Elementary Education Online, 10(3), 812-823, 2011.
İlköğretim Online, 10(3), 812-823, 2011. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

Differences between Arithmetic and Algebra: Importance of Pre-algebra

Yaşar AKKAN*, Adnan BAKİ**, Ünal ÇAKIROĞLU***

ABSTRACT. As it is known; the mathematical concepts are connected like rings of the chain so a rupture in the chain will cause difficulties in teaching mathematics concepts in the future. Especially, this ring is seen between the arithmetic and algebra knowledge in the first and second level of primary schools. Though there is a strong relation between arithmetic and algebra; because of their different natures there are differences in interpreting letters, symbols, mathematical statements, equal concepts and problem solving methods. So pre-algebraic period that is the period transition from arithmetic to algebra development is so important in eliminating obstacles and difficulties which are caused from these differences. For this reason, it is necessary to deal with these differences and the importance of pre-algebraic period. In this study we focused on the differences between arithmetical and algebraic knowledge and the importance of pre-algebraic period.
Keywords: arithmetic knowledge, algebraic knowledge, pre-algebra

SUMMARY

Students' meaningful learning, applying the knowledge in different environment, establishing relations between concepts, relating conceptual and operational knowledge, transforming knowledge representational forms are closely related to learning fields. Especially, relating with arithmetic (numbers) and algebra learning domains is important for the development of high level skill named as associated. As it is known; the mathematical concepts are connected like rings of the chain so a rupture in the chain will cause difficulties in teaching mathematics concepts in the future. Especially, this ring is seen between the arithmetic and algebra knowledge in the first and second level of primary schools. This emphasis on the relationship between arithmetic and algebra in NCTM standards are expressed as follows. "*The middle school mathematics curriculum is, in many ways, a bridge between the concrete elementary school curriculum and the more formal mathematics curriculum of the high school. One critical transition is that between arithmetic to algebra. It is thus essential that in grades 5-8, students explore algebraic concepts in an informal way to build a foundation for the subsequent formal study of algebra…*"

Though there is a strong relation between arithmetic and algebra; there are differences in interpreting letters, symbols, mathematical statements, equal concepts and problem solving methods because of their different natures. In fact, researchers have pointed to that students failed to connect differences between these two kinds of knowledge and have claimed that this is caused by cognative gap in teaching. These differences may draw students into difficulties and misconceptions in transtion from arithmetic to algebra, in algebra teaching and in development of algebraic concepts. So pre-algebraic period that is the period transition from arithmetic to algebra development is so important in eliminating obstacles and difficulties which are caused from these differences. For this reason, it is necessary to deal with these differences and the importance of pre-algebraic period. Pre-algebra is the process of giving opportunities for explanation about algebraic concepts and procedures informally by providing the use of students' present arithmetic and geometric knowledge.

As a result, the transition from arithmetic to algebra providing the connection between arithmetic to algebra knowledge is significant for learning algebra which has an important part in very stage of mathematics and daily life by the individual at a demanded level. For conducting this transition the best way, it is needed for the curriculums which have been prepared as extremely carefully. In this study we focused on the differences between arithmetical and algebraic knowledge and the importance of pre-algebraic period. Also we addressed some educational implementations through the theoretical basis of pre-algebraic period.

* Assoc. Prof. Dr. Yaşar AKKAN, Kafkas University, akkanyasar61@hotmail.com
** Prof. Dr. Adnan BAKİ, Karadeniz Technical University, abaki@ktu.edu.tr
*** Assoc. Prof. Dr. Ünal ÇAKIROĞLU, Karadeniz Technical University, cakiroglu@ktu.edu.tr

Aritmetik ile Cebir Arasındaki Farklılıklar: Cebir Öncesinin Önemi

Yaşar AKKAN[*] Adnan BAKİ[**], Ünal ÇAKIROĞLU[***]

ÖZ. Matematiksel kavramlar bir zincirin halkası gibi birbirleriyle bağlantılı olduğundan, bu halkada olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara yol açabileceği bilinmektedir. Özellikle ilköğretimin birinci ve ikinci kademesindeki aritmetik ile cebir bilgisi arasında önemli bir zincir halkası vardır. Aritmetik-cebir arasında kuvvetli bir ilişki olmasına rağmen, aritmetikle cebirin farklı doğalarından dolayı harfleri, sembolleri, matematiksel ifadeleri, eşitlik kavramını, problem çözme yöntemlerini yorumlamada farklılıklar olabilir. İşte bu farklılıklardan kaynaklanan engellerin ve zorlukların giderilmesinde aritmetikten cebire geçiş kuşağı olan "cebir öncesi" kuşağı önemlidir. Bundan dolayı bu farklılıkların ve cebir öncesinin önemine değinilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, aritmetik bilgi ile cebirsel bilgi arasındaki farklılıklar ile "cebir öncesi" kuşağının önemi literatür tabanlı incelenmiş, bu inceleme sonucunda elde edilen sonuçlar araştırmacıların önerileri ile de desteklenerek verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: aritmetik bilgi, cebirsel bilgi, cebir öncesi

GİRİŞ

Öğrencilerin anlamlı öğrenmeleri; bilgiyi farklı ortamlarda uygulayabilmeleri, kavramlar arası ilişkileri kurabilmeleri, kavramsal ve işlemsel bilgiyi ilişkilendirebilmeleri, öğrenme alanları arasında ilişki kurabilmeleri ve bilgiyi çeşitli temsil biçimlerine dönüştürebilmeleriyle yakından ilgilidir. Özellikle öğrencilerin öğrenme alanları- "aritmetik (sayılar)" ile "cebir" öğrenme alanları - arasında ilişki kurabilmeleri üst düzey beceri olan ilişkilendirme becerisi için önemlidir(MEB,2006). Çünkü matematiksel kavramlar birbirleriyle bağlantılı olduğundan, bu bağlantılarda olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara yol açabileceği bilinmektedir (Swadener & Soedjadi, 1988). Bu bağlamda aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiyi ve bu iki alan arasındaki farklılıkları açıklamadan önce aritmetik ve cebir ile ilgili tanımlar hakkında bilgi vermek, bu ikili ilişkiyi ve farklılıkları daha iyi açıklamaya yardımcı olacaktır.

Aritmetik ve Cebir Nedir?

Aritmetikte temel işlem olarak adlandırılan; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme ile ilgili bilgiler, ilkel şekliyle, Eski Mısır ve Mezopotamya'da vardı. Bu bilgiler, uzun zaman aralığı içinde gelişerek, bugünkü kullanılabilir ve sistemleşmiş durumu almıştır. Matematiğin; en geniş ve en iyi bilinen dalı olan aritmetikle ilgili günümüzde yapılan birçok tanım vardır. NCTM (1991) göre aritmetik; sayıları, sayılar arası ilişkileri, sayılarda dört işlemi ve dört işleme dayalı diğer hesaplamaları içerir. Mason (1996) aritmetiği, dört temel işlemi kullanarak bilinenden bilinmeyeni bulmak için yapılan işlemler olarak tanımlamıştır. Bir diğer tanıma göre ise aritmetik, matematik biliminin sayıları, bunların arasındaki bağıntıları ve işlemleri konu alan dalıdır. (URL-1, 2009). Ya da aritmetik, matematiğin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri ve bu işlemlerin özellikleriyle ilgilenen dalıdır (URL-2, 2008). O halde aritmetik; dört temel işlemle bilinmeyeni bilinenden yola çıkarak bulmak, sayılarla sayılar arası ilişkileri ve sayılarla dört işlemi, bu dört işleme dayalı bütün hesaplamaları içerir (Akkan, 2009).

Karşılaştırma, sayma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla matematiğin önemli bir dalı olan cebir doğmuştur(Akgün, 2006). Geleneksel anlamda "genelleşmiş aritmetik" olarak tanımlanan cebir, çoğunlukla aritmetiğin sembolik tarafı üzerinde yoğunlaşmıştır (Tabach & Friedlander, 2003). Kieran (1992) cebirin, genel sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren, polinom ve denklem çözümleri gibi konuları sembolize eden matematiğin bir branşı olduğunu ve sadece harf sembolleriyle nicelikleri ve sayıları temsil eden değil aynı zamanda bu sembollerle hesap da yapabilen bir araç olduğunu belirtmiştir. Sutherland ve

[*] Yrd. Doç. Dr. Yaşar AKKAN, Kafkas Üniversitesi, akkanyasar61@hotmail.com
[**] Prof. Dr. Adnan BAKİ, Karadeniz Teknik Üniversitesi, abaki@ktu.edu.tr
[***] Yrd. Doç. Dr. Ünal ÇAKIROĞLU, Karadeniz Teknik Üniversitesi, cakiroglu@ktu.edu.tr

Rojano'a (1993) göre ise cebir, matematikteki veya başka disiplinlerdeki fikirleri açıklamak için kullanılan bir matematik dilidir. Sfard (1995) cebiri genel hesaplama bilimi olarak tanımlamıştır. Cebir için Usiskin (1997)"*Cebir matematiğin dilidir. Bu dil bilinmeyenler, formüller, örüntüler, yer tutucular ve ilişkiler olmak üzere beş ana bileşenden oluşur* (s.5)" demiştir. Vance (1998) cebiri, genelleştirilmiş aritmetik veya aritmetiği genelleştirmek için gerekli bir dil olarak tanımlamıştır. Harvey vd. (1995)cebiri, sayıların toplamlarını, çarpımlarını ve kuvvetlerini manipüle etme sanatı olarak ifade etmiştir. Bu manipülasyonlar için gereken kurallar tüm sayılar için geçerlidir, bu yüzden manipülasyonlar sayıların yerini tutan harflerle de sürdürülebilir. Ve sayılar için geçerli olan bu kurallar hiçbir şekilde sayı olmayan şeylere de uygulanabilir (Dede, 2003). MacGregor ve Stacey (1999) cebrin sayılar arasındaki genel ilişkileri açıklamak için tasarlanan matematiksel dilin bir parçası olduğunu söylemişlerdir. Witzel vd. (2003) ise cebirin soyut düşünceye giriş kapısı olarak düşünülebileceğini söylemişlerdir. Baki (2008) cebiri, genelleme yapma, problemleri çözmek için işlem ve algoritmaları kullanma, nicelikler arasındaki ilişkileri çalışma ve grup, halka, vektör uzayları gibi soyut yapıları inceleme olarak tanımlamıştır. O halde cebir genel sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren; bilinmeyenleri, formülleri, örüntüleri, yer tutucuları ve ilişkileri içeren matematiğin bir dilidir (Akkan, 2009).

Aritmetik ve cebir ile ilgili tanımlardan, aritmetiğin temelini sayı kavramının oluşturduğu ve cebirin ise kökünü aritmetikten aldığı söylenebilir. Bu nedenle öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarından bu iki alan arasında yoğun ve karşılıklı bir ilişki olduğu da ifade edilebilir.

Artimetik-Cebir İlişkisi

Matematiksel kavramların özellikle ilköğretim öğrencilerine olabildiğince somutlaştırılmış bir şekilde verilmesi, ileri matematiksel kavramların öğrenilmesini ve anlaşılmasını sağlayacaktır. Bu bağlamda aritmetikle cebir farklı doğalara sahip olmalarına karşın aritmetikle cebir arasında kuvvetli bir zincir halkası vardır (Kieran, 1992; Sfard, 1995; Stacey & Macgregor, 1997; Van Amerom, 2002). Genellikle aritmetik düşünmeden cebirsel düşünmeye geçiş, aritmetik ve cebir öğretimi sırasında kendiliğinden gerçekleşmez. Öğrenciler cebirsel fikirleri ile daha önceki yaşantılarında (ilköğretim birinci kademe) geliştirdikleri aritmetik fikirleri ilişkilendirir (Herscovics & Linchevski, 1994). NCTM (1989) standartlarında aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye yönelik bu vurgu: "*İlköğretim ikinci kademe (ortaokul) matematik müfredatı, somut ilköğretim birinci kademe matematik müfredatı ile soyut lise matematik müfredatı arasındaki bir köprüdür. Burada en önemli geçişlerden biri aritmetik ile cebir arasındaki geçiştir. Bu nedenle 5-8 sınıflarda öğrenciler, daha sonra çalışacakları soyut cebir için bir temel oluşturabilecek cebirsel kavramları informal bir yolla alırlar…* (s.102)" şeklinde ifade edilmektedir. Literatürde öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarına dair birçok araştırmaya rastlamak mümkündür (Booth, 1988; Kieran & Chalouh, 1993; Hersovics & Linchevski, 1994; Sfard & Linchevski, 1994; Sfard, 1995; Linchevski, 1995; Stacey & Macgregor, 1997; Linchevski & Livneh, 1999; Williams & Cooper, 2001; McNeil & Alibali, 2005).

Van Amerom (2002) aritmetiğin temelini sayı kavramının oluşturduğunu ve cebirin ise kökünü aritmetikten aldığını ifade etmiştir. Cooper vd. (1997) aritmetikteki çeşitli yapısal ve ilişkisel gösterimleri anlamadaki eksikliklerin, öğrencileri cebirsel düşünmeyi destekleyen yapılandırmalardan uzaklaştırdığını ve onların cebirde zorluk çekmelerine neden olduğunu belirtmişlerdir. Carpenter ve Levi (2000) erken yaşlarda öğrencilerin aritmetiğin önde gelen yapı ve özellikleriyle ilgili genellemeleri doğrulamayı ve yapmayı öğrenmelerinin cebirle ilgili birçok temelin oluşmasına katkı sağlayacağına vurgu yapmışlardır. French (2002) cebirsel süreçlerde doğru bir anlamaya sahip olmada aritmetik işlemlerin önemine vurgu yapmş ve o basit sayılarla yapılan zihinsel hesaplamaların cebirsel ifadeleri basitleştirmeye katkı sağlayacağını belirtmiştir (Örneğin dağılma özeliği: "$7\times17=(7\times10)+(7\times7)= 7\times(10+7) = 7\times17$ *gibi* $7a + 3a = a\ (7+3) = 10a$" ifadesini düşünme). Nathan ve Koellener (2007) ise aritmetiğe ait olan önceki bilgi ve kavramların öğrencilerin daha sonraki hem formal hem de informal gelişimlerinde önemli rol oynadığını iddia etmişlerdir. Linchevski ve Hersovics (1996) parantez kullanımı ve işlem sırasıyla ilgili aritmetik bilginin daha sonraki cebirsel bilgi için önemli olduğuna vurgu yapmışlardır. Benzer şekilde, Bell (1996) göre işlemsel kurallarla ilgili kavram yanılgıları, öğrencileri cebirsel anlamadaki kavramsal engellere sürükleyebilir. Tall (1992) sayı örüntülerindeki aritmetik fikirleri genelleştirerek cebirsel fikirlere girmenin daha kolay olacağını ifade etmiştir. Armstong (1995) örüntüleri keşfetmenin erken yaşlardaki çocukların cebirsel olarak düşünme yeteneklerini geliştireceğine vurgu yaparak, örüntülerden yararlanarak genelleştirme yapmanın cebir için önemine dikkat çekmiştir. NCTM'in Cebir Çalışma Grubu çocukların erken yaşlarda cebirsel kavramları geliştirebileceğini, sayılar ve örüntülerle çalışmanın daha sonraki sınıflarda ihtiyaç duyulan cebirsel düşünme için temel oluşturmaya yardım edebileceğini belirtmiştir (NCTM, 2000). French (2002), Kindt (2000) ve Wijers (1995) birinci dereceden denklemlerin çözümlerinde cebirsel dilde çözümler yapmadan önce, aritmetikte var olan formal öncesi yöntemlerin önemli olduğuna vurgu yapmışlardır. Onlar bu formal öncesi yöntemlerin daha formal yöntemlerin (yani bilinmeyenler için harflerin kullanımını, değişken kavramını) gelişimine katkı sağladığına işaret etmişlerdir. Demana ve Leitzel (1988) ise işlemsel kurallarla ilgili değişme, birleşme, dağılma, ters işlem ve işlem sırası gibi özelliklerin ve sayılar arasındaki örüntülerin tanınmasının ve genelleştirilmesinin cebirsel denklemlerin çözümü için önemli olduğunu vurgulamıştır. Ohlson (1993) göre cebirsel ifadeleri anlama aritmetik işlemler, eşittir işareti ve işlemsel özelliklerle ilgili soyut şemalarla değişkenleri içeren cebirsel gösterimleri birleştirmeyi gerektirir. Örneğin aritmetikte: *5 tane 10 + 2 tane 10 = 7 tane 10 için 50 + 20 = 70; 5 bölü dokuz + 2 bölü dokuz = 7 bölü dokuz için 5/9 + 2/ 9 = 7/9; 0,2 + 0,5 = 0,7; 5cm + 2cm = 7cm, gibi ifadeleri ekleyerek basitleştirme uygulamalarına benzer olarak cebirde de "2x + 5x = 7x*" yazılabilir.

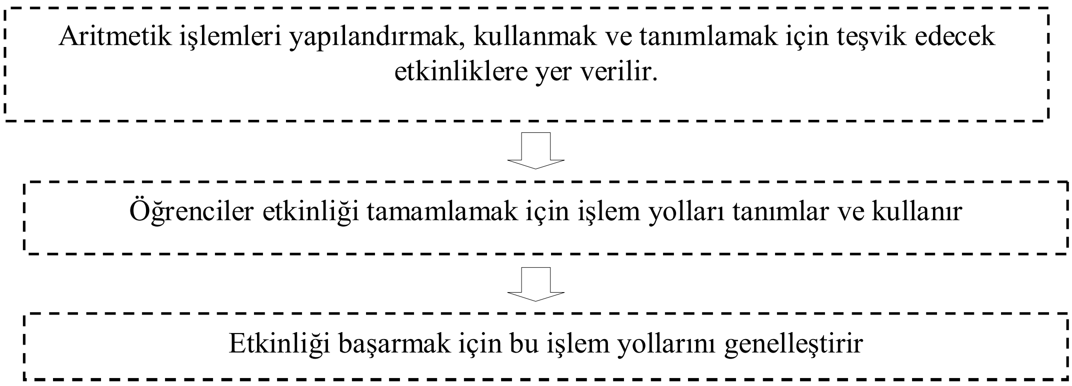
Ayrıca bazı araştırmacılar öğrencilerin cebir ile ilgili düşüncelerinin yapılandırma süreçlerinin aritmetik temelli ve matematiğin tarihsel gelişimi sırasındaki evrelere benzer olduğunu iddia etmiştir. Kieran (1990) öğrencilerin cebir ile ilgili düşüncelerinin gerçekte matematiğin tarihsel gelişimi sırasındaki evrelere benzer olduğunu söylemiştir. Kieran'ın belirttiği evreler ve özellikleri Şekil 1 de verilmiştir.

1.Evre	Semboller kullanılmıyor, tanımlama için sıradan bir dil kullanılıyor
2.Evre	Bilinmeyen nicelikler için kısaltmalar kullanılıyor ve bu bilinmeyenleri belirleme amaçlanıyor
3.Evre	Bilinen ve bilinmeyen nicelikler için harfler kullanılıyor ve sembollerle yapılan işlemler problemlerin çözümünü sağlıyor

Şekil 1. Öğrencilerin cebir ile ilgili düşüncelerine ait evreler (Kieran, 1990)

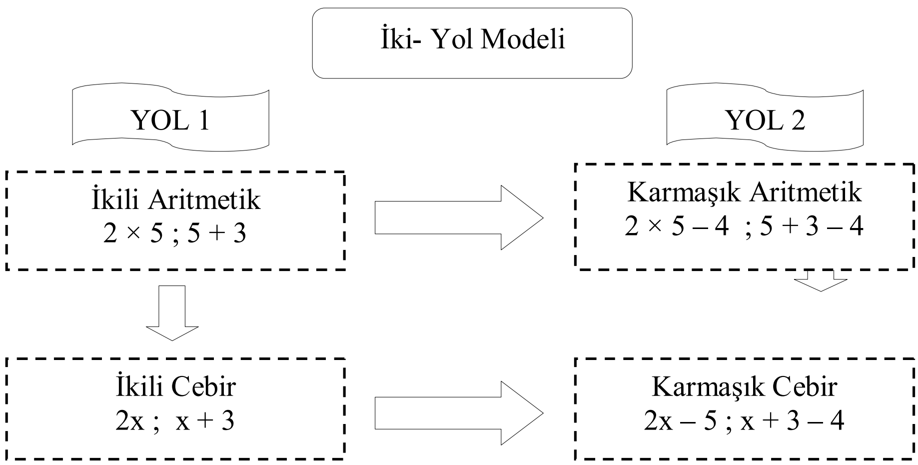
Bu evrelerin ilkinde semboller kullanılmıyor, tanımlama için sıradan bir dil kullanılıyor. İkinci evrede ise bilinmeyen nicelikler için kısaltmalar kullanılıyor ve amaç bu bilinmeyenleri belirlemektir. Üçüncü ve son aşamada ise bilinen ve bilinmeyen nicelikler için harfler kullanılıyor ve sembollerle yapılan işlemler problemlerin çözümünü sağlıyor. Bu nedenle Kieran cebir anlamayı geliştirmek için şu yaklaşımı önermiştir. Öncelikle öğrencilere sayılar arasındaki ilişkileri incelemesi için zaman verilmelidir. Daha sonra öğrencilere bu ilişkileri kendi ifadeleriyle tanımlamaları için fırsat verilmeli ve son olarak bu tanımlamaları semboller ile göstermeleri sağlanmalıdır (Kieran, 1990). Benzer şekilde Sfard ve Linchevski (1994) ve Mellilo(1999) öğrencilerin cebirle ilgili düşüncelerinin gerçekte matematiğin tarihsel gelişimi sırasındaki evrelere benzer olduğunu söylemişlerdir.

Battista (1995), Kieran'a benzer bir yaklaşımı ele alarak cebir'e mantıklı bir bakış açısı kazandırmıştır. O öğretimin sırasını belirlemek için kavramların diziliş sırasını (cluster) kullanmayı önermiştir. Battista'nın önerdiği diziliş sırası Şekil 2 de verilmiştir.



Şekil 2. Cebirle ilgili kavramların diziliş sırası (Battista, 1995)

Ayrıca cebir öğretimiyle ilgili olarak Boulton-Lewis vd. (1997) tarafından iki-yol öğretim modeli önerilmiştir. Aritmetik temelli olan bu model Şekil 3 de sunulmuştur.



Şekil 3. İki-yol öğretim modeli

Bu modele göre cebirsel kavramların öğretimi şu sıralamaya göre yapılmalıdır:
(1) İkili aritmetik,
(2) Karmaşık aritmetik,
(3) İkili cebir,
(4) Karmaşık cebir.

Burada ikili aritmetik "*2 × 5 ve 5 + 3*" gibi işlemleri ele alır. Bu işlemler "*2. x ve x + 3*" gibi işlemlerin anlaşılmasına hazırlık olması için öğretilir. Sonuç olarak, ikili aritmetik, ikili cebirin anlaşılması için gerekli iken, ikili aritmetik işlemleri karmaşık aritmetik işlemlerin anlaşılması için de gereklidir. Ayrıca karmaşık cebir hem ikili cebir işlemlere hem de karmaşık aritmetik işlemlere bağlıdır (Dede, 2003).

Yukarıdaki bilgilerden anlaşılacağı üzere öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarından dolayı bu iki alan arasında yoğun ve karşılıklı bir ilişki vardır. Fakat bu iki alan arasında ilişki olmasına rağmen aritmetik ve cebirin doğalarından kaynaklanan farklılıklar vardır. Bu farklılıklar günlük olaylarda karşılaşabileceğimiz problemlerin çözümlerinden, başka disiplinlerdeki problemlerin çözümlerine kadar her yerde önemli bir konuma sahip olan cebir ile ilgili kavramların gelişiminde ve aritmetikten cebire geçişte öğrencilere zorluklar yaratmakta ve öğrencileri hata ve kavram yanılgılarına sürüklemektedir (Linchevski, 1995; Van Amerom, 2002). Bundan dolayı aritmetikten cebire geçiş kuşağı olan cebir öncesini tanımlamadan önce bu farklılıkların ortaya koyulması gerekmektedir.

Aritmetik ile Cebir Arasındaki Farklılıklar

Aritmetik bilgi ile cebirsel bilgiyi birleştirme ile ilgili öğrenci zorluklarından birisi matematiğin iki alanına hükmeden matematiksel bilginin doğasındaki farklılıklardır (Hersovics, 1989; Kieran, 1992; Stacey & MacGregor, 2000). Sfard (1991) bu iki bilgi çeşidinin bir metal paranın iki yüzü gibi olduğunu ifade etmiş ve öğrencilerin bu iki alan arasındaki ilişkileri fark etmede zorluklara sahip olduklarını belirtmiştir. Bu bağlamda bazı araştırmacıların bu iki alan arasındaki farklılıklara ait görüşleri Tablo 1 de sunulmuştur.

Tablo 1. *Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar*

	Aritmetik	Cebir
Stacey (2008)	Bilinenlerden bilinmeyenlere çalışma	Bilinmeyenlerle çalışma
	Kısa süreli bilinmeyenler	Sabit bilinmeyenler
	Cevaplar üretmede bir formül olarak denklem	Durumu tanımlayan denklem
	Başarılı hesaplama zincirleri	Mantıksal bağlantılı denklem zincirleri
Hersovics ve Linchevski (1994) Filloy ve Rojano (1989)	Odak sayısal bir cevabı belirleme.	Odak ilişkileri ve işlemleri genelleştirebilme.
	"+" ve "=" gibi semboller yapılacak olan işlemlerin ya da eylemlerin var olduğunu gösterir.	Semboller işlemler(eylemler), ilişkiler ve sonuçların bir parçasıdır.
	Aritmetikte eşittir işareti, bir hesaplamanın sayısal sonucunu ifade eder, yani eşittir işareti sonuç bildirir.	Cebirdeki eşittir işareti ise denge durumunu ifade eder yani eşittir işareti dengeyi ifade eder.
	Harfler birim etiketleri olarak kullanılır (metre için m) ve tek bir sayısal değere sahiptir.	Harfler belirli miktarları (nicelikleri) gösterir ("m" metrelerin sayısı olarak) veya değerler dizisidir.
	İşlemler sayılarla sınırlıdır.	İşlemler bilinmeyenlere genişletilir.
Lodholz (1990)	$35 \neq 3 \times 5$ ve $35 \neq 53$	ab = a × b ve ab = ba
	$7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ veya 4 + 0,75 = 4,75	$2a + b \neq 2ab$
Molina ve Ambrose (2008)	"=" işareti cevap için bir uyarıcıdır. Aritmetikte eşittir işareti "işlem işareti" dir.	Denge ile ilgili ifade. İlişkisel bir şekilde eşittir işaretini yorumlama. Cebirde "ilişkisel sembol" olarak algılanır.
Van Dooren vd. (2003)	Problem çözümünde bilinen sayısal değerlerle işlemler yapılarak bilinmeyen değerler hesaplanır	Problem çözümünde bir denklem yazılır ve bilinmeyeni hesaplamaya dönüştürülür.
Linchevski (1995)	Eşittir işareti bir dönüşüm yöntemidir, yani soldan sağa yönsel bir işareti ifade eder.	Eşittir işareti bir denkliği ifade eder yani işaretin her iki yanında aynı miktarda nicelik olduğunu ifade eder.
	Parantez işareti statik olarak yani "ilk onu yap "olarak görürler ve başka bir düşünce için, içinden işlem yapmadan ayrılmazlar. Yani parantez kullanımı özellikle işlem önceliğinde kullanılır.	Cebirde parantez kullanımı aritmetikteki gibi özellikle işlem önceliğinde kullanılır ve içeridekiler ilk değerlendirilen terimlerdir. Fakat değişken kavramıyla birlikte daha dinamik bir yapıya değişir[(x+y).(x-y) gibi.
	"=" işaeri aritmetik işlemlerin sonucunu gösteren bir komuttur	İki miktarı kıyaslamaya yarayan ilişkisel bir sembol
	Aritmetikte bilinmeyenler hesaplamalar içinde yer almaz, bilinmeyenler son nokta olarak alınır.	Bilinmeyen çözüm sürecinin başlangıç noktasıdır ve çözüm sürecinde sembolün kendisi işlem yapılan nesnedir.
Borchert (2003) Alibali vd. (2007)	Eşittir işareti sembolü "işlem işareti" olarak algılanır yani işaretten sonra "sonuç" gelir.	Eşittir işareti sembolü "ilişkisel sembol" olarak algılanır yani dengeyi ifade eder.

Van Amerom (2002)	Genel amaç: sayısal bir çözüm bulma.	Genel amaç: problem çözme ile ilgili yöntemleri sembolleştirme ve genelleştirme.
	Belirli sayı durumlarını genelleştirme.	Sayılar arasındaki ilişkileri genelleştirme.
	Hesaplama aracı olarak tabloyu kullanma.	Problem çözme aracı olarak tabloyu kullanma.
	Sabit sayılarla (4+?=7) işlem yapma.	Değişkenler ile işlem yapma.
	Harfler ölçüm etiketleri veya bir nesnenin kısaltmalarıdır.	Harfler bilinmeyenler veya değişkenlerdir.
	Sembolik ifadeler süreçleri temsil eder.	Sembolik ifadeler süreçler ve ürünler olarak görülür.
	İşlemler hareketlerle(actions) ile ilgilidir.	İşlemler irade dışı nesnelerdir.
	Eşittir işareti sonuç bildirir.	Eşittir işareti denkliği gösterir.
	Bilinenlerle akıl yürütme.	Bilinmeyenlerle akıl yürütme.
	Son nokta olarak bilinmeyenler.	Başlangıç noktası olarak bilinmeyenler.
	Bir bilinmeyenli lineer problemler.	Çok bilinmeyenli problemler: denklem sistemleri.
Booth (1984)	"l" ve "m" harfleri aritmetikte "litre" ve "metre"yi temsil eder.	Cebirde ise metrelerin veya litrelerin çokluğunu veya miktarlarını gösterir.
Kieran(1990; 1992)	Aritmetikte harfler belirli bir kavramın yer tutucularıdır (örneğin; santimetre için cm veya metre için m gibi)	Cebirde ise harfler değişkenler veya herhangi bir sayıyı temsil eden bir harf olarak kullanılır.
	Aritmetik bilgi "3 ile 4'ün toplamı nasıl olur?" gibi matematiksel işlemleri hedefler.	Cebirsel bilgi kavramsal olarak işlemler ve sayılarla ilgili dizilerin gösterimini hedefler.
	Problemlerin çözümleri belirli durumlarla ilgili sayısal çözümlerin keşfine odaklıdır. Yani genel amaç sayısal bir çözüm bulmadır.	Problemlerin çözümü genellikle yöntemi belirlemeye ve keşfetmeye odaklıdır. Yani genel amaç problem çözme ile ilgili yöntemleri sembolleştirme ve genelleştirmedir.
	Aritmetikte problem çözülürken bilinen sayılarla hesaplamalar yapılır ve cevaba doğru çalışılır.	Cebirde ise ilişkiler aynı bir yol içinde hem bilinen hem de bilinmeyenler kullanılarak tanımlanır ve problemin cevabını elde edinceye kadar eşitliklerden faydalanılır

İşte yukarıda ifade edilen farklılıklardan kaynaklanan engellerin ve zorlukların giderilmesinde aritmetikten cebire geçiş kuşağı olan "cebir öncesi" kuşağı önemlidir.

Cebir Öncesi ve Önemi

Cebir aritmetikten köklerini almakta ve güçlü bir aritmetik temele dayanmakta iken aritmetik de sembolleştirme, genelleştirme ve cebirsel düşünme için gerektiğinden fazla fırsatlar sunmaktadır. Fakat araştırmacılar öğrencilerin bu iki bilgi türü arasındaki farklılıkları- örneğin; sözdizimsel (Lodholz, 1990), stenografi (alfabenin harfleri, noktalama işaretleri, kelimeleri yerine semboller ve kısaltmalar kullanma) olarak harfleri kullanımı (Booth, 1988), manipülasyonlar (Booth, 1984), bilinmeyenler (Filloy & Rajono, 1989) ve eşitlik (eşittir işareti) (Wagner & Parker, 1993) gibi farklılıkları- birleştirmede başarısız olduğunu belirtmişler ve bununda öğretimde bilişsel boşluğa veya öğretisel araya neden olduğunu iddia etmişlerdir (Booth, 1988; Hersovics, 1989; Wagner & Kieran, 1989; Kieran, 1990, 1992; Sfard, 1991; Hersovics & Linchevski, 1994; English & Halford, 1995; Rosnick, 1999). Nitekim aritmetikle cebir arasında bilişsel boşluk veya öğretisel ara olarak tanımlanan bu boşluk cebir ile ilgili kavramların gelişiminde öğrencilere engeller ve zorluklar (özellikle problem çözme sürecinde, genelleme yapmada, sembollerin kullanımında ve harflerin anlamında) yaratmaktadır (Booth, 1988; Filloy & Rojano, 1989; Sfard, 1991; Herscovics & Linchevski, 1994; Williams & Cooper, 2001). Örneğin, Wagner ve Kieran (1989) ve English ve Halford (1995) cebirdeki değişken kavramının aritmetiktekinden farklı olduğunu iddia etmiş ve bu temel farkın da eğitimde bir araya neden olduğunu belirtmişlerdir. Booth (1988)**,** Filloy ve Rojano (1989) ve Herscovics ve Linchevski (1994) bilişsel aranın aritmetik denklemleri çözmek için gerekli olan bilgi (sayısal hesaplamalar) ile cebirsel denklemleri çözmek için gerekli olan bilgi (bilinmeyenleri içeren hesaplamalar) arasına yerleştirilebileceğini ifade etmişlerdir. Stacey ve MacGregor (1997) göre cebirdeki "*3x*" gösterimi ile aritmetikteki iki basamaklı "*3x*" ifadesi arasındaki söz dizimsel benzerliğin üstesinden gelmede öğrenciler zorlanmakta ve bu da öğretisel bir araya neden olmaktadır. İşte "cebir öncesinin" niçin önemli olduğu burada ortaya çıkmaktadır. Birçok matematik eğitimcisi aritmetik ile cebir arasında var olduğu iddia edilen bu boşluğun üstesinden gelmede "cebir öncesi" evresinin önemli olduğuna vurgu yapmıştır (Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1992; Lodholz, 1990; Kieran & Chalouh, 1993; Hersovics & Linchevski, 1994; Linchevski, 1995; Linchevski & Hersovics, 1994, 1996; Goodson-Espy, 1998; Linchevski & Livhen, 1999; Van Amerom, 2002).

Lodholz (1990) aritmetik ile cebir arasında var olan içeriği -ilköğretim birinci kademe aritmetik ile ilköğretim ikinci kademe ve daha üst seviyedeki cebir arasındaki boşluğu inşa edebilecek içeriği- cebir öncesi olarak tanımlamış ve bu bağlamda öğrencileri cebir yolu üzerinde tutmayı sağlayacak olan alanın da aritmetik olduğunu ifade etmiştir. Kieran (1991) cebir öncesini, öğrencilerin fiziksel ve aritmetik deneyimleriyle cebiri temellendirerek cebirsel fikirleri inşa ettiği evre olarak tanımlamıştır. Kieran (1992) biraz daha özele indirgeyerek cebir öncesini, sayılar üzerine olan işlemlerden oluşan aritmetik denklemleri çözmek için gerekli olan bilgiden, değişken ve bilinmeyen üzerine yapılan işlemlerden oluşan cebirsel denklemleri çözmek için gerekli olan bilgiye doğru hareket olarak tanımlamıştır. Ayrıca Kieran (1992) bu geçişte iki önemli noktaya vurgu yapmıştır: (1) Sayıları temsil eden harflerin kullanımı, (2) Hem sayıların hem de harflerin kullanımıyla sembolleştirilmeye başlanılan matematiksel yöntemle ilgili farkındalık. Kieran ve Chalouh (1993) aritmetikle cebir arasında köprü vazifesi gören cebir öncesi kavramını; öğrencilerin mevcut aritmetik ve geometrik bilgilerini kullanmalarına imkan tanıyarak cebirsel kavramları ve prosedürleri informal olarak anlamlandırmalarına fırsatlar sağlayabilmesi süreci olarak tanımlamıştır. Linchevski (1995) ise okul cebrinin beş ana bileşenini tanımlamıştır: (1) Değişkenler ve cebirsel ifadeleri sadeleştirme, (2) Genelleştirme, (3) Yapı, (4) Denklemler, (5) Sözel problemler. O bu beş ana bileşenin cebir öncesi etkinlikleriyle geliştirilmesinin daha sonraki cebir öğretimi için hayati önem taşıdığına vurgu yapmış ve cebir öncesini bu beş bileşeni destekleyecek ön kavramların inşaa edildiği bir alan olarak tanımlamıştır. Van Amerom'a (2002) göre ise cebir öncesi, aritmetik bir ortamda cebirsel akıl yürütmeyi, informal sembolleştirmeyi ve denklem çözümünde ihtiyaç duyulan aritmetik temelleri genişletmeyi ve güçlendirmeyi içermektedir. O halde cebir öncesi, öğrencilerin aritmetik bir ortamda aritmetik ve geometrik bilgilerini kullanmalarına imkan tanıyarak cebirsel kavramlar ve prosedürleri informal olarak anlamlandırmalarına fırsat sağlayabilme; cebirsel akıl yürütmeyi, formal olmayan sembolleştirmeyi ve denklem çözümünde ihtiyaç duyulan aritmetik temelleri genişletmeyi ve güçlendirmeyi içermektedir (Akkan, 2009).

ÖNERİLER

Aritmetikten cebire geçişin en iyi şekilde yürütülebilmesi için son derece dikkatli hazırlanmış öğretim programlarına ihtiyaç vardır. Özellikle NCTM standartları ve yurt dışı kitapları incelendiğinde, standartlarınve kitapların belli kısımlarında aritmetikten cebire geçiş sürecini yani cebir öncesini destekleyen bölümlere yer verildiği tespit edilmiştir (NCTM,1989;2000; Price vd., 1996; Miller vd., 2010). Bu bağlamda bu programlardan, kitaplardan ve ülkemiz müfredat programından yararlanılarak mini müfredat ve kitap bölümleri hazırlanabilir. Ayrıca son yıllarda bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler, öğrenme-öğretim sürecinde öğrencilerin kavrama düzeylerini artırıcı birçok yeni olanaklar sunmaktadır. Nitekim yapılan literatür incelemesi sonucunda aritmetikten cebire geçiş sürecini destekleyecek bilgisayar destekli öğretim materyallerinin önemine değinildiği belirlenmiştir (Stacey,2008; Lodholz, 1990; Malara & Navarra, 2003). Bu nedenle aritmetikten cebire geçiş süreci teknolojinin desteği de alınarak son yıllarda yaygınlaşmakta olan sanal manipülatifler veya öğrenme nesnelerin kullanımı ile ilgili desteklenebilir. Ayrıca öğretmenlerin aritmetikten cebire geçişte ön kavramlara değinmesi bu geçiş için önemlidir (Linchevski, 1995; Van Amerom, 2002). Çünkü ön kavramlar formal kavramları yapılandırmada konuyla ilgili ön gerekliliği sağlar. Ön kavramlar daha sonraki kavramlarla birlikte eş zamanlı var olmaya çalışır ve öğrenciler matematik kavramların çeşitli seviyeleri arasında uygun bir şekilde ilerleyebilir. Bu nedenle matematik öğretmenleriyle, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş sürecinde yaşadıkları değişimleri, zorlukları ve hataları içeren hizmet içi seminerler yürütülebilir ve bu öğretmenlerin de görüşleri alınarak bu süreç daha kapsamlı şekilde incelenebilir.

KAYNAKÇA

Akgün, L. (2006). Cebir ve değişken kavramı üzerine, *Journal of Qafqaz University*, 17.

Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattıkudur, S., Mcneil, N.M. & Stephens,A.C. (2007). A longitudinal look at middle-school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*, 221-247.

Armstrong, B. (1995). Teaching patterns, relationships, and multiplication as worthwhile mathematical tasks. *Teaching Children Mathematics, 1*(7), 446-450.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi(4.Baskı).* Ankara:Harf Eğitim Yayıncılık.

Battista, M.T. (1995). *Considerations for developing a first course in algebraic thinking.* Unpublished doctoral dissertation, Kent State University, Kent, OH.

Bell,A. (1996). Problem solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Bernardz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. perspectives to research and teaching* (pp.167-187). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp.20–32). Reston, VA: NCTM.

Borchert, K. (2003). *Disassocation between arithmetic to algebraic knowledge in mathematical modeling.* Unpublished doctoral dissertation, University of Washington, USA.

Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Athew, B., Pilay, H., Wilss, L. & Mutch, S. (1997). The transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21(2),185-192.

Carpenter, T.P. & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. [Online]: Retrieved on 11-March-2008, at URL: **www.wcer.wisc.edu/ncisla /publications/ index.html,**

Cooper, T., Boulton-Lewis, G., Athew, B., Wilssi L.,& Mutch, S. (1997). The transition arithmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable. *International Group for the Psychology of Matematics Education*, 21(2), 89-96.

Dede, Y. (2003). *ARCS motivasyon modeli ve öğe gösterim teorisi'ne (Component Display Theory) dayalı yaklaşımın öğrencilerin değişken kavramını öğrenme düzeylerine ve motivasyonlarına etkisi.*Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Ün. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Demana, F. &Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving, In A.F. Coxford(Ed.), *The ideas of algebra, K-12*,(pp.61-68), Reston, VA: NCTM.

English, L.D.& Halford, G.S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For The Learning of Mathematics,* 9(2), 19 - 25.

French, D. (2002). *Teaching and learning algebra.* London: Continuum.

Goodson-Espy, T.J. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: Transitions from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 36, 219-245.

Harvey, J. G., Waits, B. K. & Demana, F.D. (1995). The influence of technology on the teaching and learning of algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1),75-109.

Hersovics, N. & Linchevski, L. (1994). *A cognative gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics,* 27(1), 59-78.

Hersovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S.Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra,* (pp. 60-92). Reston, VA: NCTM, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, (pp. 119-139). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition,* (pp. 96-112). Cambridge: Cambridge University Pres.

Kieran, C.(1991). A procedural-structural perspective on algebra research. In Furinghetti, F. (Ed.), *Proceedings of the fifteenth international conference for the psychology of mathematics ducation,* (2, pp.245–253). Genoa, Italy,

Kieran,C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp.390-419). New York: Macmillan.

Kindt, M.M. (2000). Patterns and symbols. In National Center for Research in Mathematical Science Education and Freudenthal Institute (Eds), *Mathematics in context, a connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Brittanica Educational Corporation.

Linchevski, L. & Hersovics, N. (1994). "Cognitive obstacles in pre-algebra". *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 176-183.

Linchevski, L. & Hersovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 38–65.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Sctructure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics,* 40, 173-196.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.

Lodholz, R. D. (1990). The transition from arithmetic to algebra. E.L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone*,(pp. 24-33). Reston, VA: NCTM.

Macgregor, M. & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Malara, N. & Navarra, G. (2003). *ArAl project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking.* Bologna: Pitagora Editrice.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.). *Approaches to algebra*, (pp.65-111). London: Kluwer Academic Publishers.

Mcneil, N.M. & Alibali, M.W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, 76, 883-899.

MEB, TTKB. (2006). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu*, Ankara:MEB Basımevi.

Mellilo, J., A. (1999). *An analysis of students' transition from arithmetic to algebriac thinking*. Unpublished doctoral dissertation, Kent State University, Ohio.

Miller, J., O'Neill, M., & Hyde, N. (2010). *Pre-algebra*. New York: McGraw-Hill Companies.

Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 30(1), 61-80.

Nathan, M. & Koellner, K. (2007). A framework for understanding and cultivating the transition from arithmetic to algebraic reasoning. *Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), 179-192.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ohlsson, S.(1993). Abstract schemas. *Educational Psychologist,* 28(1),51-66.

Price, J., Rath, J. N., Leschensky, W., Brame, O.H. & Molina,D. D.(1996). *Merrill pre-algebra: A transition to algebra,* Westerville, OH:Merrill Publishing Company.

Rosnick, P. (1999). Some misconceptions concerning the concept of variable. In Ed: B. Moses, *Algebraic thinking: Grades 9-12*, (pp.313-315), Reston, Va: NCTM.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gain and the pitfalls of reification:The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confront historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Stacey, K. & Macgregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics in the Middle School,* 2, 253 – 260.

Stacey, K. & Macgregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 18(*2), 149-167.

Stacey, K. (2008). The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking [Online]: Retrieved on 07-March-2008, at URL:***www.* staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/IMECstaceyALGEBRA**

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). Spreadsheet approach to solving algebraic problems. *The Journal of Mathematics Behavior,* 12(4), 353-383.

Swadener, M. & Soedjadi, R. (1988). Values, mathematics education and the task of developing pupils' personalities: An Indonesian perspective. *Educational Studies In Mathematics,* 19(2), 193-208.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2003). "The role of context in learning beginnig algebra". *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* Bellaria, Italia.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. Edt. D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 495-514). Macmillan Publishing Company, Newyork.

URL-1, http://www.uludagsozluk.com. "*Aritmetik*". 07 Mart 2009

URL-2, http://www.bilgidenizi.net/aritmetik/5458 "*Aritmetik*". 11 Aralık 2008.

Usiskin,Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (Eds.). *Algebraic thinking, grades K-12*, (pp.5-7). Reston, VA: NCTM.

Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra.* Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht, The Netherlands.

Van Doren, W., Verschaffel, L. & Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 27-52.

Vance, J.H.(1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics, 4*, 282-285.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In P. S. Wilson, Ed., *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, (pp.117-139), New York: Macmillan Publishing Company.

Wijers, M. (1995). *Using real world contexts to make variables and formulas meaningful.* Paper Presented at Area in San Francisco, April 1995: 18.

Williams, A. & Cooper, T. (2001). Moving from arithmetic to algebra under the time pressures of real classrooms. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent, & John Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (pp.665-662). Melbourne: University of Melbourne.

Witzel, B.S., Mercer, C.D. & Miller, D.M. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research&Practice,* 18(2), 121-131.