国際研究論叢　28(１)：23〜36，2014

特性関数を考慮した４人協力ゲーム

安達　康生＊1　　安高真一郎＊2　　植松　康祐＊3

A Coalitional Game of Four players with the Characteristic Function

Yasuo Adachi＊1　　Shinichiro Ataka＊2　　Koyu Uematsu＊3

Abstract.

Game theory is the study of mathematical models of competition and cooperation between rational decision-makers pioneered by Princeton mathematician John Von Neumann. His paper was followed by his 1944 book "Theory of Games and Economic Behavior" with Oskar Morgenstern. In this research, based on the Shapley value introduced by 2012 Nobel Economics prize-winner L.S. Shapley, we discuss how to divide the reward in a coalitional game depending on the relationships between the players.

In this paper, we identify the relationship between two players, and define the value of the characteristic function depending on the state of that relationship. If the relationship is good, the value of the characteristic function is high. If the relationship is bad, that value goes down. We define a characteristic function to have these properties and discuss the strategy of each player. By applying the characteristic function, which depends on the relationship, we prove some properties that describe when a specific player's reward will be the maximum or the minimum. In particular, the number who participate in this game is extended to four persons from three.

When the number of participants increases by one, different situations develop with each player's Shapley value changing from 3^3=27 to 3^6=729. We can discuss the strategy of each player by computation simulations with VBA (Microsoft Excel).

キーワード

ゲーム理論，協力ゲーム，Shapley 値，特性関数

＊１　あだち　やすお　：大阪国際大学グローバルビジネス学部准教授〈2014.6.6 受理〉
＊２　あたか　しんいちろう：大阪国際大学グローバルビジネス学部准教授
＊３　うえまつ　こうゆう：大阪国際大学グローバルビジネス学部教授

1．はじめに

ゲーム理論は，コンピュータの生みの親であり，20 世紀を代表する数学者 John Von Neumann（1903-1957）とオーストリア学派の経済学者 Oskar Morgenstern（1902-1977）による「ゲームの理論と経済行動」（1944 年）の出版によって世に知られるようになった．

ゲーム理論とは，数学理論の１つで，それを簡単に説明すると，必ずしも利害が一致しない状況にいる人々にとって，合理的な意思決定や合理的な配分方法とは何かということについて考えるための理論である．ゲーム理論は数学的理論であるが，その応用分野として，経済学の発展に大きな影響を与えてきた．この分野でのノーベル経済学賞受賞者が多くいるが，最も有名な学者は，John Forbs Nash（1928-）である．Nash は，非協力ゲームにおける均衡理論で経済学の発展に寄与したことが認められ，ノーベル賞を受賞し，その後に，彼の人生を映画化した「ビューティフル・マインド」（A beautiful mind, 2001）で全世界に知られるようになった．

最近でのノーベル賞受賞者としては，2012 年に Lloyd S.Shapley と Alvin E.Roth が望ましいマッチング方式を提案したとの理由によりノーベル賞を受賞した．シャプレー氏の名前は，ウルトラセブンに登場した宇宙人シャプレー星人でウルトラシリーズ・ファンには有名である．シャプレー星人のシャプレーの名前は，アメリカの有名な天文学者で，その息子がノーベル賞を受賞した Lloyd S.Shapley であった．(参考文献[8])

Lloyd S.Shapley 氏の業績は，n 人協力ゲームにおける価値，Shapley 値でゲーム理論の発展に貢献してきた．この二人の受賞理由は，研修医の病院への配属や学校選択などにおいて，相方の不満が少ないマッチング・アルゴリズムを実際の現場に適用して，その成果が上がったことが認められたことによるものである．

本研究においては，Shapley 値の考え方を基礎として，そこに２人の関係性，または，戦略によって取りうる値が異なる特性関数を導入することにより，４人協力ゲームに関して議論を行うものである．ここでの議論は，先行研究の「Some Coalitional Games with the Shapley Value」（参考文献[４]）を発展させたものである．３人協力ゲームでの各個人との関係性は，3^3=27 通りであったため，Excel 関数を工夫すれば問題はなかった．しかし，本論文においては，４人協力ゲームに拡張したために，その組み合わせの数は，3^6=729 通りと増加して，Excel 関数での工夫の範囲を超えている．そこで，Microsoft Office シリーズに搭載されているプログラミング言語である VBA を活用して，シミュレーションに成功した．その一部の結果を掲載すると共に，それぞれのプレーヤの戦略について言及する．

2．協力ゲームと Shapley 値

プレーヤの集合を N= {1,2,･･･,n} とし，N の部分集合を M とし，集合 M をプレーヤの提携と呼ぶ．関数 v は任意の提携 M に対しての効用（利得）v（M）を与えるものする．効用は提携 M の中のメンバー間で配分することができるものとする．ここで，(N,v）を提携形ゲームと呼ぶことにする．このように譲渡可能な効用をもつ提携形ゲームに対して，Lloyd S.Shapley は１つのゲームの値（[2]Shapley 1953）を公理系から導出した．この Shapley 値がどのようなものであるかを，次の事例で説明する．

３人のプレーヤ A，B，C が参加するゲームを考える．各個人単独で行動した時に得られる利得と２人以上のプレーヤが協力すると利得が次のように得られているものとする．

v(A)=6，v(B)=4，v(C)=2，v(A,B)=20，v(B,C)=15，v(C,A)=10，v(A,B,C)=24

この関数の意味は，A は単独行動した時の利得は６であるが，A と B が協力すれば利得は 20 となり，A,B,C の３人が協力すれば 24 の利得が得られるという仮定である.（参考文献［５］）

３人が協力して得られた 24 の利得をどのように配分するのが公平であるかを考えることにする.

A，B，C の順列は，以下の通りある.

A，B，C‥‥‥①
A，C，B‥‥‥②
B，A，C‥‥‥③
C，A，B‥‥‥④
B，C，A‥‥‥⑤
C，B，A‥‥‥⑥

ここでプレーヤ A について見たとき，A の前の人との協力を行うとすれば，①と②は A の前には誰もいないので単独行動したと見なし，③は B と協力し，④は C と協力し，⑤と⑥は，３人が協力したものと見なします．それぞれの場合において，自分が加わったことによる貢献度を求め，それぞれの現象が出現する確率を掛けることにより，自分自身が貢献する期待値を求めている.

①と②　：v(A) − v(ϕ)‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥　（ⅰ）
③　：v(A,B) − v(B) ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥（ⅱ）
④　：v(A,C) − v(C) ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥（ⅲ）
⑤と⑥　：v(A,B,C) − v(B,C)‥‥‥‥‥‥‥（ⅳ）

（ⅰ),（ⅱ),（ⅲ),（ⅳ）のそれぞれが出現する確率は $\frac{2}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$ となるため，Shapley 値は次の様になる.

$$f(A)=\frac{2!}{3!}\{v(A)-v(\phi)\}+\frac{1}{3!}\{v(A,B)-v(\mathrm{B})\}+\frac{1}{3!}\{v(A,C)-v(C)\}+\frac{2!}{3!}\{v(A,B,C)-v(B,C)\}$$

$$=\frac{2}{6}(6-0)+\frac{1}{6}(20-4)+\frac{1}{6}(15-2)+\frac{2}{6}(24-10)$$

$$=\frac{12+16+13+28}{6}=\frac{69}{6}=\frac{23}{2}$$

同様に

$f(B)=8$，$f(C)=\frac{9}{2}$ となり，A，B，C への配分は $\frac{23}{2}$, 8, $\frac{9}{2}$ となる

これらの配分は，Shapley によって考えた公平なゲーム値である.

[Shapley 値の定義]
提携形ゲーム(N,v)におけるプレーヤ i の Shapley 値は

$$f(i)=\sum_{M}\frac{(j)!\cdot(n-j-1)!}{n!}\{v(M\cup\{i\})-v(M)\} \qquad (2\text{-}1)$$

とする．n はプレーヤの集合 N の人数であり，M はプレーヤ i を除く任意の集合を表し，$M\cup\{i\}$ は集合 M にプレーヤ i を加えた集合とする．j は M に含まれるプレーヤ数を表して，Σは M のすべての組み合せに対しての合計を求める．(参考文献[5])

Shapley 値の意味は，プレーヤ i を含むすべての提携の効用からプレーヤ i を除いた提携の効用を差し引いた貢献度の期待値を表わしている．

3．特性関数の導入

協力してゲームを行う際に，２人の関係が利得に影響を与えることは自然である．２人の関係が良ければその利得は増し，関係が悪ければ利得は少なくなることが予想される．そこで，２人の関係を与える集合 S を $S=\{s_1, s_2, s_3,\cdots, s_m\}$ と定義する．

そして任意の $i<j$ に対して $s_i \gg s_j$ とする．$\gg$ の意味は，関係 s_i が 関係 s_j より良いということを意味している．

全ての関係に対して，$s_1 \gg s_2 \gg s_3 \gg \cdots \gg s_i \gg \cdots \gg s_m$ とする．すなわち s_1 が一番良い関係を与え，s_m が一番悪い関係とする．

次に，プレーヤの集合を P とし，$P=\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$ とする．

［２人の特性関数の定義］

２人のプレーヤ p_i と p_j の関係が s_h，に対して，特性関数 $v(p_i \cup p_j, s_h)$ が次の条件を満足すると定義する．

$k<l$, を満たす任意の k と l に対して，$v(p_i\cup p_j, s_k) \geqq v(p_i \cup p_j, s_l)$

この定義が意味するものは，同じプレーヤ同士の提携であるならば，その２人の関係が良ければ利得は高くなることである．

［３人以上の特性関数の定義］

３人の特性関数を次の様に定義する．

$$v(p_i\cup p_j\cup p_k)=\frac{1}{2}\{v(p_i\cup p_j, s')+v(p_i\cup p_k, s'')+v(p_k\cup p_j, s''')\}, \qquad (3\text{-}1)$$

s' を p_i と p_j の関係，s'' を p_i と p_k の関係，s''' を p_j と p_k の関係とする．

４人の特性関数を次の様に定義する．

$$v(p_i\cup p_j\cup p_k\cup p_l)=\frac{1}{3}\{v(p_i\cup p_j\cup p_k)+v(p_j\cup p_k\cup p_l)+v(p_i\cup p_k\cup p_l)+v(p_i\cup p_j\cup p_l)\}. \qquad (3\text{-}2)$$

５人以上に関しても，帰納的に定義する．

３人における協力ゲームを考える．３人の集合を $P=\{p_1, p_2, p_3\}$ とし，２人の関係を与える集合を $S=\{s_1, s_2, s_3,\cdots, s_m\}$ とする．各個人の特性値を $v(p_1)=q_1$, $v(p_2)=q_2$, $v(p_3)=q_3$ とする．

我々が定義した特性関数を使って，各プレーヤの Shapley 値は次の様になる．

$$f(p_1)=\frac{2!}{3!}\{v(p_1)-v(\phi)\}+\frac{1}{3!}\{v(p_1\cup p_2, s')-v(p_2)\}+\frac{1}{3!}\{v(p_1\cup p_3, s'')-v(p_3)\}$$

$$+\frac{2!}{3!}\{v(p_1\cup p_2\cup p_3)-v(p_2\cup p_3, s''')\} \qquad (3\text{-}3)$$

$$=\frac{1}{6}\{2q_1-(q_2,+q_3)\}+\frac{1}{6}\{2(v(p_1\cup p_2, s')+v(p_1\cup p_3, s''))-v(p_2\cup p_3, s''')\}$$

$$f(p_2)=\frac{1}{6}\{2q_2-(q_1+q_3)\}+\frac{1}{6}\{2(v(p_1\cup p_2, s')+v(p_2\cup p_3, s'''))-v(p_1\cup p_3, s'')\} \qquad (3\text{-}4)$$

$$f(p_3)=\frac{1}{6}\{2q_3-(q_1+q_2)\}+\frac{1}{6}\{2(v(p_2\cup p_3, s''')+v(p_1\cup p_3, s''))-v(p_1\cup p_2, s')\} \qquad (3\text{-}5)$$

s' , s'' , s''' は集合 $S=\{s_1, s_2, s_3,\cdots, s_m\}$ の任意の要素である．
$f(p_1)$が最大となるためには，正の項を最大，負の項を最小になるときである．
$v(p_i\cup p_j, s_k)\geqq v(p_i\cup p_j, s_l)$ for $k<l$ の性質から$(s',s'',s''')=(s_1, s_1, s_m)$ のとき，$f(p_1)$が最大となる．同様に考えれば，$f(p_2)$ を最大にする戦略は $(s',s'',s''')=(s_1, s_m, s_1)$，$f(p_3)$ を最大にする戦略は $(s',s'',s''')=(s_m, s_1, s_1)$ であることがわかる．
３人のプレーヤの事例から，次のような定理が成り立つことがわかる.（参考文献［４］）
［定理 Ⅰ］
$f(p_i)$を最大にするためには，プレーヤ p_i に係わる関係 $p_i\cup p_j$ 全ての j $(j\neq i)$ を最良な関係 s_1 として，プレーヤ p_i に係わらないプレーヤ達の関係 $p_j\cup p_k$ $(j\neq i$ and $k\neq i)$を最悪 s_m とするときである．
［定理 Ⅱ］
$f(p_i)$を最小にするためには，プレーヤ p_i に係わる関係 $p_i\cup p_j$ 全ての j $(j\neq i)$ を最悪な関係 s_m として，プレーヤ p_i に係わらないプレーヤ達の関係 $p_j\cup p_k$ $(j\neq i$ and $k\neq i)$を最良 s_1 とするときである．

４．４人協力ゲームの分析

これまでの研究では３人協力ゲームを中心に分析を行ってきたが，４人となると組み合わせが複雑となることから，どの様な状況の変化が現れるかについて，シミュレーションを行う. プレーヤの集合を$P=\{A,B,C,D\}$とし, 関係を与える状態を $S=\{g,n,w\}$ $(g\gg n\gg w)$ とする．g は，“good”，n は “neutral”，そして w は “worse” の頭文字を取っている．
各プレーヤの関係を次の様に定義する．

Ａ とＢの関係を α ，　Ａ とＣの関係を β ，
Ａ とＤの関係を γ ，　Ｂ とＣの関係を δ ，
Ｂ とＤの関係を ε ，　Ｃ とＤの関係を ζ ，

$$v(A) = a,\quad v(B) = b,\quad v(C) = c, v(D) = d,$$

$$v(A \cup B, \alpha) = \begin{cases} 2(a+b), & \alpha = g \\ \frac{3}{2}(a+b), & \alpha = n \\ a+b, & \alpha = w \end{cases}$$

$$v(A \cup C, \beta) = \begin{cases} 2(a+c), & \beta = g \\ \frac{3}{2}(a+c), & \beta = n \\ a+c, & \beta = w \end{cases}$$

$$v(A \cup D, \gamma) = \begin{cases} 2(a+d), & \gamma = g \\ \frac{3}{2}(a+d), & \gamma = n \\ a+d, & \gamma = w \end{cases}$$

$$v(B \cup C, \delta) = \begin{cases} 2(b+c), & \delta = g \\ \frac{3}{2}(b+c), & \delta = n \\ b+c, & \delta = w \end{cases}$$

$$v(B \cup D, \varepsilon) = \begin{cases} 2(b+d), & \varepsilon = g \\ \frac{3}{2}(b+d), & \varepsilon = n \\ b+d, & \varepsilon = w \end{cases}$$

$$v(C \cup D, \zeta) = \begin{cases} 2(c+d), & \zeta = g \\ \frac{3}{2}(c+d), & \zeta = n \\ c+d, & \zeta = w \end{cases}$$

$$v(A \cup B \cup C) = \frac{1}{2}\{v(A \cup B, \alpha) + v(A \cup C, \beta) + v(B \cup C, \delta)\}$$

$$v(B \cup C \cup D) = \frac{1}{2}\{v(B \cup C, \delta) + v(B \cup D, \varepsilon) + v(C \cup D, \zeta)\}$$

$$v(A \cup C \cup D) = \frac{1}{2}\{v(A \cup C, \beta) + v(A \cup D, \gamma) + v(C \cup D, \zeta)\}$$

$$v(A \cup B \cup D) = \frac{1}{2}\{v(A \cup B, \alpha) + v(A \cup D, \gamma) + v(B \cup D, \varepsilon)\}$$

$$v(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{1}{3}\{v(A \cup B \cup C) + v(B \cup C \cup D) + v(A \cup C \cup D) + v(A \cup B \cup D)\}$$

特性関数の定義と式(3-1)，式(3-2)に従って各プレーヤのShapley値を計算すると次のような結果となる．

$$f(A)=\frac{1}{24}\{6a-2(b+c+d)\}+\frac{1}{24}[6\{v(A\cup B,\ \alpha)+v(A\cup C,\ \beta)+v(A\cup D,\ \gamma)\}-3\{v(B\cup C,\ \delta)+v(B\cup D,\ \varepsilon)+v(C\cup D,\ \zeta)\}] \quad (4\text{-}1)$$

$$f(B)=\frac{1}{24}\{6b-2(a+c+d)\}+\frac{1}{24}[6\{v(A\cup B,\ \alpha)+v(B\cup C,\ \delta)+v(B\cup D,\ \varepsilon)\}-3\{v(A\cup C,\ \beta)+v(A\cup D,\ \gamma)+v(C\cup D,\ \zeta)\}] \quad (4\text{-}2)$$

$$f(C)=\frac{1}{24}\{6c-2(a+b+d)\}+\frac{1}{24}[6\{v(A\cup C,\ \beta)+v(B\cup C,\ \delta)+v(C\cup D,\ \zeta)\}-3\{v(A\cup B,\ \alpha)+v(A\cup D,\ \gamma)+v(B\cup D,\ \varepsilon)\}] \quad (4\text{-}3)$$

$$f(D)=\frac{1}{24}\{6d-2(a+b+c)\}+\frac{1}{24}[6\{v(A\cup D,\ \gamma)+v(B\cup D,\ \varepsilon)+v(C\cup D,\ \zeta)\}-3\{v(A\cup B,\ \alpha)+v(A\cup C,\ \beta)+v(B\cup C,\ \delta)\}] \quad (4\text{-}4)$$

[Property Ⅰ]

プレーヤ A の Shapley 値を最大にする戦略は, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)=(g,g,g,w,w,w)$のときである.

[Proof]

定理Ⅰの結果からも明らかであるが, f(A) 式(4-1)の構造からも A と関わる関係を良くして, A 以外のメンバーの関係が悪くなれば, A の利得は最大となり, その値は以下の様になる. $f(A)=\frac{7}{4}a+\frac{1}{6}(b+c+d)$

[Property Ⅱ]

プレーヤ A の Shapley 値を最小にする戦略は, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)=(w,w,w,g,g,g)$のときである.

[Proof]

定理Ⅱの結果からも明らかであるが, f(A) 式(4-1)の構造からも A と関わる関係を悪くして, A 以外のメンバーの関係が良くなれば, A の利得は最小となり, その値は以下の様になる. $f(A)=a-\frac{1}{3}(b+c+d)$

[Property Ⅲ]

戦略 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)=(w,*,*,*,*,*)$のとき, プレーヤ A の Shapley 値は, b に関して単調減少関数となる. (* は任意の戦略を表す)

[Proof]

b に関して, 正の項となるのは $v(A\cup B,w)=a+b$ だけであり, 負の項 $v(B\cup C,\ \delta)+v(B\cup D,\ \varepsilon)$は, どのような戦略に対しても, b の係数は負となり, f(A)は b に関して単調減少関数となる.

この意味は, プレーヤ A がプレーヤ B との関係が悪くなれば, 他のプレーヤに対し, どのような戦略をとっても, プレーヤ B の本来得る利得 b に関しては減少することになる.

もし, プレーヤ B が大きな利得を持つならば, プレーヤ A にとっては非常に重要な役

割を果たすことになる.

[Property Ⅳ]

戦略（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$）=(n, *, *,w, *, w)以外の戦略（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$）=(n, *, *, *, *, *)のとき，プレーヤ A の Shapley 値は，b に関して単調減少関数となる.

[Proof]

b に関して，正の項となるのは v(A ∪ B,n)= $\frac{3}{2}$(a + b)だけであり，負の項 v(B ∪ C, w) + v(B ∪ D, w)=2b + c + d のときだけが, b の係数が正となり, それ以外に対しては, どのような戦略に対しても，b の係数は負となり，f(A)は b に関して単調減少関数となる.

5．シミュレーション結果とその分析

あるプレーヤが自分以外のプレーヤとの関係は，3! = 6 通りある．すなわち,（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$）に対して，各要素が S= {g,n,w} の 3 通りの組み合わせがあるため，全体としては 3^6=729 通りが存在することになる．Excel 上で，729 通りの記述をすることは非常に困難であることより，VBA によるマクロを使いすべての組み合わせをセル上に吐き出すプログラムを作成した.（Appendix Ⅰ）

次に，Shapley 値，式(4-1)から式(4-4)を，各関係性を表す状態に対応した関数から計算するためのユーザ定義関数をマクロで組んだ.（Appendix Ⅱ）

ここでは，そのすべてを掲載することは，紙面の問題から割愛するが，その一部に関しての議論を行うことにする.

シミュレーションに際して，各プレーヤが単独に持つ利得を次のように設定した.

v(A) = 5,　v(B) = 4,　v(C) = 3,　v(D) = 2

すなわち，プレーヤ A の能力が最も高く，プレーヤ D の能力が最も劣るという設定でのシミュレーションを行った．Figure 5-1 は，すべての戦略 729 通りの中で，f(A)の値が高い上位 10 位までをグラフ化したものである．Propetry Ⅰの結果からも明らかなように，f(A)を最大にする戦略は,（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$）=(g,g,g,w,w,w)である．そして，それに続く上位 10 位までのすべての戦略は（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$）=(g,g,g,*,*,*)であり，プレーヤ A が直接関係する関係を良く(g)して，プレーヤ A 以外の関係が悪い(w)以外の場合である．これらの戦略においては，圧倒的にプレーヤ A が多くの利得を得ることができることを示している.

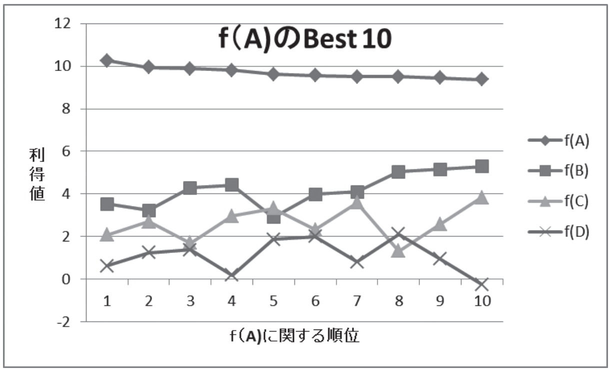

Figure 5-1　f(A)の値が高い上位10位

次に，Figure 5-2 は，すべての戦略 729 通りの中で，f(A)の値が低い下位 10 位をグラフ化したものである．Propetry Ⅱの結果からも明らかなように，f(A)を最小にする戦略は,($\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$)=(w,w,w,g,g,g)のときであり，最も高い利得を持ちながら４人の中で最小の利得となる．プレーヤ A が４人の中で最下位となる戦略は,($\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$)=(w,w,w,g,g,g)（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$)=(w,w,n,g,g,g)の２通りしかない．４人の中で，プレーヤ A の順位が下がることは，プレーヤ B が１位になる傾向が高いことを意味している．

Figure 5-3 , Figure 5-4, Figure 5-5 は，すべての戦略 729 通りの中で，f(B),f(C),f(D)の値が高い上位 10 位までをグラフ化したものである．これらのグラフから，各プレーヤの順位が上位にあるときの，他のプレーヤの位置を見ることができる．

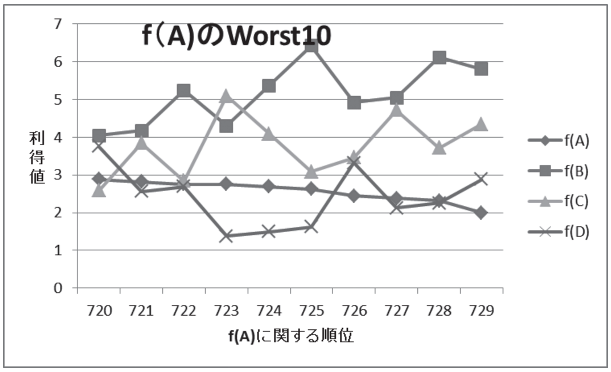

Figure 5-2　f(A)の値が最も低い下位10位

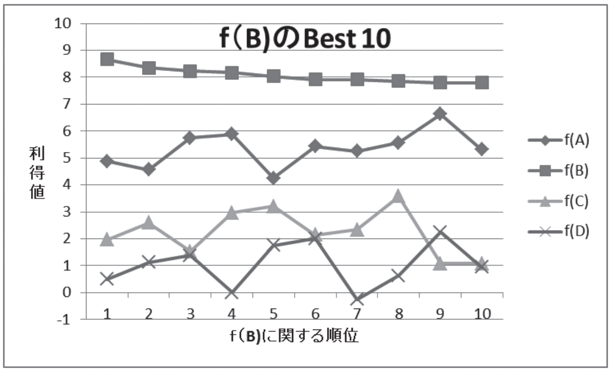

Figure 5-3　f(B)の値が高い上位10位

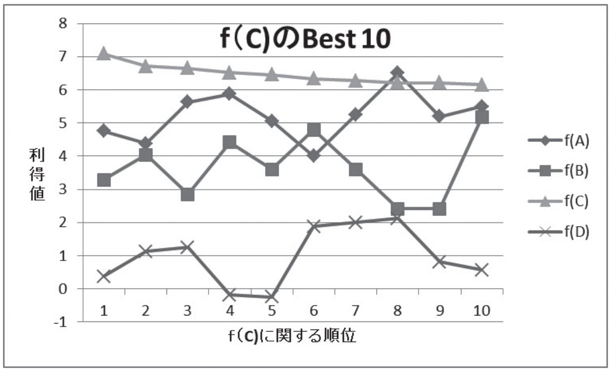

Figure 5-4　f(C)の値が高い上位10位

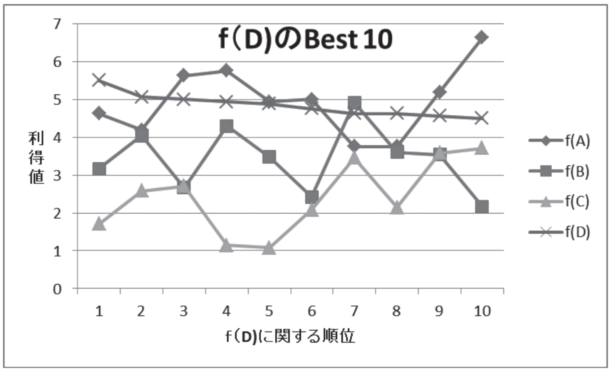

Figure 5-5　f(D)の値が高い上位10位

6．おわりに

4人協力ゲームにおいて，各プレーヤが自分の利得を高くするためには，自分と関係する人との関係を良くして，自分以外の人間関係を悪くするような戦略がもっと良いことが分かった．そのすべての戦略が取れないときは，一番利得の高い人にだけ注目して，その人との関係を良くして，その人が他の人との関係をできる限り悪くすることが，自分の利得を高くする戦略である．

v(A) = 5, v(B) = 4, v(C) = 3, v(D) = 2におけるシミュレーションで，当然ながらプレーヤAが有意であることは明確であるが，それぞれの戦略によっては，各プレーヤが1位になることもできる．プレーヤDが1位になれる戦略は2通り，プレーヤCに関しては30通り，プレーヤBに関しては177通り存在する．729通りの残りの520通りの戦略は，プレーヤAが1位となる．

個人的な戦略について記述したが，全体の利益を最大にする戦略は，当然ながら$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$=(g,g,g,g,g,g)のときで，その全体の利得は21である．逆に，全体の利得を最小にする戦略は，$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$=(w,w,w,w,w,w)のときであり，その全体の利得は10.5であり，最大のほぼ半分程度にまで下がることになる．

たとえば，合計利得が17.875となる戦略は，10種類あり，それぞれ個人の利得は異なる．

(A,B)	(A,C)	(A,D)	(B,C)	(C,D)	(B,D)	f(A)	f(B)	f(C)	f(D)	合計
G	G	G	W	N	N	9.5625	3.97917	2.33333	2	17.875
G	G	N	N	N	N	8.25	5.29167	3.64583	0.6875	17.875
G	G	W	G	N	N	6.9375	6.60417	4.95833	-0.625	17.875
G	N	G	G	N	W	8.0625	5.47917	3.45833	0.875	17.875
G	N	G	N	W	G	8.0625	6.41667	1.20833	2.1875	17.875
G	N	N	G	W	G	6.75	7.72917	2.52083	0.875	17.875
N	G	G	G	W	N	7.875	4.91667	4.02083	1.0625	17.875
N	W	G	G	G	G	4.875	6.04167	2.89583	4.0625	17.875
W	G	G	N	G	G	6.1875	3.04167	4.58333	4.0625	17.875
W	G	N	G	G	G	4.875	4.35417	5.89583	2.75	17.875

最も条件が低いプレーヤDについて注目したとき，Dは単独での利得の2を超えるためには，この中では5つの戦略が残されている．このように，ベストな戦略は難しいとしても，ある程度妥協できる中での戦略を探すことが可能であることがわかる．

今回，4人における協力ゲームの分析を行ったが，5人以上となると，シミュレーションは可能であるがすべての場合を見ることが物理的に困難となる．すなわち，ある特殊な戦略に限った分析に限定する必要がある．これらを含めて，今後検討する必要がある．

参考文献

[1] J.V.Neumann and O.Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton Univ. Press, 1944.
[2] L.S.Shapley, "A value for n－person games", in Contributions to the Theory of games Ⅱ,pp.307－312, Annals of Mathematics Studies Vol.28, Princeton Univ. Press, 1953.
[3] L.S.Shapley, "Cores of convex games", International Journal of Game Theory 1, pp11－26, 1971.
[4] Yasuo Adachi and Naoya Uematsu, "Some Coalitional Games with the Shapley Value", Scientiae Mathematica Japonica to be published in 2014.
[5] 岡田章『ゲーム理論』，有斐閣出版，2011年.
[6] 武藤滋夫『ゲーム理論』，オーム出版，2011年.
[7] 中山幹夫『協力ゲームの基礎と応用』，勁草書房，2012年.
[8]「2012年ノーベル経済学賞ロイド・シャプレー」，経済セミナー，日本評論社，February/March 2013.

[Appendix Ⅰ]

```
Sub comb()
Dim gnw(3) As Variant
Dim result(1000) As Variant
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim l As Integer
Dim m As Integer
Dim n As Integer
Dim x As Integer
x = 1
gnw(1) = "G"
gnw(2) = "N"
gnw(3) = "W"
For i = 1 To 3
    For j = 1 To 3
        For k = 1 To 3
            For l = 1 To 3
                For m = 1 To 3
                    For n = 1 To 3
          result(x) = gnw(i) & gnw(j) & gnw(k) & gnw(l) & gnw(m) & gnw(n)
          Cells(x, 1).Value = result(x)
                        x = x + 1
                    Next n
                Next m
            Next l
        Next k
    Next j
Next i
End Sub
```

［ Appendix Ⅱ］

```
Function Shapley4(A, B, C, D, P, Q, R, S, T, U, X)
'PはAとBの関係
'QはAとCの関係
'RはAとDの関係
'SはBとCの関係
'TはCとDの関係
'UはBとDの関係
'Xは3人の中で誰のシャープレー値を求めるかの引数
     If P = "G" Then
         vab = (A + B) * 2
     ElseIf P = "N" Then
         vab = (A + B) * 1.5
     Else
         vab = A + B
     End If

           If Q = "G" Then
             vac = (A + C) * 2
           ElseIf Q = "N" Then
             vac = (A + C) * 1.5
           Else
             vac = A + C
           End If

                If R = "G" Then
                    vad = (A + D) * 2
                ElseIf R = "N" Then
                    vad = (A + D) * 1.5
                Else
                    vad = A + D
                End If

      If S = "G" Then
          vbc = (C + B) * 2
      ElseIf R = "N" Then
          vbc = (C + B) * 1.5
      Else
          vbc = C + B
      End If

            If T = "G" Then
                vcd = (C + D) * 2
            ElseIf T = "N" Then
                vcd = (C + D) * 1.5
            Else
                vcd = C + D
            End If
```

```
            If U = "G" Then
                vbd = (D + B) * 2
              ElseIf U = "N" Then
                vbd = (D + B) * 1.5
              Else
                vbd = D + B
              End If

    If X = "A" Then
  Shapley4 = (6 * A - 2 * (B + C + D) + 6 * (vab + vac + vad) - 3 * (vbc + vcd + vbd)) / 24
    ElseIf X = "B" Then
  Shapley4 = (6 * B - 2 * (A + C + D) + 6 * (vab + vbc + vbd) - 3 * (vac + vcd + vad)) / 24
    ElseIf X = "C" Then
  Shapley4 = (6 * C - 2 * (B + A + D) + 6 * (vbc + vac + vcd) - 3 * (vab + vad + vbd)) / 24
    Else
  Shapley4 = (6 * D - 2 * (A + B + C) + 6 * (vbd + vad + vcd) - 3 * (vab + vac + vbc)) / 24
    End If
End Function
```