Elementary Education Online, 2018; 17(3): pp. 1317-1335
İlköğretim Online, 2018; 17(3): s.1317-1335. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr
doi 10.17051/ilkonline.2018.466349

Matematiksel İspatların Ortaokul Matematik Ders Kitaplarındaki Yeri[1]

The Place of Mathematical Proofs in the Middle Grade Mathematics Textbooks

Zülfiye Zeybek, *Gaziosmanpaşa Üniversitesi, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr*
Aslıhan Üstün, *Kızık Ortaokulu, 60aslihanustun@gmail.com*
Ahmet Birol, *Gaziosmanpaşa Ortaokulu, ahmetbirol08@gmail.com*

Öz. İspat kavramının matematik eğitimindeki yeri ve önemi son yıllarda yapılan eğitim reformlarının açıkça belirttiği “matematiksel ispatların ana okuldan lise son sınıfa kadar matematik derslerinin önemli bir parçası olmalıdır” yönündeki önerisi ile vurgulanmaktadır. Ders kitap inceleme çalışmaları ise ders kitapları ile güncel reform önerilerinin aynı doğrultuda olmadığını kanıtlar niteliktedir. Bu çalışmanın amacı matematiksel ispat etkinliklerinin ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitaplarında hangi sıklıkla yer bulduğunu araştırmaktır. Bu amaçla, Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan Tokat ili bölgesinde 5, 6, 7 ve 8. sınıf matematik derslerinde kullanılan kitaplarda yer alan ispat etkinlikleri incelenmiştir. Seçilen ders kitapları en az iki kodlayıcı tarafından iki aşamada kodlanmıştır. Birinci aşamada ders kitaplarında yer alan örnek, problem, etkinlik, uygulama ve değerlendirme soru sayları belirlenirken; ikinci aşamada ise muhakeme-ve-ispat etkinlikleri tespit edilmiştir. Bu çalışmanın bulgularına göre ortaokul ders materyallerinde yer alan toplamda incelenen 2831 matematiksel aktiviteden sadece 177 (%6) aktivitenin muhakeme-ve-ispat etkinliği olma özelliği taşıdığı görülmüştür. Ders materyallerinde yer alan muhakeme-ve-ispat etkinliklerinden 80 (%45) aktivitenin ispat olmayan argüman özelliği taşırken sadece 18 (%10) aktivitenin ispat olma özelliği taşıdığı bulunmuştur. Bu bulgular ışığında ders kitaplarında yer alan muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin sayısı güncel eğitim reformlarının ve matematik eğitimcilerinin önerileri ile uyuşmadığı görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Çıkarım, İspat, Muhakeme, Ortaokul Matematiği, Örüntü

Abstract. The importance of proof in mathematics education has been emphasized by current educational reform suggestions, which explicitly state “mathematical proofs should be an essential part of mathematics classrooms from kindergarten to high school”. Studies, however, demonstrate that classroom textbooks and current educational reform suggestions do not align well. The purpose of this study is to investigate to what extent reasoning-and-proving tasks take place in grade 5-8 mathematics textbooks. For this purpose, the textbooks suggested by the Ministry of Education to be used in the area of Tokat province have been selected. Selected textbooks were analyzed by at least two coders in two stages. While in the first stage of coding the number of examples, tasks, problems, and practice questions in the textbook were determined; in the second stage the number of reasoning-and-proving tasks were detected. According to the findings of this study, among the total of 2831 tasks analyzed, only 177 (6%) tasks show the characteristics of reasoning-and-proving tasks. Among these reasoning-and-proving tasks, 80 (45%) tasks show non-proof argument characteristics while only 18 (10%) tasks show proof characteristics. These results demonstrate that the number of reasoning-and-proving tasks do not align with the recommendations of current education reforms and mathematics educators.

Keywords: Conjectures, Middle Grade Mathematics, Pattern, Proof, Reasoning

[1] Bu makalede yer verilen bulguların bir kısmı International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology (ICEMST) konferansında sunulmuştur.

Geliş tarihi: 04.08.2017 Kabul tarihi: 28.02.2018 Yayımlanma tarihi: 31.07.2018

SUMMARY

Introduction

Proof is considered as an essential aspect of mathematics (Schoenfeld, 2009). Mathematical reasoning and proof have gained an increasing level of attention in recent attempts to reform mathematics teaching (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010; NCTM, 2000). Both the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Principles and Standards (2000) and Common Core State Standards Initiatives (CCSSI, 2010) recommend that all students should learn to construct and evaluate mathematical arguments and to demonstrate a variety of reasoning and proof techniques at all levels from kindergarten through grade 12. However, the results of the studies, which investigated reasoning-and-proving tasks in mathematics textbooks, do not align well with the recommendations of these educational reform acts. For instance, the study, which was conducted by Newton and Newton (2007), analyzed 18 elementary mathematics textbooks in England and documented that reasoning-and-proving tasks were not included often in the books. Similarly, Bieda, Ji, Drwencke and Picard (2014) investigated 5th grade textbooks and stated that only 3.7% of the tasks were reasoning-and-proving tasks. Stylianides (2009) also documented that among 4578 tasks analyzed only 40% of them were reasoning-and-proving tasks.

The purpose of this study is to investigate the nature of opportunities to engage in reasoning-and-proving (RP) in elementary mathematics textbooks from grade 5-8 in Turkey. For this purpose, the textbooks suggested by the Ministry of Education to be used in the area of Tokat province have been selected. More specifically, the following research question has guided the study: What opportunities exist in mathematics textbooks for students to engage in reasoning-and-proving in grades 5-8?

Method

This study was designed as a qualitative study. The textbooks, suggested by the Ministry of Education to be used in 5-8 grades in the area of Tokat province, were analyzed by using content analysis.

The analysis of the textbooks occurred in two steps. In the first step, the textbooks were reviewed in order to determine the key words of the tasks that show characteristics of reasoning-and-proof tasks. The key words that were determined in the first round of analysis were as follows: "finding pattern, explain, guess, generate rules, validate the rules, convince, and recognizing relationships".

In the second step of the analysis, the textbooks were analyzed in two categories: (1) general analysis and (2) reasoning-and-proving analysis. In the general analysis step, the number of examples, tasks, problems, and practice questions in the textbooks were determined and the page numbers that they were presented were recorded. During the general analysis, the titles that the textbooks used were used exactly in the same way.

After general analysis, the textbooks were analyzed by using the reasoning-and-proving framework. The textbooks were re-analyzed in order to determine the number of reasoning-and-proving tasks and to record their page numbers. The key words defined during the first step of the analysis and the tasks that incorporate those key words were analyzed carefully.

The textbooks were analyzed by two coders who were familiar with reasoning-and-proving framework and existing literature regarding mathematical proofs individually first. Then, the coders meet to discuss their codes, discuss the disagreements and reach to consensus.

Results

According to the general analysis of the textbooks, the number of the mathematical activities including tasks, examples, problems, etc in the textbooks from grade 5-8 was 2831 in

total. Among these 2831 mathematical activities, 1123 of them (40%) were examples, 169 (6%) were tasks, 1425 (50%) were practice questions and 89(3%) were problem solving while only 25 (0, 8%) activities were problem writing activities.

The results of reasoning-and-proving analysis demonstrated that among these 2831 mathematical activities, only 177 (6%) of them showed the characteristics of reasoning-and-proving tasks. Out of these 177 reasoning-and-proving tasks, 78 (44%) were coded as empirical arguments. Besides empirical arguments, the highest number of reasoning-and-proving task was identifying patterns. 46 tasks were coded as identifying patterns, which consisted 26% of the reasoning-and-proving tasks. Providing proof tasks, on the other hand, took place the least in the textbooks. Only 17 (10%) activities were coded as demonstration.

Discussion and Conclusion

This study investigated the prevalence of reasoning-and-proving (RP) tasks in elementary textbooks and found that such tasks were a very small percentage of the total number of tasks. Based on a review of the literature about curriculum analyses of mathematics textbooks (Bieda et al., 2014; Newton & Newton, 2007; Stylianides, 2008), we hypothesized this would be the case.

According the findings of the study, only 177 among 2831 tasks in the textbooks showed the characteristics of reasoning-and-proving tasks. The majority of the tasks that were coded as reasoning-and-proving tasks —78 (44%)—were coded as empirical arguments. Harel and Sowder (1998) argued that accepting a couple of examples as mathematical proofs in mathematics classrooms might cause the students hold various misconceptions. Given that the number of the tasks that were coded as reasoning-and-proving tasks were very low, the results of many studies (Chazan, 1993; Moore, 1994; Knuth, Choppin, & Bieda, 2009), which demonstrated that students at all levels struggle with proofs come as no surprise. These findings suggest that the usefulness of existing textbooks for implementing the aims of the current educational reform acts (CCSSI, 2010; NCTM, 2000) may be limited.

GİRİŞ

İspat kavramının matematik eğitim ve öğretimindeki yeri ve önemi şüphesiz yadsınamaz (Schoenfeld, 2009). Son yıllarda yapılan eğitim reformlarında yer alan matematiksel ispatların ana okuldan lise son sınıfa kadar olan matematik sınıflarının vazgeçilmez bir parçası olması gerektiğini savunan ilkelerin, matematiksel ispatların eğitim öğretimin her kademesinde yaygınlaşmasını hedeflediği açıktır (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010; NCTM,2000). Matematik eğitimcileri ve araştırmacılar, ispat kavramının okul matematiğinde (genellikle lise geometri derslerinde) biçimsel bir süreç olarak tanıtılmasının yanlış olduğunun altını çizmektedirler (Bieada, 2010; Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2008). Oysaki ispat kavramı matematikte kavramlar ve kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılmasında bir araç olarak kullanılmalıdır (Knuth, 2002; Stylianides, 2010). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) (1998) "keşfetme, çıkarımda bulunma, ifade etme ve ispat yapma matematiksel düşünme ile ilişkilidir ve matematiksel aktivitelerden bağımsız öğretilmemelidir (s. 85)" diyerek, ispat kavramının ilköğretimin erken kademelerinden itibaren matematiksel kavramların öğretilmesinde etkili bir araç olarak kullanılması gerektiğini desteklemektedirler. Benzer olarak Türkiye'de 2013 yılında yapılan müfredat düzenlemesinde de matematiksel olarak muhakeme yeteneği kuvvetli bireylerin yetişmesinin öneminin altı çizilmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013).

Yurt dışı ders kitap inceleme çalışmaları ders kitapları ile güncel reform önerilerinin aynı doğrultuda olmadığını kanıtlar niteliktedir. Örneğin, Newton ve Newton (2007), İngiltere'deki 18 ilköğretim matematik ders kitabını incelemiş ve bu kitapların matematiksel muhakeme-ve-ispat etkinliklerine çok yer vermediğini göstermiştirler. Benzer olarak, Bieda, Ji, Drwencke ve Picard (2014) 5. sınıf matematik ders kitabında yer alan matematiksel etkinliklerin sadece %3,7' sinin matematiksel muhakeme-ve-ispat etkinlikleri olduğunu bulmuşlardır. Stylianides (2009) de aynı şekilde Amerika Birleşik Devletlerinde yaygın olarak kullanılan ve güncel standartlar çerçevesinde düzenlenmiş ortaokul matematik ders kitaplarının cebir, sayılar teorisi ve geometri ünitelerini incelemiş ve 4578 matematik etkinliğinden sadece % 40'ının muhakeme-ve-ispat etkinliği olduğunu bulmuştur. Ancak bu etkinliklerden sadece %12'si ispat olma özelliği taşımaktadır (Stylianides, 2009). Bu çalışmalar eğitim reformlarının önerilerine rağmen muhakeme ve ispat kavramlarının ders materyallerinde halen yaygınlaşamadığını kanıtlar niteliktedirler.

İspatla ilgili yapılan araştırmalara bakıldığında, yurt dışında pek çok çalışmaya rastlanmasına rağmen, ülkemizde bu konuyla ilgili az sayıda çalışmanın yapıldığı görülmektedir (Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014). Bu çalışmanın amacı matematiksel ispat etkinliklerinin ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitaplarındaki yerini araştırmaktır. Bu amaçla, Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan Tokat ili bölgesinde kullanılan ortaokul matematik ders kitaplarında yer alan ispat etkinliklerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Aşağıdaki araştırma problemi çalışmaya yön vermiştir:

Muhakeme-ve-ispat etkinlikleri ortaokul matematik ders kitaplarında hangi sıklıkla yer almaktadır?

Analitik Çerçeve

Güncel eğitim reformları (CCSSI, 2010; NCTM, 2000), matematiksel yeterliliğin gelişiminin ancak matematiksel zihin alışkanlıklarının gelişimi ile mümkün olacağını savunur (Cuoco, Goldenberg, ve Mark, 1996; Kilpatrick, Swafford, ve Findell, 2001). Matematiksel zihin alışkanlıklarının gelişimi örüntü keşfetme, bu örüntülerden yararlanarak çıkarımda bulunma ve bu çıkarımları yeni bilgiler ışığında test etme, çıkarımları olası karşıt örneklere karşı revize etme ve bu çıkarımların doğruluğu ve yanlışlığını açıklayıcı argümanlar sunarak kanıtlama olarak belirtilir (Lakatos, 1976; Polya, 1954; Stylianides, 2008). Stylianides (2008) muhakeme-ve-ispat terimlerini birlikte kullanarak iç içe geçmiş dört aktiviteyi : " örüntü bulma", "çıkarım yapma", "ispat olmayan argüman sunma" ve "ispat sunma" ifade etmektedir. Muhakeme-ve-ispat etkinlikleri çatısı altında incelenen bu dört aktivitenin matematiksel zihin alışkanlıkların gelişiminde önemli yapı taşları oluşturduğu açıktır (CCSSI, 2010). Bu dört aktiviteden örüntü bulma ve çıkarım yapma genellemeler yapma çatısı altında incelenirken, matematiksel çıkarımlara kanıt sağlama başlığı altında ispat yapma ve ispat olmayan argüman sunma yer alır. Bu başlıklar ve alt başlıklar analitik çerçevenin daha iyi anlaşılması amacıyla örnekler sunularak matematiksel genellemeler yapma ve matematiksel çıkarımlara kanıt sağlama alt başlıkları halinde daha detaylı olarak incelenecektir.

Tablo 1. *Muhakeme-ve-ispat analitik çerçeve*

	Muhakeme-ve-İspat			
	Matematiksel Genellemeler Yapma		Matematiksel Çıkarımlara Kanıt Sağlama	
	Örüntü Bulma	Çıkarım Yapma	İspat Yapma	İspat Olmayan Argüman Yapma
Matematiksel Öğe	Olası (Plausible) Örüntü Kesin (Definite) Örüntü	Çıkarım	Genellenebilir Örnek Gösterim	Empirik Argüman Rasyonel

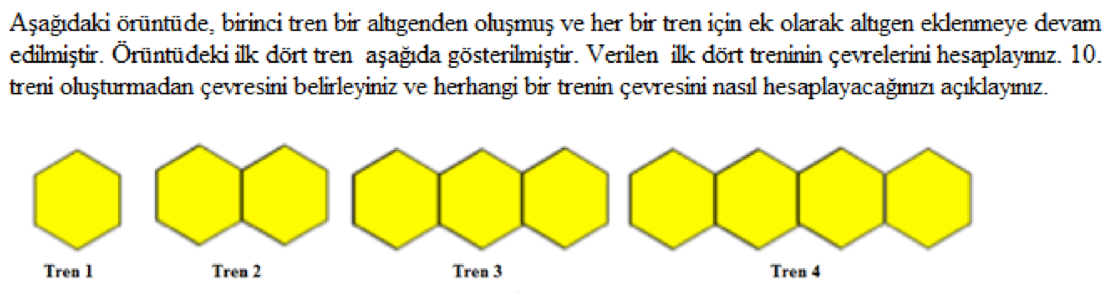
Matematiksel genellemeler yapma

Polya (1954) matematiksel genellemeler yapmayı matematiksel ilişkinin ele alındığı kümeden yeni kümeye yapılan transfer olduğunu belirtir. Stylianides (2008) çıkarım yapma ve örüntü bulmayı matematiksel genellemeler yapma ana başlığı altında inceler. Çıkarım genel matematiksel ilişkiler hakkındaki tamamlanmamış kanıtlara dayalı sebepli hipotezler olarak tanımlanır (Stylianides, 2008). Buradaki sebepli kelimesi hipotezin gelişi güzel olmayan özeliğini vurgularken, hipotez ise bir çıkarım hakkındaki belli seviyedeki belirsizliği ve bu çıkarım kabulü veya reddi için bir eylemin yapılması gerekliliğini vurgular.

Her ne kadar örüntü bulma ve çıkarım yapma birbiri ili ilişkili eylemler olarak görülse de, aralarındaki iki farkı Stylianides (2008) şu şekilde açıklar:

> (1) çıkarım yapmada çıkarımın oluşumuna neden olan durumlar kümesinin ötesine uzanan bir hipotez oluşturulur
>
> (2) çıkarım yapmada her ne kadar doğruluğu hakkında ikna ifadeleri yer alsa da doğruluğu (ve ya yanlışlığı) test edilmeye tabi bir hipotez öne sürülür. Örüntü oluşturmada ise verilen veri kümesine uyan ve doğruluğu hakkında olası şüphe bildirmeyen ilişkiler tanımlanır (s. 11).

Stylianides (2008) örüntü bulma etkinliklerini kesin (definite) ve olası (plausible) örüntüler olarak ikiye ayırır. Kesin örüntülerde örüntüye uyan kural tektir ve bu kural örüntünün verilen adımlarında açıkça belirtilmiştir.



Şekil 1. *Kesin örüntü temsili*

Stylianides (2008) şekil 1'deki tren etkinliği kesin örüntü temsili olarak sunar. Tren etkinliğinde her bir adımda bir altıgen eklenerek o adımdaki trenin oluştuğu, böylece *n*. trenin *n* adet altıgenden oluşacağı açıktır. Ayrıca, *n*. adımda oluşacak olan bu trenin çevresinin de $4n+2$ örüntü kuralı kullanılarak bulunacağını belirtmek için örüntüde sunulan kesin deliller mevcuttur.

Oysaki olası (plausible) örüntüde öğrencinin belirli bir örüntüyü seçebilmesi için kesin deliller sunulmaz. Diğer bir deyişle örüntüye uyan birden fazla kuralı bulmak mümkündür. Stylianides (2008) aşağıdaki örüntüyü (bknz. Şekil 2) olası örüntü temsili olarak sunar.

Aşağıdaki tablo iki değişken arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Tablodaki bir örüntüyü bulunuz ve bu örüntüyü boş bırakılan yerleri doldurmak için kullanınız.

A	0	1	2	3	4
B	1	2	4		

Şekil 2. *Olası örüntü temsili*

Şekil 2'de sunulan örnekte tabloya uyan örüntülerden biri $b=2^a$ örüntüsüdür. Bu örüntü kullanılarak boş bırakılan yerlere sırası ile 8 ve 16 sayıları yazılmalıdır. Oysaki tabloya uyan bir diğer örüntü ise $b=\frac{1}{2}.a.(a+1)+1$ olur ve bu örüntüye göre ise boşluklara sırası ile 7 ve 11 yazılmalıdır.

Matematiksel çıkarımlara kanıt sağlama

İspat özel bir argümantasyon şekli olup matematiksel bir iddianın her zaman doğru (ve ya yanlış) olduğunu disiplin normları çerçevesinde kabul gören argümantasyon modları ve gösterim formatında kullanarak oluşturulan bir süreç olarak tanımlanır (Bieda, 2010). Daha detaylı olarak, Stylianides'e (2007a) göre ispat, "matematiksel bir iddiayı doğrulamak veya çürütmek amacı ile oluşturulan birbirine anlamca bağlı bir dizi savdan oluşan, aşağıdaki karakteristik özelliklere sahip matematiksel bir argümandır":

(1) Sınıf topluluğu tarafından doğru olarak kabul edilmiş ve herhangi başka bir kanıta ihtiyaç duyulmayan matematiksel ifadeleri (kabul edilmiş ifadeler kümesi) kullanır
(2) Sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli olan veya sınıf topluluğunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki muhakeme biçimlerini (argümantasyon modları) kullanır
(3) İletişimde sınıf topluluğu tarafından bilinen ve topluluğun yapısına uygun olan veya kavramsal erişim sınırları içerisindeki ifade etme biçimlerini (argümantasyon sunum formları) kullanır (s. 291).

Stylianides (2007a) bu tanımla birlikte ispat kavramının sınıf topluluğu normlarına göre değerlendirilmesinin öneminin altını çizer. Stylianides (2008) ispat yapma çatısı altında genellenebilir örnek ve gösterimi alır. Genellenebilir örnek belirli bir durumu daha genel durumları temsil etmek amacı ile kullanan ispatlardır (Balacheff, 1988; Mason ve Pimm, 1984; Rowland, 1998). Gösterim ise belirli bir durumun temsil ediciliğine bağlı olmayan geçerli argümanlardır. Matematiksel bir ifadenin doğruluğunu kanıtlamak için ispat oluşturmada yetersiz kalan argümanlar ise ispat olmayan argümanlar olarak iki gruba ayrılır: (1) empirik argümanlar ve (2) rasyonel. Empirik argüman matematiksel bir iddianın doğruluğunu yetersiz kanıtlara dayalı olarak sunan argümanlardan oluşurken, rasyonel ise ne empirik ne de bir ispat olan argümanları açıklamak için kullanılır. Örneğin bir argüman bazı anahtar kabul edilmiş doğrulardan bahsetmiyor ve ya kabul edilmiş doğrulardan oluşan kümeye ait olmayan ifadelere yer veriyor ise rasyonel olarak kabul edilir. Stylianides (2008) rasyonel argümanın özelliklerini açıklamak için aşağıdaki örneği sunar:

"Çift Sayı +Çift Sayı= Çift Sayı olduğundan iki tek sayının toplamı "Çift sayı +1" seklinde yazılabilir.
Böylece, Tek Sayı + Tek Sayı = (Çift Sayı +1) + (Çift Sayı + 1)= (Çift Sayı + Çift Sayı) + 2= Çift Sayı+ 2= Çift Sayı bulunur" (s.11).

Bu argümanda iki tek sayının toplamının bir çift sayı olduğu " çift sayı+ çift sayı=çift sayı" öncülü kullanılarak sağlanır. Oysaki bu öncülde ispatlanması gereken bir ifade belirtmektedir. Sınıf topluluğu tarafından doğruluğu kanıta ihtiyaç duymayan veya önceden kanıtlanan ifadeleri kullanır kriterini yerine getiremediği için bu argüman rasyonel olarak kodlanmıştır. Stylianides (2008)'in sunduğu bu analitik çerçevenin matematiksel öğe kısmı ders kitaplarının incelenmesinde analitik çerçeve olarak nasıl kullanıldığı yöntem bölümünde detaylı bir şekilde açıklanacaktır.

YÖNTEM

Bu çalışmada nitel çalışma yöntemlerinden içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. İçerik analizinde amaç verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Tokat ili bölgesinde kullanılan, Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf ders kitapları içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Tablo 1'de açıklanan analitik çerçeve içerik analizinin temaları olarak kullanılmıştır.

Ders materyalleri inceleme süreci iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Ön aşamada ders materyalleri anahtar kelimelerin belirlenmesi için incelenmiş ve muhakeme-ve-ispat etkinlik özelliği taşıma potansiyeline sahip matematiksel aktivitelerde kullanılan anahtar kelimeler belirlenmiştir. Ders materyallerinin ön incelenmesi sonucunda belirlenen anahtar kelimeler " örüntü bulma, açıklama, ilişki bulma/fark etme, tahmin etme, kural geliştirme, kuralın geçerliliğini açıklama, ikna etme " şeklindedir.

Ders materyalleri inceleme aşamasında ise ders materyalleri iki kategoride incelenmiştir: (1) genel inceleme ve (2) muhakeme-ve-ispat etkinlikleri incelemesi. Genel incelemede ders materyalleri sayfa sayfa kitabın içeriğinde yer alan örnek, etkinlik, problem çözme, problem kurma, değerlendirme sorularının belirlenmesi için incelenmiş ve bu matematiksel aktivitelerin bulundukları sayfa numaraları kaydedilmiştir. Genel inceleme esnasında kitabın kullandığı başlıklara sadık kalınmıştır. Örneğin kitapta örnek olarak isimlendirilen aktivite örnek sayısına eklenmiş, ünite veya konu sonunda sorulan sorular uygulama veya değerlendirme soruları olarak sayım esnasında da aynı şekilde isimlendirilmiştir.

Genel inceleme sonrasında, her ünite muhakeme-ve-ispat analitik çerçevesi ışığında tekrar incelenmiştir (bknz. Tablo 1). Ders materyalleri sayfa sayfa muhakeme-ve-ispat etkinliği olma potansiyeline sahip aktiviteleri belirlemek ve bulundukları sayfa numaralarını kayıt etmek için analiz edilmiştir. Ön incelemede belirlenen anahtar kelimelerin yer aldığı matematiksel aktiviteler muhakeme-ve-ispat etkinliği olma potansiyeli taşıdığı için analiz aşamasında önem teşkil etmiştir.

Stylianides (2009) ortaokul ders materyallerini incelediği çalışmasında bir etkinliğin birden fazla kategoride kodlanma olasılığı nedeniyle veri analizi güvenilirliğini sağlamak için ders materyallerinin birden fazla kodlayıcı tarafından kodlanması yöntemini tercih etmiştir. Bu çalışmada da aynı yöntem kullanılmıştır. Ders materyalleri analizleri konu alanında uzman en az iki kodlayıcı tarafından ayrı ayrı zamanlarda bireysel olarak gerçekleştirilmiş. Kodlayıcılar matematiksel ispatlar içerikli yüksek lisans düzeyindeki ders kapsamında bu konudaki yurt içi ve yurt dışı literatüre hakim olup muhakeme-ve-ispat analitik çerçevesini çeşitli ders ödevlerinde kullandıkları için analiz sürecine hakimdirler. Bireysel kodlamalar sonrasında kodlayıcılar bir araya gelerek kodlamalarını karşılaştırmış ve kodlamalardaki fikir ayrılıkları ve uyumsuzlukları tartışarak çözümlenmesini sağlamışlardır. İki araştırmacı arasındaki kodlama uyumu % 87 olarak bulunmuş olup, uyumsuzluk ve anlaşmazlık durumları üzerinde fikir birliği sağlanana kadar tartışılmıştır. Kodlama sürecinin ve uyumsuzlukların nasıl giderildiğini temsil etmek için aşağıda bir kodlama örneği sunulmuştur.

ETKİNLİK

Uygulama Basamakları

• Yüzlük tablodan yararlanarak 2'nin, 5'in ve 10'un katlarının oluşturduğu örüntüleri ayrı ayrı yazınız.

• Her örüntüdeki sayıların birler basamağındaki rakamlarını inceleyiniz. Bu rakamların ortak özelliklerini belirleyiniz.

• Doğal sayıların 2, 5 ve 10'a bölünebilmesi ile ilgili birer kural geliştiriniz.

• Geliştirdiğiniz kuralları arkadaşlarınızla paylaşınız. Bu kuralların geçerliliğine birlikte karar veriniz.

Araç ve Gereç

• Yüzlük tablo

Şekil 3. *Birden fazla kategoride kodlanan aktivite temsili*

Şekil 3' deki etkinliği birinci kodlayıcı empirik argüman olarak kodlamış, 2. kodlayıcı ise aynı etkinliği çıkarımda bulunma etkinliği olarak kodlamıştır. Bir araya gelip kodlamaların karşılaştırıldığı toplantıda bu etkinliğin hem empirik argüman hem de çıkarım yapma olarak kodlamasına karar verilmiştir. Etkinliğin içeriği incelendiğinde "örüntü bulma", "kural geliştirme", ve "kuralın geçerliliğine karar verme" anahtar kelimeleri içerdiği görülmüştür. Bu anahtar kelimeler çerçevesinde etkinliğin hem genellemeler yapma hem de matematiksel çıkarımlara kanıt sağlama ana başlıklarının her ikisini de barındırdığı açıktır. Ancak etkinliğin öncelikli amacı ve bulunduğu ünite göz önüne alındığında, etkinlik öğrencilerin 2, 5 ve 10 ile bölünebilme kurallarını bulmasını ve bu kuralların geçerliliğini yüzlük tablo kullanarak, başka bir deyişle sınırlı bir kümede, doğrulamasını amaçlamaktadır. Bu sebeplerden dolayı 6. sınıf ders kitabında yer alan yukarıdaki etkinliğin iki kategoride —"çıkarım yapma" ve "empirik argüman"—kodlanmasının uygun olduğu yargısına varılmıştır.

BULGULAR

Bu bölümde önce kitap incelemelerinin genel sonuçları sunulacak, daha sonra kitaplarda bulunan muhakeme-ve-ispat etkinlikleri sonuçları ders kitaplarından alıntılanmış temsilleri ile birlikte paylaşılacaktır.

Kitap İnceleme Genel Sonuçları

Kitap inceleme genel sonuçlarına göre 5, 6, 7 ve 8. sınıf ders kitaplarının toplam 2831 matematiksel aktiviteden (örnek, etkinlik, problem çözme, kurma, değerlendirme ve uygulama soruları) oluştuğu bulunmuştur. Ders kitaplarında yer alan bu 2831 matematiksel aktiviteden 1123 (%40) aktivitenin örneklerden, 169 (%6) aktivitenin ise etkinliklerden oluştuğu görülmüştür. 1425 (%50) matematiksel aktivitenin uygulama soruları olarak adlandırılırken, 89 (%3) aktivitenin problem çözme ve 25 (%0,8) aktivitenin ise problem kurma aktivitesi olarak adlandırıldığı görülmüştür. Tablo 2'de inceleme sonuçları daha detaylı olarak gösterilmiştir.

Tablo 2. *Ders materyalleri genel inceleme sonuçları*

	Örnek Sayısı	Etkinlik Sayısı	Alıştırma/Uygulama		Problem Çözme		Problem Kurma	
			Uygulama	Ünite Değerlendirme	Çözümlü	Çözümsüz	Çözümlü	Çözümsüz
5. Sınıf	115	28	114	77	3	10	2	3
6. Sınıf	310	72	241	154	21	43	8	10
7. Sınıf	404	22	321	105	8	-	-	2
8. Sınıf	294	47	239	174	4	-	-	-
Toplam	1123	169	915	510	36	53	10	15

Ders kitapları genel inceleme sonuçları, ders kitaplarında ağırlıklı olarak örnek ve alıştırma/uygulama aktivitelerine yer verildiğini göstermektedir. Problem çözme ve problem kurma aktivitelerinin ise sayıları diğer aktivitelere oranla tüm sınıf seviyelerinde en az sayıda olduğu bulunmuştur. Özellikle 7. ve 8. sınıf düzeylerinde problem çözme ve kurma aktivitelerine ya hiç yer verilmediği ya da çok az sayıda yer verildiği görülmüştür.

Muhakeme-ve-İspat Etkinlikleri İnceleme Sonuçları

Tablo 3'de ders kitaplarının muhakeme-ve-ispat analitik çerçevesi kullanılarak yapılan inceleme sonuçlarına yer verilmiştir. Yapılan incelemelerde ders kitaplarında yer alan 2831 matematiksel aktivitenin sadece 177 (yaklaşık %6) 'sinin muhakeme-ve-ispat etkinliği olma özelliği taşıdığı görülmüştür. Bu 177 aktiviteden 78 (%44) aktivite empirik argüman olarak kodlanmıştır. Empirik argümanlar dışında sayıca en fazla olan muhakeme-ve-ispat etkinliği örüntü bulma etkinliğidir—46(%26). 33 (%19) matematiksel aktivite çıkarım yapma etkinliği olarak kodlanırken, sadece 17 (%10) aktivitenin gösterim olarak kodlandığı görülmüştür. Rasyonel ve genellenebilir örnek olarak kodlanan matematiksel aktivitelerin sayıca azlığı da göze çarpmıştır.

Tablo 3. *Ders materyalleri muhakeme-ve-ispat etkinlikleri inceleme sonuçları*

	Örüntü Bulma	Çıkarım Yapma	İspat Olan Argüman Yapma		İspat Olmayan Argüman Yapma		Toplam
	Kesin Örüntü		Genellenebilir Örnek	Gösterim	Empirik	Rasyonel	
5.Sınıf	11	8	-	4	10	-	33
6. Sınıf	17	9	-	0	45	1	72
7. Sınıf	16	3	-	4	8	1	32
8. Sınıf	2	13	1	9	15	0	40
Toplam	46	33	1	17	78	2	177

Sınıf seviyesine göre incelendiğinde ise, ders materyallerinde yer alan toplam 177 muhakeme-ve-ispat etkinliğinden 33 (%19) etkinliğin 5. sınıf ders kitabında, 72 (%40) etkinliğin ise 6. sınıf ders kitabında bulunduğu görülmüştür. Aynı şekilde, 32 (%18) muhakeme-ve-ispat etkinliği 7. sınıf ders kitabında yer alırken, 40 (%23) etkinliğin ise 8. sınıf ders materyalinde yer aldığı bulunmuştur. Her sınıf seviyesinde yer alan muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin sayıları karşılaştırıldığında, en fazla muhakeme-ve-ispat etkinliğine yer verilen sınıf seviyesinin 6. sınıf olduğu bulunmuştur. 6. sınıf seviyesinde muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin sayıca diğer sınıf seviyelerinden fazla olmasının bir nedeni, bu sınıf seviyesinde yer alan empirik argüman sayısın diğer sınıf seviyelerine göre fazla oluşudur.

Empirik argüman olarak kodlanan aktivitelerin %58'inin 6 sınıf ders kitabında bulunduğu görülmüştür. Aşağıdaki şekillerde (bknz. Şekil 4 ve Şekil 5), 6. sınıf ders kitabında yer alan bölümlere yer verilmiştir. Bu bölümlerde, bölünebilme kuralları verilen belirli örneklerden tüm sayılara bir genelleme yapılarak sunulmuştur. Örneğin, son rakamı 0, 2, 4, 6, 8 olan sayıların 2 ile kalansız bölünebileceği verilen 40, 12, 24, 26 ve 18 örnekleri üzerinden doğrulanmıştır. Aynı şekilde 5 ile kalansız bölünebilme kuralında da verilen 5, 35, 40 ve 100 örnekleri üzerinden bir genellemeye ulaşılarak sunulduğu görülmüştür. Her iki örnekte de kuralın geçerliliği kullanılan belirli örnekler ile gösterilirken bu kuralların neden doğru olduğu hakkında bilgi içermediği görülmüştür.

2 ile Bölünebilme

Aşağıdaki çarpma işlemlerini inceleyelim:

2 . 20 = 40, 2 . 6 = 12, 2 . 12 = 24, 2 . 13 = 26, 2 . 9 = 18

Yukarıdaki çarpma işlemlerinde elde edilen çarpımlardan her biri, 2'nin katı olup 2'ye bölünebilir.

Elde edilen çarpımların birler basamağında 0, 2, 4, 6 ve 8 rakamlarından biri vardır.

Birler basamağındaki rakamı 0, 2, 4, 6 veya 8 olan doğal sayılar 2'ye bölünebilir. 2'ye bölünebilen her sayı çift doğal sayıdır.

Şekil 4. *Empirik argüman temsili 1*

5 ile Bölünebilme

Aşağıdaki çarpma işlemlerini inceleyelim:

5 . 1 = 5, 5 . 7 = 35, 5 . 8 = 40, 5 . 20 = 100

Yukarıdaki çarpma işlemlerinde elde edilen çarpımlardan her biri 5'in katı olup 5'e bölünebilir.

Elde edilen çarpımların birler basamağında 0 ve 5 rakamlarından biri vardır.

Birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan doğal sayılar 5'e bölünebilir.

Şekil 5. *Empirik argüman temsili 2*

Şekil 6'da yer verilen örnek, Milli Eğitim Bakanlığı tavsiyeli komisyon tarafından hazırlanan kitaptan alıntılanmıştır[2]. Bu kitapta, aynı sınıf seviyesinde yer alan kalansız bölünebilme kurallarının nasıl daha açıklayıcı olabileceği örneklendirilmiştir. 6. sınıf kitabında yer alan 2 ile bölünebilme kuralı her ne kadar belirli bir durum—571—kullanılarak sunulsa da, bu durumun daha genel durumları temsil etmek amacı ile kullanıldığı açıktır. Her hangi bir doğal sayıda birler basamağı dışındaki basamaklardaki sayılar daima 10 ve 10'un katları ile çarpıldığından2 ile kalkansız bölüneceği açıklanmıştır. Böylece, birler basamağında 0, 2, 4, 6 ve 8 bulunan sayıların 2 ile kalansız bölünebileceği açıklığa kavuşturulmuştur.

Birlikte Yapalım – 1

571 sayısının 2 ile kalansız bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

571 sayısının basamak çözümlemesini yapalım.

571 = 5 · 100 + 7 · 10 + 1 · 1

= 5 · 2 · 50 + 7 · 2 · 5 + 1 şeklinde yazılabilir.

Bu durumda 2 sayısı 5 · 100 ve 7 · 10 çarpımlarının çarpanı, aynı zamanda bölenidir.

Dolayısıyla herhangi bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 veya 2'nin katı ise bu sayı 2'ye kalansız bölünebilir.

O halde 571 sayısının 2 ile kalansız bölünüp bölünmediğini işlem yapmadan görmek için birler basamağındaki rakama bakmak yeterlidir. Birler basamağındaki rakam 1 olduğu için 571 sayısı 2 ile kalansız bölünemez.

Şekil 6. *Genellenebilir örnek temsili 1*

Aynı şekilde, 5 ile bölünebilme kuralı da belirli bir durum—2023—üzerinden sunulmasına rağmen önerilen strateji tüm durumlara genellenebilir olma özelliğindedir (bknz. Şekil 7). Şekil4 ve 5'te kullanılan örnekler ve Şekil6 ve 7'de kullanılan örneklerin kullanım amacındaki farklılık

[2]MEB(2016). *Ortaokul matematik 6. sınıf.* MEB: Ankara

aşikârdır. Bu nedenle Şekil 4 ve 5'te sunulan durumlar empirik argüman temsili olarak kullanılırken, Şekil 6 ve 7'de kullanılan örnekler genellenebilir örnek temsili olarak kullanılmıştır.

Birlikte Yapalım – 7

2023 sayısının 5 ile kalansız bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

Çözüm

2023 sayısının basamak çözümlemesini yapalım.

$2023 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

$= 2 \cdot 5 \cdot 200 + 0 \cdot 5 \cdot 20 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 3$ şeklinde yazılabilir.

Bu durumda 5 sayısı $2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10$ çarpımlarının her birinin çarpanı, aynı zamanda bölenidir. Bu durumda birler basamağındaki rakam 0 veya 5 olan doğal sayılar 5'e kalansız bölünebilir.

O halde 2023 sayısının 5 ile kalansız bölünüp bölünmediğini işlem yapmadan görmek için birler basamağındaki rakama bakmak yeterlidir. Birler basamağındaki rakam 3 olduğu için 2023 sayısı 5 ile kalansız bölünemez.

Şekil 7. *Genellenebilir örnek temsili 2*

Ders kitabı inceleme sonuçlarına göre, ders materyallerinde empirik argümanlardan sonra sayıca en fazla örüntü bulma aktivitelerine yer verildiği görülmüştür. Ders kitaplarında toplamda 46 örüntü bulma aktivitesinin yer aldığı, bunun da toplam muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin yaklaşık %26'sını oluşturduğu bulunmuştur. Örüntü bulma olarak kodlanan aktivitelerin 5., 6. ve 7. sınıf ders kitaplarında daha fazla sayıda yer aldığı görülürken, sayının 8. sınıf ders kitabında azaldığı dikkat çekmiştir. Ders materyallerinde yer alan örüntülerin tamamı kesin örüntü olarak sınıflandırılmıştır. Şekil 8'de yer alan 6. sınıf ders kitabından alıntılanmış örüntüde, her bir adımda beş kürdandan oluşan beşgen şekillerinin eklendiği örüntünün ilk dört adımı verilmiştir. Öğrencilerden devam eden örüntünün 8. adımında kullanılan kürdan sayısını bulması istenmiştir. Öğrencilerin bu örüntüde genel ifadeler kullanarak modellemeye gerek duymadan 8. adımda oluşan şekli çizerek cevaba ulaşmaları mümkündür. Kitap inceleme sonuçlarına göre, ders materyallerinde yer alan örüntü bulma aktivitelerinin %39'unun—18 örüntü bulma aktivitesi—öğrencilerden bir genelleme yapması beklenmeden belirli adımlardaki (genellikle örüntünün devam ettirilerek çizilebileceği küçük sayıdaki adımlar) şekli bulmaya yönelik aktivitelerinden oluştuğu görülmüştür.

3. Kürdanlarla oluşturulmuş aşağıdaki örüntüyü inceleyelim. Örüntünün kuralını ve 8. adımda kaç kürdan kullanılacağını bulalım:

Şekil 8. *Kesin örüntü ders kitaplarındaki temsili*

Her ne kadar ders materyallerinde yer alan örüntü bulma aktivitelerinin %39'u genelleme yapmaya gerek duymadan bulunabilecek küçük adımlardaki şekilleri sormaya yönelik olsa da, öğrencilerden genelleme yapması ve cebirsel ifadeleri kullanarak örüntü kuralının ifade edilmesini bekleyen aktivitelerde mevcuttur—28 (%61) örüntü bulma aktivitesi. Aşağıdaki şekilde 6. sınıf ders kitabından alıntılanmış bir etkinliğe yer verilmiştir. Bu etkinlikte öğrencilerden sayı ile kullanılan kibrit çöpü arasındaki ilişkiyi genellemesi beklenmektedir. Ayrıca genel kuralı verilen bir örüntünün belirli adımlardaki sayılarını bulması beklenmektedir.

ETKİNLİK

Araç ve Gereç
• Kibrit çöpü

Uygulama Basamakları

• 3, 6, 9, 12 ... örüntüsünü kibrit çöpleri ile modelleyiniz.
• Aşağıdaki gibi bir tablo düzenleyip boş yerleri tamamlayınız.

Tablo: Sayı ile Kullanılan Kibrit Çöpleri Arasındaki İlişkiler

Adım sayısı	Sayı için kullanılan kibrit çöpü sayısı	Sayı ile kullanılan kibrit çöpü arasındaki sayısal ilişki
1	3	3 . 1
2	...	3 . 2
3	...	...
4	...	...
⋮	⋮	⋮
n	...	...

• Tablodan yararlanarak sayı ile toplam kibrit çöpü arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
• Örüntünün 20. adımında kaç tane kibrit çöpü kullanılacağını bulunuz.
• Kuralı 6n – 2 olan sayı örüntüsünün 2, 5 ve 8. adımlarındaki sayıları bulunuz.

Şekil 9. *Örüntü bulma etkinliği ders kitaplarındaki temsili*

Harel ve Sowder (1998), çıkarımı "bir kişi tarafından yapılan doğruluğu hakkında şüpheler olan bir gözlem" olarak tanımlar (s. 241). Ders kitapları inceleme sonucuna göre ders materyallerinde toplamda 33 çıkarım yapma aktivitesine rastlanmıştır. Çıkarım yapma olarak kodlanan aktivitelerin sayısı karşılaştırıldığında, en fazla çıkarım yapma etkinliğinin 8. sınıf ders materyalinde yer aldığı görülmüştür. Aşağıdaki şekilde 8. sınıf ders materyalinden alıntılanmış çıkarım yapma etkinliği temsiline yer verilmiştir. Bu etkinlikte öğrencilerden üçgen eşitsizliği kuralını, sunulan belirli durumların—15cm, 20cm, 30cm ve 10cm, 20cm, 30cm kenar uzunluklarına sahip üçgenler—özelliklerini gözlemleyerek fark etmeleri beklenmektedir. Etkinlikte sunulan belirli durumların gözlemlenerek bir genelleme yapılması amaçlandığı için etkinlik çıkarım yapma etkinliği olarak kodlanmıştır.

ETKİNLİK

Uygulama Basamakları

Araç ve Gereç
- Beyaz ve siyah renkli ipler
- Cetvel
- Makas

- Beyaz renkli ipten uzunlukları 15 cm, 20 cm ve 30 cm olan parçalar kesiniz (Makası dikkatli kullanınız.).
- Siyah renkli ipten uzunlukları 10 cm, 20 cm ve 30 cm olan parçalar kesiniz.
- Beyaz renkli ipten kestiğiniz parçaları gergin tutarak bir üçgen oluşturmaya çalışınız.
- Siyah renkli ipten kestiğiniz parçaları gergin tutarak bir üçgen oluşturmaya çalışınız.
- Hangi renkteki iplerle bir üçgen oluşturabildiğinizi söyleyiniz.
- Beyaz ve siyah renkteki ipleri uzunluklarına göre sıralayınız.
- Aşağıdaki işlemleri beyaz ve siyah renkli ipler için ayrı ayrı yapınız.

– Sıraladığınız iplerden birinci ile ikincinin uzunluklarını toplayınız. Bulduğunuz toplam ile üçüncü ipin uzunluğunu karşılaştırınız.

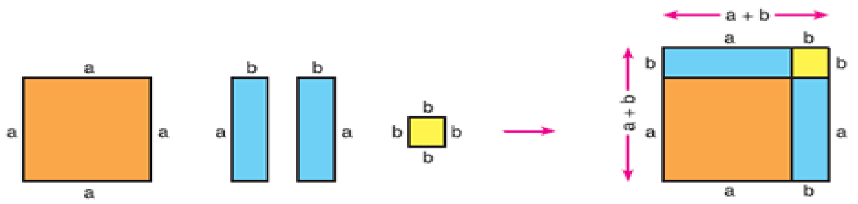
– Sıraladığınız iplerden ikinci ile üçüncünün uzunluklarını toplayınız. Bulduğunuz toplam ile birinci ipin uzunluğunu karşılaştırınız.

– Sıraladığınız iplerden birinci ile üçüncünün uzunluklarını toplayınız. Bulduğunuz toplam ile ikinci ipin uzunluğunu karşılaştırınız.

- Yaptığınız karşılaştırmalardan yararlanarak üçgen oluşturan iplerin uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

Şekil 10. *Çıkarım yapma temsili*

Ders kitabı inceleme sonuçlarına göre muhakeme-ve-ispat etkinlikleri arasında ispat olan argüman sunma etkinliğinin sayıca en az olduğu görülmüştür. Toplamda 177 muhakeme-ve-ispat etkinliğinden 18 aktivitenin ispat ölçütlerine uygun aktiviteler olduğu görülmüştür. Weber (2004) geometrik gösterim veya diyagram kullanımının da ispat ile yan yana olan genel durumlar olduğunu belirtir. Stylianides (2008) gösterimlerin genellenebilir örneklerin aksine belirli bir örneğin temsil edebilirliğine bağlı olmayan durumlar olduğunu belirtir. Waring (2000) de ispat olarak diyagram kullanımının önemini vurgulamaktadır. Şekil 11'deki örnekte 8. sınıf ders kitabında yer alan $(a+b)^2= a^2+2ab+ b^2$ olduğunu gösteren geometrik gösterim temelli bir ispat mevcuttur.



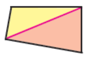
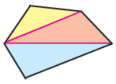
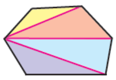
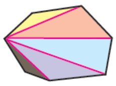
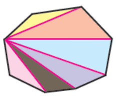
Şekil 11. *Gösterim temsili 1*

İspat yapma etkinliğine bir diğer örnek 7. sınıf ders kitabından verilebilir (bknz. Şekil 12). Aşağıdaki etkinlikte çokgenlerin iç açıları toplamının (n-2).180° formülü ile bulunduğu öğrencilere etkinliğin başında hazır olarak sunulmuştur. Bu yönü ile etkinliğin öğrencilerden her hangi bir genelleme yapmasını—örüntü bulma ve/veya çıkarım yapma—beklemediği açıktır. Her ne kadar öğrencilerden bir genelleme yapması beklenmese de, öğrencilerin çokgenlerin iç açıları toplamının çokgenlerin iç bölgesinde oluşan üçgen sayısı ile olan ilişkisini fark etmesi amaçlanmaktadır. Bu sebeple etkinlik ispat yapma etkinliği olarak kodlanmıştır. Stylianides (2010) bu tür etkinliklerin sınırlılıklarının formülün başta verilmesi ve öğrencilerden zaten bilinen bir genellemenin ispatının istenmesinde yattığını savunmaktadır. Stylianides (2010) bu tür etkinliklerin "n kenarlı dışbükey çokgenlerin iç açıları toplamları hakkında ne söyleyebilir siniz? Cevabınızı ispatlayınız" şeklinde düzenlenirse daha etkinli olacağını savunmaktadır (s. 43).

ETKİNLİK

Araç ve Gereçler: geometri tahtası, renkli ip, lastik, boya kalemleri, noktalı kâğıt, cetvel.

- Geometri tahtası üzerinde lastiklerle dörtgen, beşgen, altıgen, yedigen ve sekizgen oluşturunuz.
- Bu çokgenlerin bir köşesini diğer köşeleriyle renkli ipinizi kullanarak birleştirip üçgenler oluşturunuz.
- Bu çokgenleri ve köşegenleri noktalı kâğıdınıza modelleyiniz.
- Çokgenlerin iç bölgelerinde oluşan üçgenleri farklı renklerde boyayıp aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Çokgenler	Kenar sayısı (n)	Oluşan üçgen sayısı (n – 2)	Çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı ((n – 2) · 180°)
	4	2	(4 – 2) · 180° = 2 · 180° = 360°
			
			
			
			

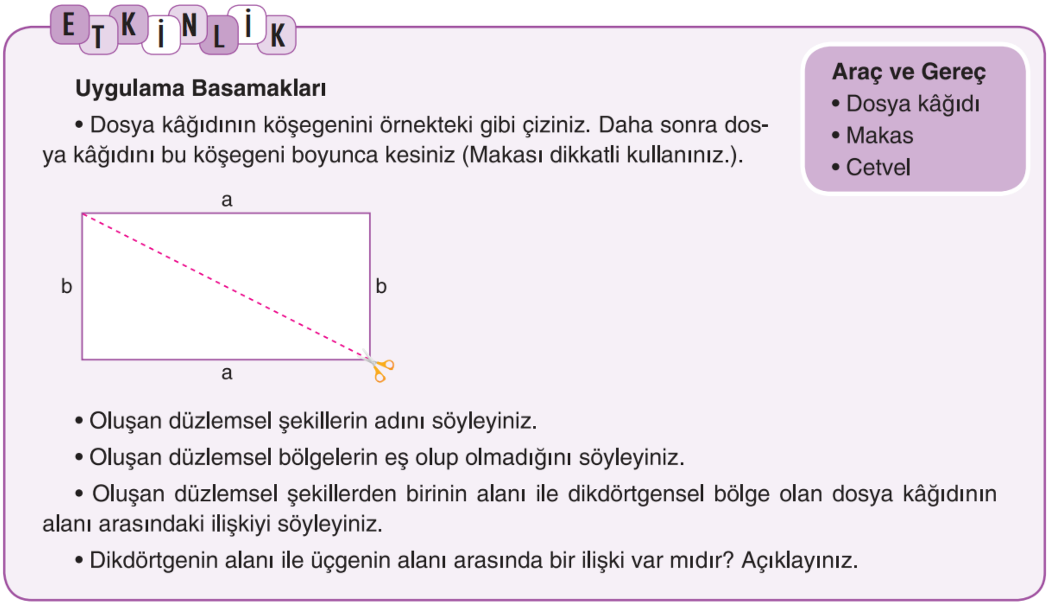
Kenar sayısı n olan bir çokgende, bir köşeden, köşegenler çizilerek **(n – 2)** tane üçgen elde edilir.

n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden **(n – 3)** tane köşegen çizilebilir.

n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, **(n – 2) · 180°** formülü ile hesaplanır.

Şekil 12. *Gösterim temsili 2*

Empirik olmayan ve ispat olma şartlarını yerine getirmede yetersiz kalan argümanları tanımlamak amacı ile Stylianides (2008) yeni bir kavram ortaya sürmüştür. Stylianides (2008)'e göre bir argüman bazı anahtar kabul edilmiş doğrulardan bahsetmiyor ve ya kabul edilmiş (önceden ispatlanmış) doğrulardan oluşan kümeye ait olmayan ifadelere yer veriyor ise rasyonel argüman olarak kabul edilir. Ders kitabı inceleme sonuçlarına göre ispat olarak kabul edilmeyen argümanlardan empirik argümanlar sayıca fazla iken, rasyonel olarak kodlanan argümanların toplamda sadece 2 kez yer aldığı görülmüştür. Aşağıdaki şekilde bu durumun bir temsili sunulmuştur.


ETKİNLİK

Uygulama Basamakları

• Dosya kâğıdının köşegenini örnekteki gibi çiziniz. Daha sonra dosya kâğıdını bu köşegeni boyunca kesiniz (Makası dikkatli kullanınız.).

• Oluşan düzlemsel şekillerin adını söyleyiniz.

• Oluşan düzlemsel bölgelerin eş olup olmadığını söyleyiniz.

• Oluşan düzlemsel şekillerden birinin alanı ile dikdörtgensel bölge olan dosya kâğıdının alanı arasındaki ilişkiyi söyleyiniz.

• Dikdörtgenin alanı ile üçgenin alanı arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

Araç ve Gereç

• Dosya kâğıdı
• Makas
• Cetvel

Şekil 13. *Rasyonel argüman temsili*

6.sınıf ders kitabından alıntılanmış etkinlikte, öğrencilerden bir dikdörtgeni köşegenleri yardımıyla iki eş dik üçgene ayırmaları ve bu üçgenlerden birinin alanı ile dikdörtgenin alanı arasındaki ilişkiyi fark etmeleri beklenmektedir. Ancak öğrencilerden bu üçgenlerin neden eş üçgenler olduğunu açıklamaları beklenmemektedir. Ayrıca yapılan bu etkinlikte sadece dik üçgenin alanı dikdörtgenin alanı ile ilişkilendirilmiş, diğer üçgen türlerinin alanlarının dikdörtgenin alanı ile olan ilişkisine değinilmemiştir. Oysaki etkinliğin sonunda dikdörtgenin alanı ile üçgenin alanı arasındaki ilişkinin açıklanması beklenmektedir. Bu sebeplerden dolayı yukarıdaki etkinlik rasyonel olarak kodlanmıştır.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Ders kitapları öğrenci öğrenmelerini etkileyen en önemli faktörler arasında sayılır (Cai, Wang, Moyer, Wang, ve Nie, 2011; Schmidt vd., 2002; Stein, Smith, ve Remillard, 2007). Araştırmacılar eğitim reformlarının altını çizdiği sınıf uygulamalarına ve öğrenci öğrenmelerine ulaşabilmenin bir yolunun da ders sırasında kullanılan ders materyallerinin değiştirilmesinde yattığını belirtirler (Caive ve Howson, 2013; Howson, Keitel, ve Kilpatrick, 1981; Senk ve Thompson, 2003). Hatta, Ball ve Cohen (1996) ders kitaplarını değişim ajanı olarak isimlendirerek, ders materyallerinin değişimdeki önemini vurgularlar. Bu çalışmada öğrenci öğrenmelerini etkileyen en önemli faktörler arasında sayılan ders kitaplarının muhakeme-ve-ispat etkinliklerine yer verme sıklıklarının araştırılması amaçlanmıştır.

Ders kitapları genel incelemesi sonucuna göre, ders kitaplarında yer alan 2831 matematiksel aktivitenin sadece 25 (%0,8)'inin problem kurma aktivitesinden oluştuğu görülmüştür. Smith ve Stein (1998) matematiksel etkinliklerin bilişsel seviyelerini sınıflandırdığı taksonomide, problem kurma etkinliklerini üst düzey etkinlikler arasında sayarlar. Ders kitapları genel inceleme sonuçlarına göre üst düzey etkinlik sınıfında yer alan problem kurma etkinliklerinin sayıca azlığı dikkat çekmektedir. Ayrıca, problem kurma etkinliklerine 8. sınıf ders materyalinde hiç yer verilmemesi dikkat çeken bir diğer bulgudur.

Muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin sayısını belirlemek amacıyla yapılan ön incelemede kitaplarda yer alan anahtar kelimeler belirlenmiş ve daha sonra bu belirlenen anahtar kelimelere sahip aktiviteler detaylı olarak muhakeme-ve-ispat analitik çerçevesi etrafında analiz edilmiştir. Anahtar kelimeleri belirlemek için yapılan ön incelemelerde, kitaplarda "ispat, ispatlamak, çıkarım, aksine örnek, çürütmek" gibi ispat ile ilişkili kelimelere hiç rastlanmamıştır. Tall (1989) ispat kavramının birden fazla anlamı olduğunu belirtmiştir: bir jüriye göre makul bir şüphenin ötesi, bir istatistikçiye göre kesin bir olasılık ile ortaya çıkma, bir bilim insanına göre ise deneysel araştırmanın bir sonucudur. İspat kavramının farklı alanlardaki farklı anlamlarına rağmen, matematikte belirgin bir rolü vardır (Hoyles, 1997). Matematik deneyle doğrulanabilen ancak deneye dayalı doğrulamanın yeterli olmadığı formel ispata dayanan bir bilimdir (Hoyles, 1997). Ders materyallerinde ispat ve ispat ile ilişikli kelimelerinin (örüntü hariç) kullanımından kaçınma, öğrencileri bu kavramı günlük dilde kullanılan (veya başka alanlarındaki) anlamları ile aynı olduğu kanısına iteceği ve matematiğin özünü oluşturan ispat kavramının anlaşılmasını engelleyeceği düşünülmektedir.

Ders materyalleri incelendiğinde ise toplamda 2831 matematiksel aktiviteden sadece 177 aktivitenin muhakeme-ve-ispat etkinliği olma özelliği taşıdığı görülmüştür. Bu 177 muhakeme-ve-ispat etkinliklerinden büyük çoğunluğu—78 (%44)—ise empirik argüman kategorisindeki ispat olmayan argümanlardan oluştuğu tespit edilmiştir. Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin matematik sınıflarında verilen bir kaç örneğin bir ifadenin doğruluğunu kanıtlamak için yeterli olacağına inandırılmasının bu öğrencilerde daha sonra çeşitli kavram yanılgılarına sebep olabileceğini belirtirler. Bu sonuçlar ışığında, öğrencilerin ispat yaparken zorlandıklarını kanıtlayan çalışmaların (Chazan, 1993; Moore, 1994; Knuth, Choppin, ve Bieda, 2009) bulguları sürpriz oluşturmadığı düşünülmektedir.

Ders materyalleri inceleme sonuçlarına göre kitaplarda sıkça yer alan bir diğer muhakeme-ve-ispat etkinliğinin matematiksel genellemeler yapma kategorisinde yer aldığı görülmüştür. 177 muhakeme-ve-ispat etkinliğinden 79 (% 45) etkinlik – 46 örüntü bulma ve 33 çıkarım yapma—matematiksel genellemeler yapma kategorisinde kodlanmıştır. Milli Eğitim Bakanlığı Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı akıl yürütme becerisinin kazandırılması için "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma" ve "bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama" becerilerinin önemine vurgu yapmaktadır (MEB, 2013, s. vi). Ortaokul programında matematiksel genellemeler yapmanın öneminin vurgulanması ve ders kitaplarında muhakeme-ve-ispat etkinlikleri arasında matematiksel genellemeler yapma kategorisindeki etkinliklerin sayıca fazla olmasının uyumlu olduğu görülmüştür.

Ortaokul programında matematiksel genellemeler yapmanın öneminin vurgulanmasının yanı sıra, "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma" becerilerinin de önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2013, s. vi). İspatı, insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olarak gören Altıparmak ve Öziş (2005), bu yeteneğin okul öncesi dönemden itibaren gelişim gösterdiğini ve uygun stratejilerle daha da ileri taşınabileceğini belirtmişlerdir. Yapılan çalışmalar da öğrencilerin ilköğretimin erken kademelerinden itibaren muhakeme-ve-ispat yeteneklerini kullanabildiklerini kanıtlamaktadır (Maher ve Martino, 1996; Reid, 2002; Stylianides, 2007b; Zack, 1997). Örneğin, Maher ve Martino beş yıllık çalışmalarında 1. sınıftan 5. sınıfa kadar 6 öğrencinin ispat yapabilme yeteneklerindeki gelişimi gözlemlemiş ve bu öğrencilerin ispat yapabildikleri sonucuna varmışlardır. Benzer olarak, Stylianides (2007b) 3.sınıf öğrencilerinin muhakeme yeteneklerini incelemiş ve bu öğrencilerin ispat kabul edilen argümanlar oluşturabildiklerini kanıtlamıştır. Her ne kadar literatür ilköğretim öğrencilerinin ispat yapabilme yeteneklerini kanıtlasa da, bu yeteneğin ortaya çıkması ve gelişmesi öğretmenlerin öğrencilere bu yeteneklerini geliştirici fırsatlar yaratmasında yatmaktadır (Bieda, vd., 2014). Öğrencilerin ispat yeteneklerinin gelişmesi öğretmenlerin çabasının yanı sıra, ders materyallerinin de ispat etkinliklerine yer vermesi ile mümkün olacağı aşikârdır. Oysaki bu çalışmanın bulgularına göre 177 muhakeme-ve-ispat etkinliklerinden sadece 18 (%10)' inin ispat olan argüman kategorisinde yer aldığı görülmüştür.

İspatlar, sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına ve matematiksel anlayışlarının gelişimine yardımcı olur (Hanna, 1990; Knuth,2002). İmamoğlu (2010) ispatlar sayesinde öğrencilerin matematikçilerin yaptıkları şeylerin ne anlama geldiğini öğrendiklerini savunur. Güncel reformların ispatın matematik sınıflarındaki önemine vurgu yapması, hem öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine öğrenmesindeki ispatın rolü, hem de öğrencilerin bir disiplin olarak matematik alanını daha iyi tanımalarına ispat kavramının katkısı ile yakından ilişkilidir. Ancak bu çalışmanın bulgularına göre, ortaokul ders materyallerinde yer alan 2831 matematiksel aktiviteden sadece 18 (yaklaşık % 0,6) aktivite ispat olan argüman kategorisinde yer almaktadır. İspat etkinliklerin ders materyallerindeki sayıca azlığı ispat kavramının hem matematiksel kavramların derinlemesine öğrenilmesindeki rolü hem de matematik disiplininin anlaşılmasındaki öneminin fark edilemediğini gösterir niteliktedir.

Miyazaki, Fujita ve Jones (2017) Japonya'da öğrencilerin dedüktif muhakeme ile ortaokul 8.sınıfta tanıştıklarını belirtmişlerdir. Japonya'da özellikle geometri dersinde eş üçgen özelliklerini kullanarak çeşitli matematiksel ifadelerin formel olarak ispatlanması 8. sınıf kazanımları arasında yer alır (Miyazaki, Fujita ve Jones, 2017). Türkiye'de ise 8. sınıf kazanımları incelendiğinde "KKK, AKA gibi üçgenlerde eşlik ve benzerlik kuralları özel olarak verilmez" (MEB, 2017, s.79) ifadesi yer alır. Her ne kadar, 8. sınıf düzeyinde ispat olan argüman sayısı diğer sınıflara göre sayıca fazla olsa da, bu sayının yetersiz olduğu aşikârdır. Oysaki güncel eğitim reformları "matematiksel olarak yeterli düzeye erişen öğrenci, kabul edilen kavram, tanım ve önceden belirlenmiş (doğruluğu ispatlanmış ve ya kabullenilmiş) sonuçları kullanarak bir argüman oluşturabilendir (CCSSI, 2010, s. 6)" diyerek, matematiksel yeterliliği muhakeme yeteneği ile ilişkilendirir. Güncel eğitim reformlarının önerileri ışığında matematiksel muhakeme-ve-ispat kavramlarının öğrencilerin matematik eğitimlerinin her seviyesinde yer alması önerilirken, bu çalışma ve ders kitaplarını muhakeme-ve-ispat etkinlikleri çerçevesinde inceleyen diğer çalışmalar bu önerilerin ders materyalleri hazırlanırken çok dikkate alınmadığını kanıtlar niteliktedir.

KAYNAKÇA

Altıparmak, K. , & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemeni gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi, 6*(1), 25–37

Aydın, E. (2016). *Ortaokul 8. sınıf matematik ders kitabı* (Sevgi Yayınları). Koza Yayın Dağıtım A.Ş: Ankara.

Aydın, E., & Gündoğdu, L. (2016). *Ortaokul matematik 6. sınıf ders kitabı* (Sevgi Yayınları). Ankara: Koza Yayın Dağıtım A. Ş.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp.216-238). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6–8, 14.

Bieda, K.N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities*. Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382.

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J, & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research, 64,* 71-80.

Cai, J., & Howson, A. G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & K. S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research* (pp. 949–978). Springer.

Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., Wang, C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project. *International Journal of Educational Research, 50*(2), 117–136.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common Core State Standards for mathematics. Retrieved from http://corestandards.org/asserts/ CCSSI_Math%20Standards.pdf

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375–402.

Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L., & Soylu, Y.(2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Baskent University Journal of Education, 1*(1), 55-63.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubiensky (Eds*.), Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 7-16.

Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Keskin, C. (2016). *Ortaokul matematik 7. sınıf ders kitabi* (Ada Yayınları). Ankara: Ada Matbaacılık.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & U.S. National Research Council Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academies Press.

Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher, 95*(7), 486-490.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*, 206–211.

Komatsu, K. (2013). Principles of task design to foster proofs and refutations in mathematical learning: Proof problem with. In Margolinas, C. (Ed.).*Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* : Oxford.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge University Press.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 194–214.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-89.

MEB (2017). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar.* Ankara: MEB.

MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı(5,6, 7 ve 8. sınıflar).* Ankara: MEB.

MEB (2016). *Ortaokul matematik 6.sınıf.* Ankara: MEB Yayınları.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics Education, 94,* 223-239.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*,249-266.

National Council for Teachers of Mathematics [NCTM].(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom*? Educational Studies in Mathematics, 64*, 69–84.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ, Princeton University Press.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 5-29.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. In Olivier, A. and Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 65-72). Stellenbosch, S. Africa, University of Stellenbosch.

Senk, S. L., & Thompson, D. R. (2003). *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2002). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Smith, M.S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M.K., Smith, M.S., & Remillard, J. (2007). How curriculum influences student learning. In Lester, F.K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Greenwich, CT: Information Age Publishing,

Stylianides, G . (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching, 129*, 39-44.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning and proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 258–288.

Stylianides, G. (2008). Analytic framework of reasoning-and-proving, *For the Learning of Mathematics, 28*, 9-16.

Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools*. Leicester, UK: The Mathematical Association.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course*. Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.

Yaman, H., Akkaya, R., & Yeşilyurt, Ü. (2016). *Ortaokul matematik 5. Sınıf ders kitabı* (Özgün Yayınları). Ankara: Özgün A.Ş.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (6. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zack, V. (1997). You have to prove us wrong: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st international Conference of the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4* (pp. 291–298). Lahti: Finland.