の頂点が存在しないか、あるいは他の頂点が存在しても a, c 両頂点に接続する辺が存在しないときである。

上述の事柄と最短路に関する最適性の原理から、Dijkstraの算法になんらかの処理を付け加えることにより最小木が求まり、さらに最短路木と最小木の間接的な木(以下、半最小木と呼ぶ)を定めることができると考察される。付加する処理は、Dijkstraの算法の判定部分が重みに関する判定であることから、各辺に与えられた重みに係わる処理であると示唆できる。

Dijkstraの算法により最小木および半最小木を求めるための重みに係わる前処理を提案する。なお、以下で述べる議論の詳細は、文献(11)に委ねる。前章の考察より、提案する前処理に要求される振舞は、次のように示せる。

3頂点 a, b, c が与えられ、辺 $(a, b), (a, c), (b, c)$ が存在し、各辺に付加された重み w_{ab}, w_{ac}, w_{bc} が

$$w_{ac} < w_{ab} + w_{bc} \tag{2}$$

を満たすとき、適当な変換(関数) f を用いると

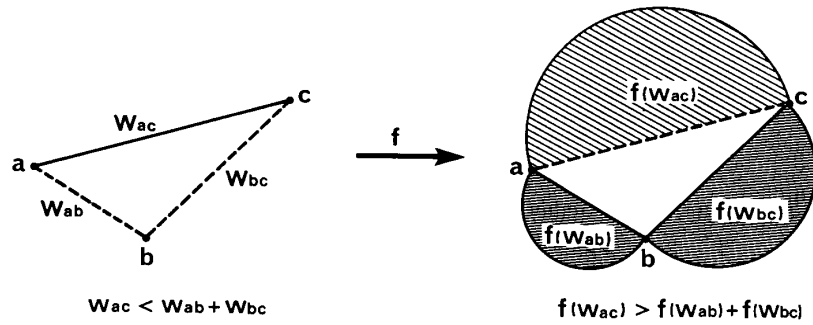


図3 中継効果

$$f(w_{ac}) > f(w_{ab}) + f(w_{bc}) \quad (3)$$

となることがある(図3参照)。この振舞を1章で述べたような意味合いから中継効果と名付ける。 $f(w)$ が、非負の実数を定義域、値域とする単調増加な狭義の凸関数であるとき、式(3)の成立、不成立は、比較対象となる3辺の重みの比と $f(w)$ 増加性に大きく依存すると考えられる¹¹⁾。比較可能なすべての3辺の重みの比に対して $f(w)$ の増加性が、十分に大きいとき、式(3)は、常に成立つ。一方、凸関数の条件を弛め $f(w) = w$ としたとき中継効果は、すべての3辺の重み間において起こらない。また、適当な増加性をもつ凸関数を採用した際には、比較可能な3辺の重み間の一部についてのみ中継効果が成立する。

よって、各辺に与えられた重みを非負の実数を定義域、値域とする単調増加な狭義の凸関数で変換した値を新たな重みとする処理を、Dijkstraの算法の前処理として付加し、凸関数の増加性を制御することで、最短路木から最小木までの、半最小木を生成できる。また、Dijkstraの算法の判定部を式(3)に直接置き換えることより、前処理を付加したのと同じ働きをさせることができる。

3. 狭義の凸関数 $f(w) = w^n$ を用いたときの中継効果の諸属性

最短路木や最小木は、与えられたネットワークと始点(または、着目点)によって、特別な場合を除き一意的に定まる。半最小木についても同様のことが示唆されるが半最小木の形態や諸属性を見極めるには、Dijkstraの算法が逐次的決定過程の繰返しによる解法であることから、その決定過程でどのような辺(重み)が採択されていくかを知ることが重要である。一決定過程での採択は、本質的には中継効果の振舞そのものである。

中継効果の振舞は、前章の議論から比較可能な3辺に付加された重みの比と用いる凸関数(特にその増加性)に関連して決定される。本章では、重み変換の前処理に用いる関数として、単調増加な狭義の凸関数 $f(w) = w^n$ を用いたときの中継効果について諸属性を明らかにする。記号等の定義は、前章までのものに、従うが議論を簡単化するため、一般性を

失わないように次のパラメータ α, β を導入する。

$$\left. \begin{aligned} w_{ac} &= \alpha w_{ac} \\ w_{bc} &= \beta w_{ac} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここでは、 α, β の大小関係は問わない。式(2)は α, β を用いると、つぎの様に示せる。

$$1 < \alpha + \beta \quad (6)$$

(a) 重みの比と関数の増加性

中継効果が辺に付加された重みの比と関数の増加性に依存することを示す。

$f(w) = w^n$ の増加率は、明らかに n のみに支配される。一般的な議論¹¹⁾にもとづき式(3)が成立つとすると

$$w_{ac}^n > w_{ab}^n + w_{bc}^n \quad (7)$$

パラメータ α, β を用いると、

$$1 > \alpha^n + \beta^n \quad (8)$$

となり、右辺について $n \rightarrow \infty$ での極限值は、0である。 $n \rightarrow \infty$ において式(8)は、常に成立つ。また、式(8)が α, β, n のみの関係式であることから、辺の重みの比と n のみの関係を見極めることで中継効果の有無を判定できると言える。

(b) 迂回範囲

重みにユークリッド距離を用いて、頂点 a, b (重み w_{ac}) と n を固定したときの式(8)が成立する頂点 b の存在領域を検討する。図4に示すように XY 直交座標系を設定し、頂点 a を原点、 c を X 軸上に採り、頂点 b の座標を (x, y) 、対称性を考慮して $\angle bac$ を $\theta \in$

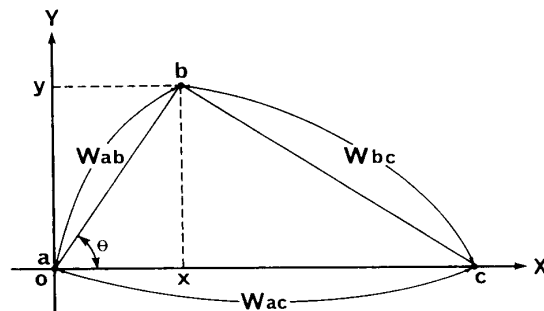


図4 頂点の直交座標

$[-\pi/2, \pi/2]$ で表すとする。

頂点 b の座標を (x, y) は、

$$\left. \begin{aligned} x &= w_{ab} \cos \theta \\ y &= w_{ab} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{w_{ac}^2 + w_{ab}^2 - w_{bc}^2}{2w_{ab}w_{ac}} \quad (10)$$

となる。よって、頂点 b の存在範囲の座標は、式(8)の関係より

$$\left. \begin{aligned} x &< \frac{w_{ac}}{2} \{1 + \alpha^2 - (1 - \alpha^n)^{\frac{2}{n}}\} \\ y &< \pm \frac{w_{ac}}{2} (4\alpha^2 - \{1 + \alpha^2 - (1 - \alpha^n)^{\frac{2}{n}}\}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を得る。式(12)は、逆に式で表された範囲に頂点 b が存在するならば a から c への経路は、 b を迂回することを示している。中継効果を起こす頂点 b の存在範囲を迂回領域と呼ぶ。

図5に $w_{ab} = 1$ で $n=1.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$ および ∞ のときの迂回領域を示す。

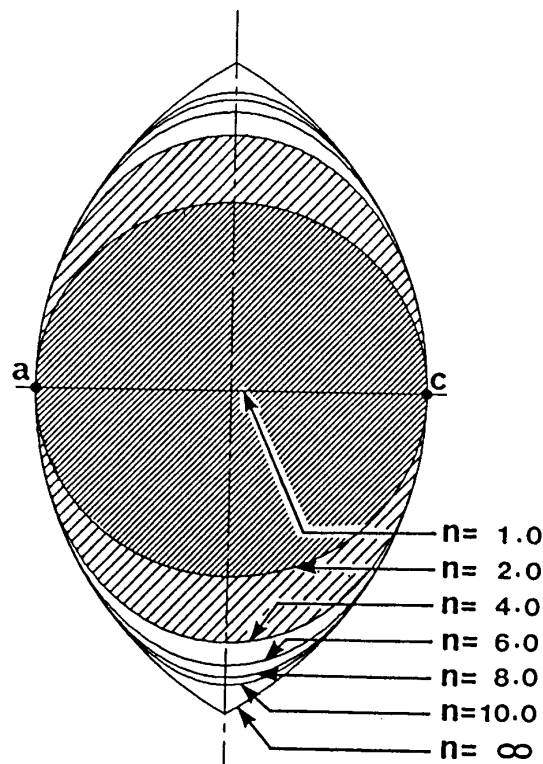


図5 中継効果作用範囲

(c) 重み変化率

重みにユークリッド距離を用いて、頂点 a, c (重み w_{ac}) と n を固定したとき、中継効果により採択された経路の重みが、最大どの程度増加するかについて検討する。中継効果は、先の検討で示したように、重みの比と n が重要な振舞をする。ある n ともとで重み w_{ab}, w_{bc}, w_{ac} の間に丁度、中継効果が起きるとする。このとき採択される経路 $a \rightarrow b \rightarrow c$ の重みともとの経路 $a \rightarrow c$ の重みの差をもとの経路の重みで除した値を n, α に対する重み変化率と名付ける。すなわち、

$$d = \frac{w_{ab} + w_{bc} - w_{ac}}{w_{ac}} \tag{13}$$

重み変化率 d は、 ac 間の部分路に対する増加性を示す n に関しての中継効果の評価になっていると言える。重み変化率を中継効果の最短路に対する評価関数 $d(n, \alpha)$ として、式(13)と式(8)の関係を等号に置き換えた関係を用いて、

$$d(n, \alpha) = \alpha + (1 - \alpha^n)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (n > 1, 0 < \alpha < 1) \tag{14}$$

と表される。図6は、縦軸に評価関数 $d(n, \alpha)$ の値(重み変化率)、横軸に重みの比 α を採り、 $n=1.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$ および ∞ としたときのグラフである。

(d) n (増加性) に路についての重み変化率の上界値

$d(n, \alpha)$ は、 $\alpha = 2^{(-1/n)}$ で最大値 $2^{((n-1)/n)} - 1$ を持つ。このことは、ネットワークが与え

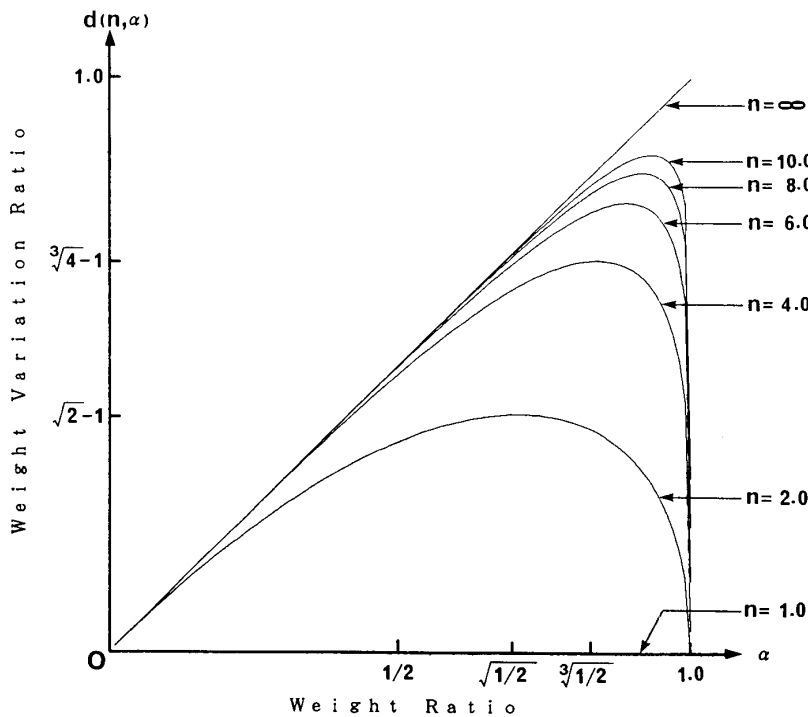


図6 半最小木の重み変化率

られたとき、中継効果によって得られた半最小木上の特定の始点 i と終点 j の間の路の重みが、最短路木の同じ始点 i と終点 j の路の重みに対し、高々

$$d(n, 2^{-\frac{1}{n}}) = 2^{\frac{n-1}{n}} - 1 \quad (15)$$

増しの重みになることを意味する。すなわち、この値は、 n に対する中継効果の路についての重み変化に関しての上界値となっている。

4. 計算機実験

単調増加な狭義の凸関数 $f(w) = w^n$ を用いて重みを変換する処理を Dijkstra の算法の前処理としたとき、求まる半最小木がどのように変化するかを計算機実験によって具体的に示す。なお、ここで示す実験は、単に前処理を付加した Dijkstra の算法により半最小木が求まることを示すだけのものと考え、前章で述べた諸属性についての検証を行う実験は、稿を改め論ずることとする。

(a) 計算機実験の設定

実験で用いたネットワークは、一様乱数により作成した完全グラフを用いた。正方領域 (500×500) を設定し、その領域内に一様乱数により 20 頂点を定め、各頂点間に辺を設ける。この完全なグラフに各頂点間のユークリッド距離を各辺の重みとして用いた。また、始点は、ネットワーク設定時に最初に定められた頂点とする。

実験の状態を制御するパラメータとして、関数 $f(w) = w^n$ の指数部 n のみを変化させる。パラメータ n の各値での半最小木を求める。 $n=1$ のとき、本実験で求まる木は、各始点から始点を除く各頂点(終点)間の直接の辺からなる自明な最短路木である。パラメータ n の値は、1.0 から 10.0 までを 0.5 刻みで変化させた。

与えられたネットワークに対し、最小木を Prim の算法により別途求めておき、パラメー

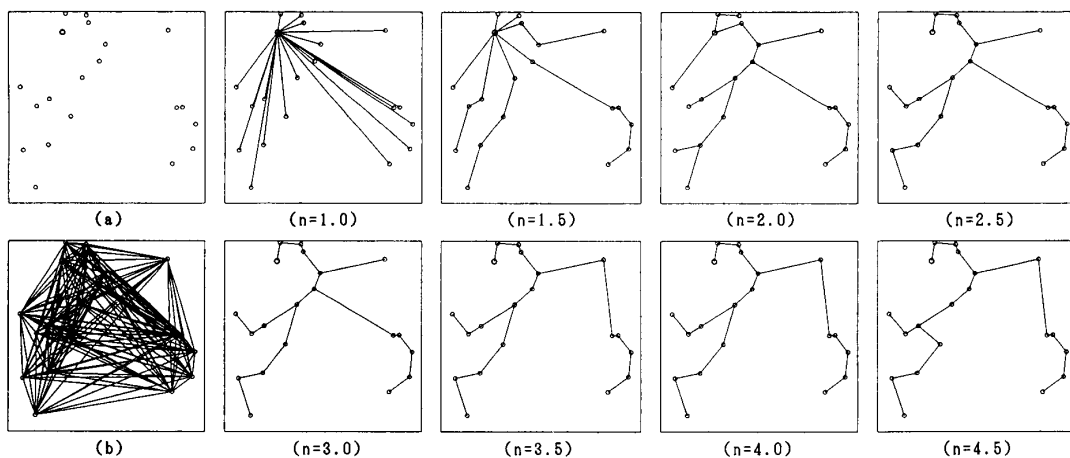


図7 半最小木の単調変化な例

表1 半最小木の単調変化な例の最小木比

| n | 木の重み | 最小木比 |
|------|----------|-------|
| 1.00 | 4661.347 | 3.323 |
| 1.50 | 1935.918 | 1.380 |
| 2.00 | 1642.004 | 1.717 |
| 2.50 | 1466.110 | 1.045 |
| 3.00 | 1466.110 | 1.045 |
| 3.50 | 1436.265 | 1.024 |
| 4.00 | 1436.265 | 1.024 |
| 4.50 | 1402.569 | 1.000 |

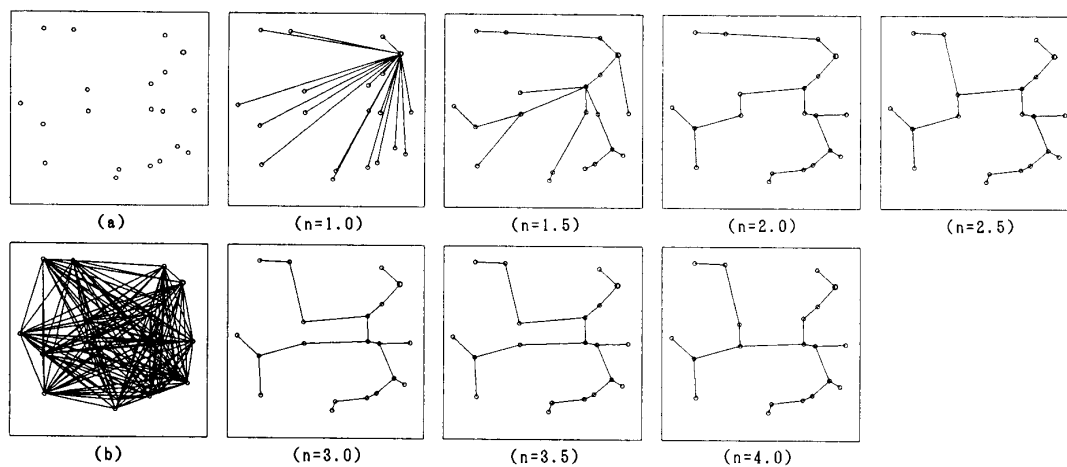


図8 半最小木の非単調変化な例

表2 半最小木の非単調変化な例の最小木比

| n | 木の重み | 最小木比 |
|------|----------|-------|
| 1.00 | 5022.670 | 3.538 |
| 1.50 | 1906.499 | 1.343 |
| 2.00 | 1496.502 | 1.054 |
| 2.50 | 1421.267 | 1.001 |
| 3.00 | 1528.342 | 1.077 |
| 3.50 | 1528.342 | 1.077 |
| 4.00 | 1419.595 | 1.000 |

タ n の各値において求めた半最小木の重みと最小木の重みの比を求める。この比([半最小木の重み]/[最小木の重み])を最小木比と呼ぶ。最小木比の値が1となったとき中継効果を用いて最小木が求まったことになる。比が1に至るまでの半最小木の変化を調べる。

(b) 計算機実験の結果

以上の設定のもとで、実験を行った結果の一例を図7および表1に示す。図7において、(a)は、乱数によって与えられた頂点、(b)は、(a)の頂点間に設定されたネットワーク(重み付き完全グラフ)、(n=1.0)…(n=4.5)は各 n の値で中継効果により求めた半最小木であ

る。ただし、 $(n=1.0)$ は最短路木、 $(n=4.5)$ は最小木と一致している。表1は、各 n の値での最小木比を示す。表1の比の値は、単調に減少しているが、単調に減少しない例を図8および表2に示す。図8および表2の記号等は、図7および表1と同様である。

5. 計算機実験の結果および中継効果の諸属性の考察

本章では、前章で示した実験結果を考察し、3章で述べた中継効果の諸属性との関連を検討する。

図7および8は、ともに最短路木から最小木に至る半最小木の変化を示している。図7の例では、表1より、最小木比が単調に減少して最小木に至るが、図8の例では、表2より、一部増加する状態が表れている。図8の $(n=2.5)$ と $(n=3.0)$ から、比の増加は4つの辺に係わりの変化であることが分る。このことは、算法の逐次的な性質に依るものと考えられる。最小木比の変化は、おおむね減少傾向を示すことが類推され、ここに示さなかった比較的大きな n で最小木に一致する例からも言える。表2のように、一時的に最小木比が増加する傾向は、一般的であり、Dijkstraの算法の始点と辺の検索順序に依存した振舞であると予測できる¹¹⁾。上述のふたつの事柄は、半最小木に関しての大局的な属性の一部であると言える。

半最小木の重みが、前処理に用いた関数 $f(w) = w^n$ の n の増加にしたがっておおむね単調に減少する傾向を示しながらも、一時的に増加する事実を3章で述べた中継効果の諸属性から検討する。

最短路木 $(n=1.0)$ では、始点からすべての終点へ直接の路が採択され、 n が増加されるにしたがって、ある終点について他の終点(頂点)を経由する路が定まる。その路に含まれる頂点も終点であることから部分路を共有することになり、木全体(半最小木)の重みは、最短路木の重みに比べ小さくなる。経由する頂点は、3章(a)および(b)の属性にしたがって定まるが、算法が逐次的な決定過程であることから処理に当り検索される頂点(頂点間の辺)の順に優先的に路が採択されると考察できる。特定の終点への路の重みは、3章(c)の式(14)にしたがい路の重みは増加していると言える。その上界値は3章(d)の式(15)で与えられる。一方、各終点への路は部分路を共有することで半最小木としての重みは減少するが、この減少値よりも局所的な路の選択に対する増加(式(14))が大きいとき、木の重みは、一時的に増加すると考えられる。

6. おわりに

無向のネットワークにおいて、各辺に付加された重みを単調増加な凸関数で変換した値を新たな重みとする場合のある頂点を始点、他のすべての頂点を終点とする最短路問題について議論した。始点と各終点間の最短路の辺(部分路)からなる木を最短路木と名付けた。最短路木を求めるDijkstraの算法に単調増加な凸関数で重みを変換する前処理を加えるこ

とで、求まる木が変化することを示した。この振舞の中心的な役割を果す効果を中継効果と名付けた。また、前処理の関数を十分な増加性を示す凸関数とすると最小木が求まり、適当な増加性の凸関数を用いると、最短路木と最小木の間的な木が求まる。この木を半最小木を定義した。中継効果の4つの属性を理論的に明らかにする、一方、計算機実験によって半最小木の大局的な2つの属性を示した。さらに、大局的な2つの属性と中継効果の4つ属性との関連を吟味検討した。

本稿に述べた事柄は、最短路問題および最小木問題に関連した多くの問題に新たな視点を与えることが期待できる。例えば、Steiner 木⁸⁾や巡回セールスマン問題⁹⁾などの NP 完全な問題の近似解法の改良や重み付きグラフに係わるモデルのシュミレーション¹⁰⁾などへの応用が考えられる。また、中継効果は、三角不等式に係わる問題に関与できると思われる。

今後の課題としては、より一般的な凸関数で、中継効果がどのように生じるかを分析し諸性質を明らかにし、逐次的な処理に効果がどのように働くかを理論的に把握することが急がれる。また、具体的に中継効果および半最小木が有効に働く応用的研究が期待される。一方、凸関数でない場合についての振舞、特殊なネットワークに対しての問題など多方面からの課題があると思われる。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、日頃、御指導を賜わる岡山理科大学・今枝国之助教授、また多くの御助言を戴いた大阪電気通信大学・小沢一雅教授に深謝致します。なお、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金（奨励研究(A)特別研究員No.63790435）によった。

参考文献

- 1) R. Sedgewick : Weighted Graphs, Algorithms, pp. 407-419, Addison-Wesley, Reading (1983).
- 2) T. C. Hu : Shortest paths, Combinatorial Algorithms, pp. 1-39, Addison-Wesley, Reading (1982).
- 3) M. L. Fredman, R. E. Tarjan : Fibonacci Heaps and their Uses in Improved Network Optimization Algorithms, Proceedings of the 25th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Singer Island, Florida, pp. 338-346 (1984).
- 4) E. W. Dijkstra : A Note on Two Problems in Connexion with Graphs, Numerische Mathematik, Vol. 1, pp. 269-271 (1959).
- 5) R. C. Prim : Shortest Connection Networks and some Generalizations, Bell Syst. Tech. J., Vol. 36, pp. 1389-1401 (1957).
- 6) 伊理, 藤重, 大山 : データ構造と基本的算法, グラフ・ネットワーク・マイロイド, pp. 21-37, 産業図書, 東京 (1986).
- 7) 伊理 (監), 腰塚 (編) : ネットワーク・フローの問題, 計算幾何学と地理情報処理, pp. 149-162, 共立出版, 東京 (1986).
- 8) N. Maculan : The Steiner Problem in Graphs, Annals of Discrete Mathematics 31, pp. 185-212, North-Holland, Amsterdam (1987).
- 9) E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. b. Shmoys (ed.) : The Traveling Salesman Problem, p. 465. John Wiley & Sons, Chichester (1985).

- 10) 加藤, 小林, 小沢, 今枝: 伝播負担関数による文化の伝播路の抽出, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 4, pp. 418-427 (1988).
- 11) 加藤常員: 最短路と最小木に関しての一考察, 投稿中.

A Study on the Properties of the Junction Effect

Tunekazu KATO

*Graduate School of Science,
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama, 700, Japan*
(Received September 30 1988)

The initial weight of each vertices in transformed into a new weight by a monotonously increasing convex function in a network, when considering the shortest path problem to find out all of the shortest paths from one vertex to all the other vertices for the new weight. The graph given by the shortest path problem of this type is composed of a tree consisting of sub-paths (vertices) each of which are the shortest path between the vertices. The tree (the shortest path) changes according to types of the functions used for weight. For a sufficiently rapidly increasing function, we show that the tree consisting of the shortest paths agrees with the minimum spanning tree. The change of a tree by using a different convex function for weight is called a junction effect. We discuss the properties of the junction effect. By using a non-negative real number for the weight, a numerical computer experiment is performed and its results are also presented.