

二次元離散力学系の不規則現象

太田 垣 博 一

岡山理科大学理学部電子理学科

(昭和57年9月24日 受理)

1. 緒言

システムの動特性がある特異性をもっている運動の方程式によって記述されている場合、そのシステムの大局的な振舞いにおいてしばしば複雑な軌道構造を有していることがみられる。ここで特異性とはシステムの動特性を定めているベクトル場が消える点、すなわち特異点が存在することをいう。¹⁾ 運動の方程式が \mathbf{R}^n における、双曲型の特異点^{*1)}を有する常微分方程式によって記述されている場合において、システムがカオスの挙動といわれる複雑な振舞いをするのがいくつかの文献において報告されている。(たとえば2), 3)を参照)そしてカオスの挙動の発生条件や発生のメカニズムについても、ある限定的なシステムを対象とした場合に対して考察されている。^{4),5)} しかしサンプル値制御系のように動特性が $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ の写像によって特徴づけられるような場合も多く存在するが、このような場合については一次元、すなわち $n=1$ の場合に対して考察されている程度(たとえば6), 7)等を参照)で、 $n \geq 2$ の高次元の場合に対する考察はきわめて少ないのが実情である。

本研究は、 $n=2$ の場合すなわち $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の写像によって特徴づけられた離散的な力学系に発生する不規則挙動の存在について、与えられた写像の不変多様体を解析的に表現するという手法を導入することによって考察することを目的とする。

2. 問題の定式化

本研究で対象とするのは、次のような二次元の離散力学系である。

$$(2.1a) \quad x_{k+1} = x_k + hy_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$(2.1b) \quad y_{k+1} = y_k + ax_k - bx_k^3 + cy_k$$

ただしここで x_0, y_0 は初期条件として与えられているものであり、 a, b と c は定数で次のようなものである。

$$(2.2a) \quad a = \beta h$$

$$(2.2b) \quad b = \alpha h$$

$$(2.2c) \quad c = 1 - \delta h$$

*1) 特異性における線形化写像の固有値が実で正と負のものが存在するとき双曲型であるという。

式 (2. 1), (2. 2) で定義された力学系は, 連続的な力学系で, 減衰を有する自律的な常微分方程式

$$(2. 3) \quad \ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = 0 \quad (\dot{} = \frac{d}{dt})$$

を h を差分間隔として離散化したときに出現するものである. 式 (2. 3) は三つの特異点を有しており, そのうち $(0, 0)$ は鞍点, すなわち双曲型の固定点であり, $(\pm\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ は沈点 ($\delta=0$ としたときは中心点) であることがわかる,⁴⁾ 式 (2. 3) の力学系は $\delta=0$ なるとき Hamilton 系となり, このとき原点すなわち鞍点に対するセパトリックスと呼ばれる不変曲線が存在する (図1を参照). そしてセパトリックスの上に, t の増大に対し鞍点へは入っていくような解軌道と出ていくような解軌道が存在する. これらの解軌道のつくる不変曲線を不変多様体といい, 特に前者の解軌道に関するものを安定多様体, 後者に関するものを不安定多様体と呼ぶ. いまこれらは一致している.

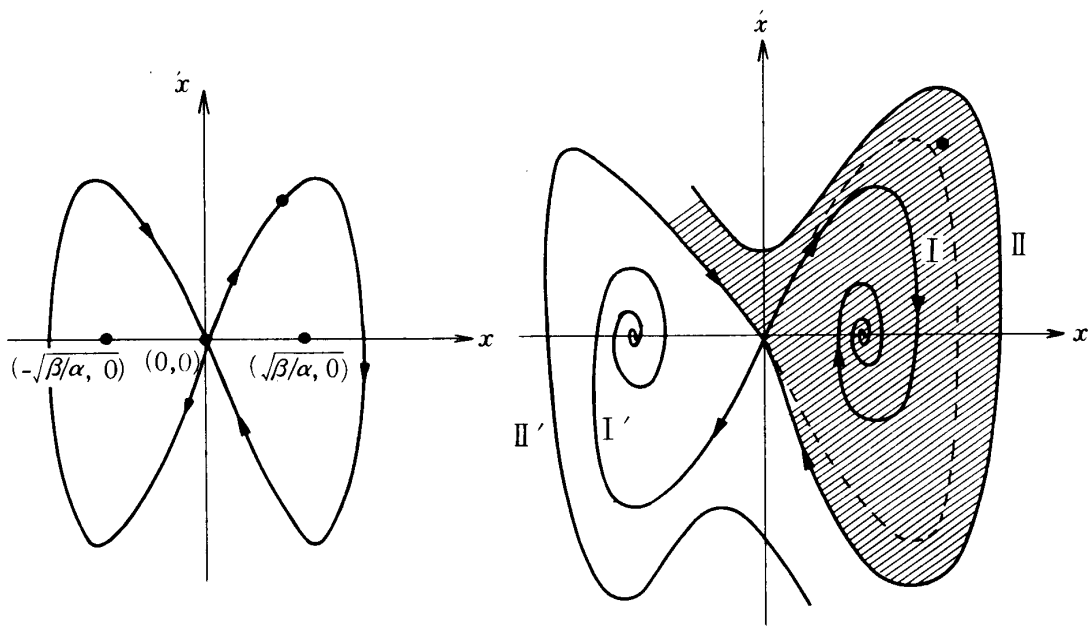


図1. 式 (2. 3) で $\delta=0$ としたときに存在するセパトリックス

図2. 式 (2. 3) ($\delta \neq 0$) の不変曲線

式 (2. 3) の力学系が $\delta > 0$ なる減衰を有している場合, セパトリックスは破られて図2に示されたようになる. すなわち不変多様体は解曲線 I, I' と II, II' のつくる安定多様と不安定多様体となる. このとき解曲線 I と II の間の領域から出発する解軌道は t の増大に対し沈点 $(\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ へ接近していき, 解曲線 II より外側の領域から出発する解軌道は一度原点へ接近したのち沈点 $(-\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ へ接近していく. 解曲線 I', II' に関する領域についても同様のことがいえる. このように, この場合初期値に依存して解軌道は二つの沈点 $(\pm\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ のどちらかに接近していくことがわかる.

式 (2. 1) の力学系を式 (2. 2) のような定数を通して把握すると, 上述のようなすなわち二つの沈点のどちらかに解軌道が接近するというような振舞に対応する挙動しか存在

しないように思われる。実際、差分間隔 h を十分小さく選定すれば、このことは成立するように思われるが式 (2. 1) の力学系の振舞は h の選び方に大きく依存しており、非常に複雑な解軌道の構造を有しカオス的な不規則挙動を発生する場合がある。本研究はどのような差分間隔 h に対してこのような不規則挙動が発生するのかを解析的に考察するものである。3 節において、不変多様体の解析的表現を行なう。4 節において、3 節の結果を用いてカオス的な不規則挙動の発生条件を誘導しそのような挙動の発生するしくみを明らかにする。さらに 5 節において数値実験の結果が示されている。

3. 不変多様体の解析的表現

式 (2. 1) の力学系を特徴づけているのは $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の写像 f で次式によって定義されているものである。

$$(3. 1) \quad f(x, y) = (x + hy, ax - bx^3 + cy)$$

ただしここで h, a, b と c は前節で規定された正の定数である。式 (3. 1) の写像に対する不変多様体が

$$(3. 2) \quad y = \xi(x)$$

と表わされるものと仮定しよう。ここで式 (3. 2) の関数 $\xi(x)$ を解析的に求めることについて考える。式 (3. 2) によって決まる曲線上の点は式 (3. 1) の写像によって次のように写像される。

$$(3. 3) \quad f(x, y)|_{y=\xi(x)} = (x + h\xi(x), ax - bx^3 + c\xi(x))$$

式 (3. 3) の定める点もやはり不変多様体上の点であるので式 (3. 2) を満足する。したがって不変性の条件として次式を得る。

$$(3. 4) \quad ax - bx^3 + c\xi(x) = \xi(x + h\xi(x))$$

これは関数 $\xi(x)$ についての関数方程式である。それ故、問題は関数方程式 (3. 4) を満足する $\xi(x)$ を求めることとなる。そこで $\xi(x)$ を

$$(3. 5) \quad \xi(x) = \xi_0(x) + b\xi_1(x) + b^2\xi_2(x) + \dots$$

と非線形要素の存在を表わすパラメータ b についての冪級数に展開できるものと考えて近似的に $\xi(x)$ を決定することについて考えよう。はじめに $b=0$ としたとき、すなわち式

(3. 1) の写像が線形なるときに対する不変多様体について考える。これは式 (3. 5) においては b の零乗に対する $\xi(x)$ という意味で零次近似として考えることができる。このとき式 (3. 4) より

$$(3. 6) \quad ax + c\xi_0(x) = \xi_0(x + h\xi_0(x))$$

なる関数方程式を得る。いま写像 f は線形であるので、 $\xi_0(x)$ も線形関数として式 (3. 6) を用いると $\xi_0(x)$ に対し次式を得る。

$$(3. 7) \quad \xi_0(x) = \xi_0^\pm(x), \quad \xi_0^\pm(x) = m_1^\pm x$$

ただしここで m_1^+, m_1^- は次式で与えられる。

$$(3.8a) \quad m_1^+ = \frac{1}{2} \{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 3\beta}\}$$

$$(3.8b) \quad m_1^- = \frac{1}{2} \{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 3\beta}\}$$

式 (3.7) で定められる曲線は式 (3.1) の写像の線形化写像に対する不変多様体である, それ故式 (3.8) の m_1^+ と m_1^- は式 (3.1) の写像の Jacobian に対する固有値と一俾しているということに注意しよう. このことから $\xi_0^+(x)$ は原点 (0, 0) に対する不安定多様体, そして $\xi^-(x)$ は安定多様体を表わしていることがわかる.

式 (3.7) の定める曲線は, 式 (3.1) の写像に対しても原点に十分近接しているならば不変多様体を表わしているとみてよいけれども原点を遠ざかるに従って次第に不変多様体からずれるのは当然である. それ故式 (3.5) のように第一次以上の高次の関数 $\xi_i(x)$, $i=1, 2, \dots$ を定めることによって近似する必要に迫られる. ここで第一次近似に対して式 (3.6) に対応する式を誘導すると次式のような $\xi_1(x)$ についての関数方程式が得られる.

$$(3.9) \quad -x^3 + c\xi_1(x) = m_1^+ h \xi_1(x) + \xi_1((1 + hm_1^+)x + bh\xi_1(x))$$

式 (3.9) より $\xi_1(x)$ に対し

$$(3.10) \quad \xi_1^\pm(x) = m_3^\pm x^3$$

を得る. ただしここで

$$(3.11) \quad m_3^\pm = -\frac{1}{[(\delta + 4m_1^\pm) + 3m_1^{\pm 2}h + m_1^{\pm 3}h^2]h}$$

である. さらに第二次近似に対して, $\xi_2(x)$ に対する次の関数方程式を得る.

$$(3.12) \quad c\xi_2(x) = m_1 h \xi_2(x) + 3hm_3^2(1 + hm_1)^2 x^5 + \xi_2(x + hm_1 x + bh m_3 x^3 + b^2 h \xi_2(x))$$

式 (3.12) より $\xi_2(x)$ に対して

$$(3.13) \quad \xi_2^\pm(x) = m_5^\pm x^5$$

を得る. ただしここで

$$(3.14) \quad m_5^\pm = \frac{3m_3^{\pm 2}(1 + m_1^\pm h)^2}{\delta + 6m_1^\pm + 10m_1^{\pm 2}h + 10m_1^{\pm 3}h^2 + 5m_1^{\pm 4}h^3 + m_1^{\pm 5}h^4}$$

である. このようにして不変多様体を望む次数まで近似的に表現することが可能である. いま不変多様体の上の点の x 座標が十分小さくて第二次近似によって十分近似されると仮定しよう. すなわち不安定多様体は

$$(3.15) \quad \xi^+(x) \cong m_1^+ x + b m_3^+ x^3 + b^2 m_5^+ x^5$$

そして安定多様体は

$$(3.16) \quad \xi^-(x) \cong m_1^- x + b m_3^- x^3 + b^2 m_5^- x^5$$

によって表わせるものとする.

4. 不規則挙動の発生条件

本節において, 式 (2.1) の力学系に発生する不規則挙動の存在性について考察する.

一般に力学系が不規則挙動を呈示するのは相空間においてストレンジアトラクタが出現しているときであり、これはホモクリニック点あるいはヘテロクリニック点（摂動されない力学系のもつセパトリックスが“鞍対鞍” 総合をもっている場合）の存在に応じて出現することが知られている。³⁾ 式 (2. 1) の力学系に対してホモクリニック点は一般的には集合として次のように定義される。

【定義1】 式 (2. 1) の力学系の鞍点に対する安定多様体を M^s ，不安定多様体を M^u と表わそう。ある η が与えられたとして M^s, M^u の近傍を $U_\eta(M^s), U_\eta(M^u)$ と表わそう。このときどんな $\eta > 0$ に対しても

$$U_\eta(M^s) \cap U_\eta(M^u) \neq \emptyset$$

が成立するならば、集合 $U_\eta(M^s) \cap U_\eta(M^u)$ をホモクリニック集合という。(集合が点である場合ホモクリニック点という。)

以下において定義1のホモクリニック点の存在の条件を3節で得られた不変多様体の解析的表現式 (3.15) と (3.16) を用いて誘導しよう。式 (2. 1) で h が十分小さければ、不安定多様体は沈点 $(\pm\sqrt{\beta/\alpha}, 0)$ の位置からみて安定多様体の内側に存在している。このとき式 (3.15) と (3.16) の定める曲線が x 軸をきる点もこのことに対応して $\xi^+(x)$ に関する点は $\xi^-(x)$ に関する点の内側にあり、この場合力学系の振舞は二つの沈点のどちらかに接近していく。(図3参照) したがってこのような場合は式 (2. 1) の力学系を式 (2. 3) の力学系の差分方程式としてみたとき定性的な性質を十分よく捉えていると考えてよい。しかし h が増大するにつれて $\xi^+(x)$ と $\xi^-(x)$ の x 軸を切る点は次第に接近していき、その位置関係が逆転するようになる。このように逆転の起こったときに安定多様体と不安定多様体の交叉の集合が、したがってホモクリニック集合が存在すると考えられる。(図4)

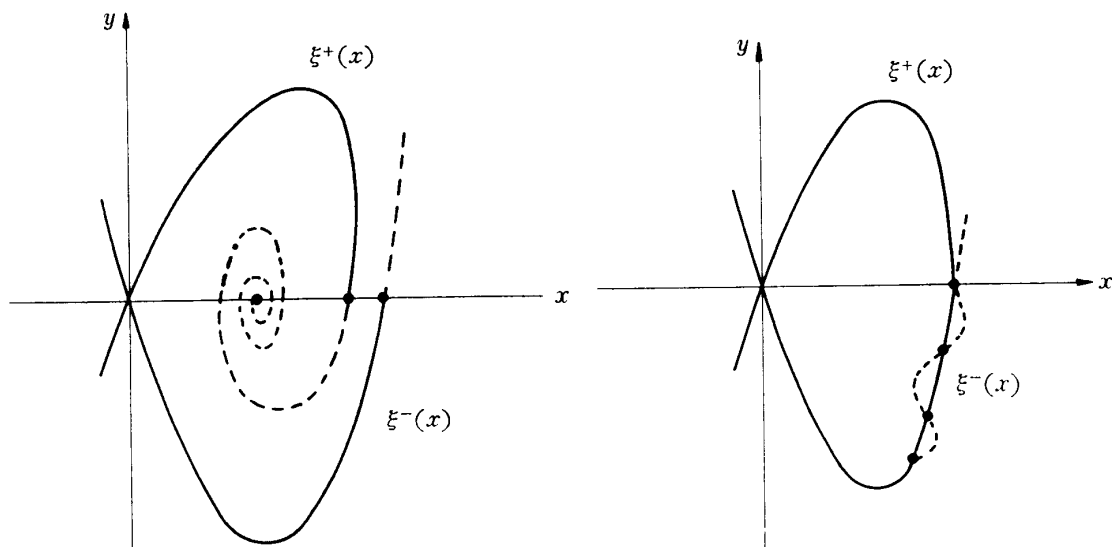


図 3

図 4

一次近似の不変多様体に対しては次の定理を得る.

定理1. 式 (2. 1) の力学系の不変多様体が第一次近似によって十分近似されるならば, 次の不等式をみたす h に対してホモクリニック点が存在する.

$$(4. 1) \quad h > h_c = \frac{1}{2m_1^+ m_1^- (m_1^+ + m_1^-)} \\ \times [-3m_1^+ m_1^- + \sqrt{9m_1^+ m_1^- + 4\delta m_1^+ m_1^- (m_1^+ + m_1^-)}]$$

証明 第一次近似に対して不変多様体が x 軸をきるのは, 式 (3.15) より

$$(4. 2 a) \quad x^+ = \pm \sqrt{\frac{-m_1^+}{bm_3^+}}$$

$$(4. 2 b) \quad x^- = \pm \sqrt{\frac{-m_1^-}{bm_3^-}}$$

である. それ故ホモクリニック点の存在条件 $|x^+| > |x^-|$ は式 (4. 2) より次式のようになる.

$$(4. 3) \quad \sqrt{\frac{-m_1^+}{bm_3^+}} > \sqrt{\frac{-m_1^-}{bm_3^-}}$$

式 (4. 3), (3. 8) と (3.11) より式 (4. 3) は

$$(4. 4) \quad m_1^+ m_1^- (m_1^+ + m_1^-) h^2 + 3m_1^+ m_1^- h - \delta > 0$$

となり, 式 (4. 1) が従う.

5. 数値実験

前節で得られた結果についてその妥当性を確認するために数値実験を行なった. ここでは h をパラメータとして与え, $\alpha=100$, $\beta=10$ とし $\delta=1, 2, 3, 4$ とし, ルンゲークッタ法を用いて式 (2. 1) の数値計算を行ない, (x_k, y_k) , $k=1, 2, \dots$ の見本過程について検討した. 図 4, 5, 6, 7 は $\delta=1.0$ とし h を 0.01, 0.04, 0.05, 0.1 としたときの $k=200$ までの (x_k, y_k) をプロットしたものである. これらの結果から $h=0.01$ のときは, 3節においても記述したように力学系の振舞はどちらかの沈点へ接近していくものとなる. $h=0.04$ のときは沈点へは接近せず, その近傍を揺動するようになる. そして $h=0.05$ としたときは周期的な外力が存在しないにもかかわらず, 周期的な解軌道が存在しているような振舞を呈示する. h をさらに増大させて0.1とすると, このとき定理1, 式 (4.1) の $h=0.828$ を越えており不安定多様体はもはや $x>0$ なる領域にとどまらず, 力学系は不規則な振舞の相相を呈示している. ここで示した図のうちはじめの三つに対しては3節で得られた不変多様体の解析的表現の結果から安定多様体不安定多様体の内側に存在するが, 一方最後の図7に対する場合はその配置が逆になっていることがわかる. 図9は $\delta=4.0$, $h=0.35$ とした場合で, 不変多様体は図8の場合と同様の配置を示している. 図9は力学系に非常に不規則なカオス的挙動が存在することを示していると思われる.

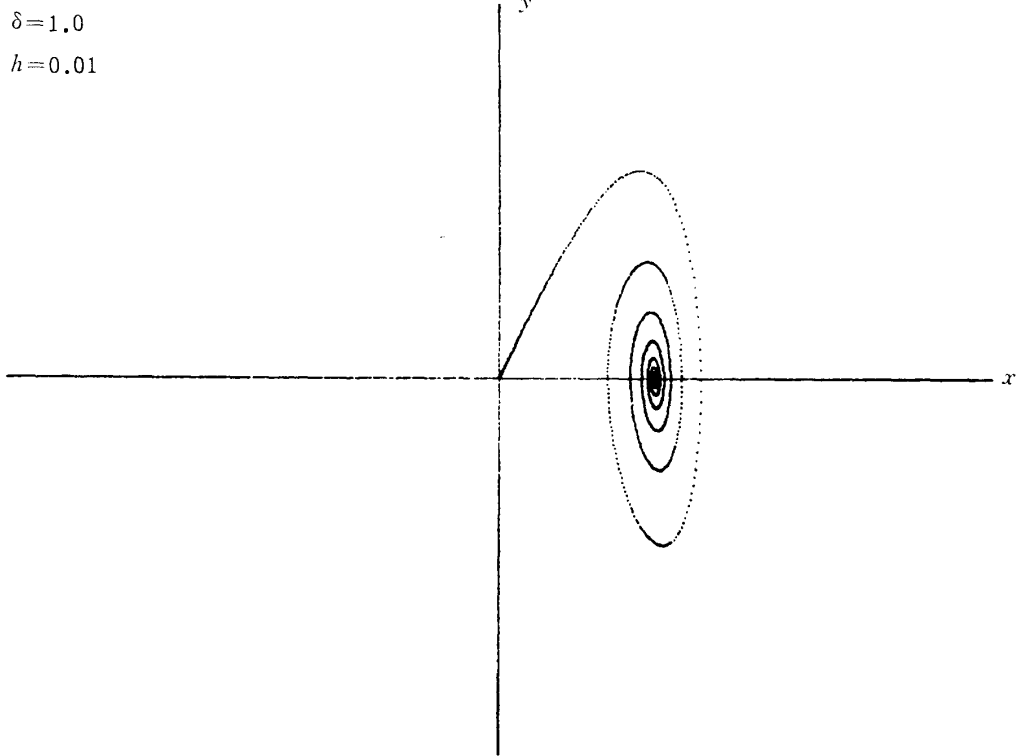


図 5

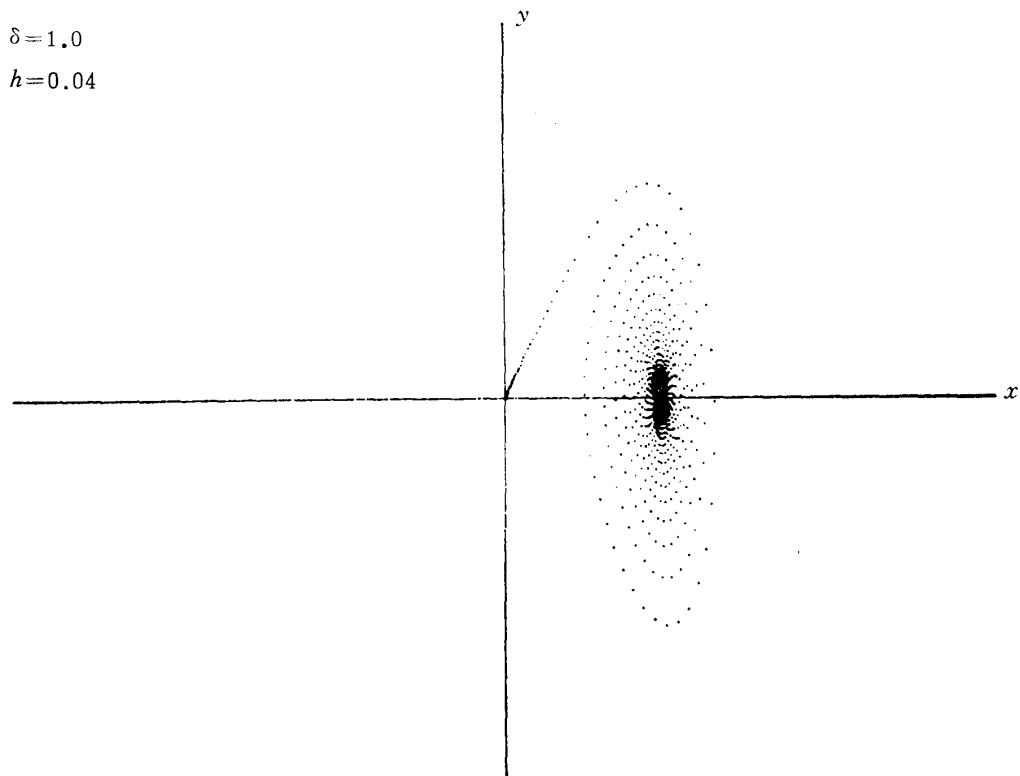


図 6

$\delta=1.0$
 $h=0.05$

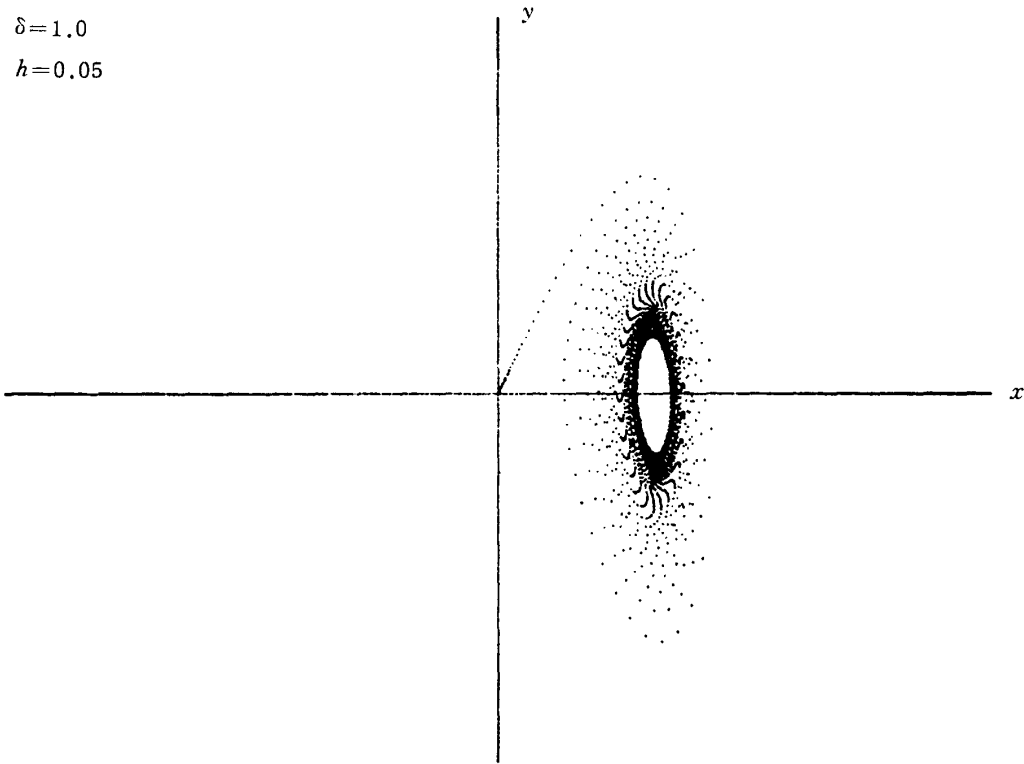


図 7

$\delta=1.0$
 $h=0.09$

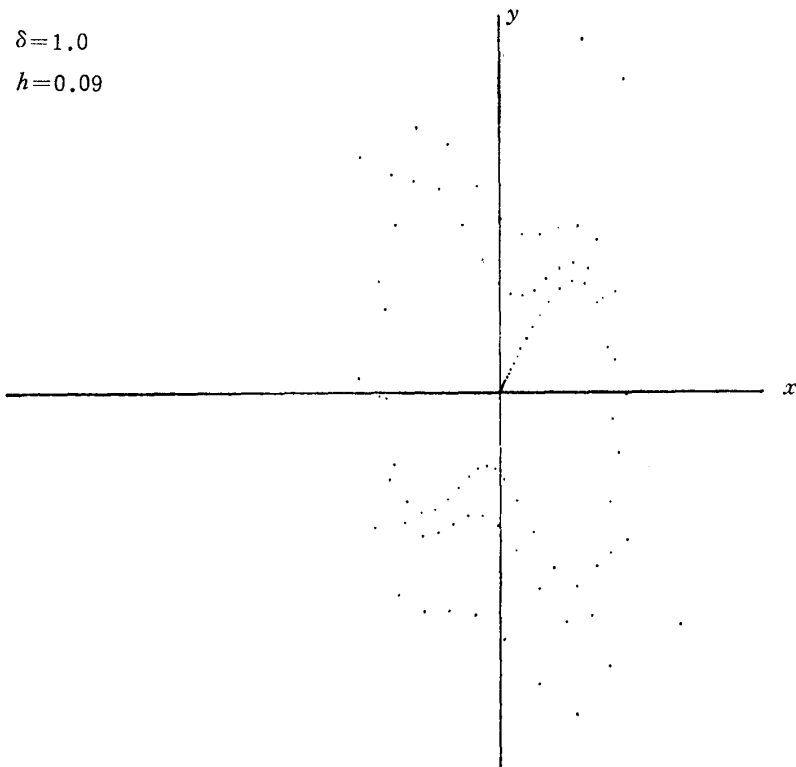


図 8

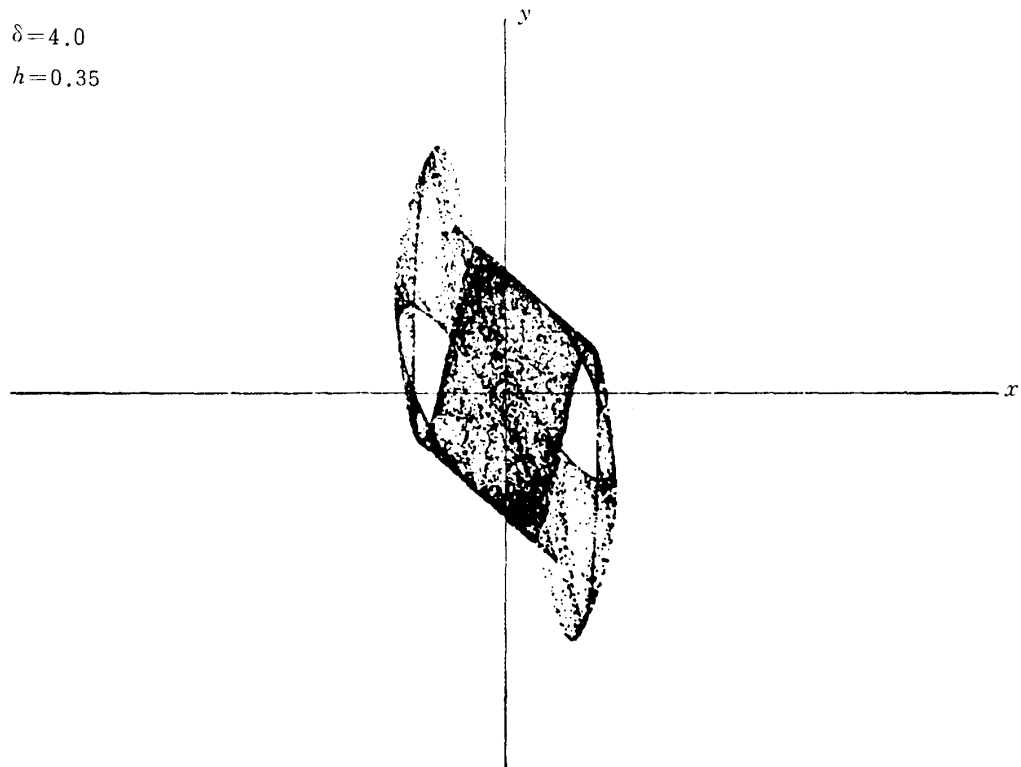


図 9

6. 結言

本報告において、二次元の離散力学系の不規則挙動の存在を不変多様体の解析的表現を近似的に行なうことによって判定することを提案した。ここで得られた結果は x が十分小さければ妥当な結果を与えることが数値実験から確認されている。そしてここで考察された力学系に対して近似的に表現された不安定多様体の x 軸をきる位置が安定多様体のそれより内側であれば力学系の振舞は初期値に依存して二つの沈点のどちらかに接近していくが、その配置が逆すなわち不安定多様体の方が安定多様体の外側に存在するようになるとホモクリニック点が存在して不規則な挙動が発生し初期値の僅かな違いに対してでも極めて異なる振舞を呈示することがわかる。

謝 辞

本研究に対し有益な助言をいただいたことに対して京都工芸繊維大学、砂原善文教授、福井大学、朝倉俊行講師に深甚の謝意を表します。

参考文献

- 1) V. I. Arnol'd; Ordinary Differential Equations. M. I. T. Press (1973)
- 2) P. J. Holmes; A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor, Phil. Trans. Roy. Soc. pp. 419-448 (1979)
- 3) J. E. Marsden; Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics SIAM (1981)

- 4) 砂原, 朝倉, 太田垣; 非線形確率システムにおけるカネスの挙動の存在と発生条件について
機論 (to appear)
- 5) 砂原, 朝倉, 太田垣; 周期変動パラメータをもつ非線形力学系のカオスの挙動について
第25回自動制御連合講演会 (1982)
- 6) R. E. Kalman Nonlinear Aspects of Sampled-Data Control Systems, Proc. Symp. on Nonlinear Circuit Analysis, Vol. VI pp. 273-312 (1956)
- 7) T. Y. Li & J. A. Yorke; Period Three implies Chaos, Ameri. Math. Monthly, 82, pp. 985-992 (1975)
- 8) S. Smale; Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press pp. 63-80 (1965)
- 9) 大同寛明; Hénon 写像の homoclinic 点および heteroclinic 点出現の解析的条件, 力学系理論と関連諸分野の総合研究 pp. 27-36 (1979)

Random Phenomena in Two-dimensional discrete dynamical systems

Hirokazu OHTAGAKI

*Department of Electronic Science,
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, JAPAN*

(Received September 24, 1980)

Random behaviours which arise in two-dimensional discrete dynamical systems are considered via the analytical expression of invariant manifold associated with the dynamical systems. In this paper, the mechanism of chaotic behaviour are clarified and conditions for chaotic behaviour are also obtained.