Mathematikkompetenz beim Lösen von Physikaufgaben

Evaluierung und Elaboration eines Kompetenzmodells der Mathematik für die Physik der Sekundarstufe II

Stephanie Trump*, Andreas Borowski

*Sommerfeldstr. 14, 52074 Aachen, Sommerfeldstr. 14, 52074 Aachen
trump@physik.rwth-aachen.de, borowski@physik.rwth-aachen.de

Kurzfassung

Mathematik wird häufig als die Sprache der Physik bzw. der Natur bezeichnet. Feynman [1] ging sogar so weit, dass die Mathematik die einzige Sprache für die Physik sei und wer etwas über die Physik lernen möchte, müsse sich der Mathematik bedienen.

Dies spiegeln auch die Einheitlichen Prüfungsordnungen für das Abitur in Physik, in denen ein erhöhter Grad an Mathematisierung verlangt wird, wieder. Oft müssen Lehrpersonen jedoch feststellen, dass das mathematische Vokabular der Schülerinnen und Schüler entweder nur schwerfällig bei Physikaufgaben angewendet wird oder, es im Mathematikunterricht noch nicht speziell thematisiert wurde. Auch die aus der Sicht der Physik notwendige Mathematikkompetenz, die nach Weinert [2] neben dem Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten auch motivational, soziale und volitionale Bereitschaften umfasst, scheint durch die Mathematik nur eingeschränkt vermittelt zu werden und bereitet daher scheinbar unüberwindbare Probleme im Fach Physik. Hieraus ergeben sich die Fragen, welche mathematischen Vokabeln bzw. Inhalte sowie welche mathematischen Kompetenzen für den Physikunterricht in der Sekundarstufe II notwendig sind? Aufbauend auf dem mathematischen Modellierungskreislaufs und dem Grundvorstellungskonzepts nach vom Hofe wird ein Modell mathematischer Kompetenz in der Physik diskutiert und ein Design zur Evaluation vorgestellt.

1. Die Bedeutung der Mathematik für die Physik

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“ (Galilei, 1623).

Die Bedeutung der Mathematik für die Physik wird in verschiedenster Literatur der Physik- aber auch Mathematikdidaktik als essenziell beschrieben ([3]; [4], [5]). Das Verständnis von speziellen mathematischen Inhalten ist dabei unabdinglich für das Verständnis der Physik ([1], [6]; [7]) und der Mathematik wird die Rolle einer Sprache zugeschrieben ([8]; [9], [4]). Von Bedeutung ist die Mathematik besonders beim Prozess der Mathematisierung. Hierbei handelt es sich um eine Tätigkeit, „bei der Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt verstanden wird“ (ebd.). Sie stellt einen wesentlichen Teil der physikalischen Methodik und Erkenntnisgewinnung dar ([10], [3]) und ist in der Lage physikalische Prozesse zu modellieren, um den Ausgang von Experimenten oder Phänomene zu prognostizieren ([11], [12], [4]). Mathematik wird also als Modellierungswerkzeug eingesetzt, welches sowohl physikalische Phänomene vorhersagen, als auch physikalische Zusammenhänge, z. B. in Form von Funktionen, beschreiben kann (ebd.).

Aber in wie fern ist Mathematik eine Sprache?

„Wir werfen über die Erfahrungen ein Netz der Begriffe und suchen sie darin zu fangen“ (Frey, 1967).

Für eine Sprache bedarf es Vokabeln, die im mathematischen Zusammenhang die mathematischen Begriffe darstellen. Sie sind das Werkzeug für ein mathematisches Handeln. Darunter fallen z. B. die Begriffe Zahl, Variable, Funktion, Gleichung, Vektor usw. Diese Begriffe müssen erlernt werden und für ein mathematisches Verständnis (Semantik) in Vorstellungen eingebunden sein ([13]).

Empirische Studien ([14], [15], [16]) zeigen aber, dass es Schülerinnen und Schülern an mathematischem Grundwissen bzw. Grundverständnis in Bezug auf einfache Sachverhalte und Fähig- sowie Fertigkeiten im Umgang mit Mathematik fehlt (vgl. [17]). Ihnen fällt es schwer Mathematik auf reale physikalische Probleme zu übertragen (ebd., [18], [7], [19]) und die Übersetzung von der Physik in die Mathematik sowie andersherum zu bewältigen ([7]). Das Grundwissen bezeichnet dabei die mathematischen Kenntnisse in verschiedenen mathematischen Gebieten und schließt „Grundfertigkeiten“ und „Grundfähigkeiten“, aber auch grundlegende Haltungen und Werte (im Sinne der mathematical literacy) mit ein ([20]). „Grundfertigkeiten“ und „Grundfähigkeiten“ beschreiben den (praktischen) Umgang mit mathematischen Inhalten und Begriffen und äußern sich in bestimmten Tätigkeiten, die als Ausprägung dieser angesehen werden ([21]). Darunter fällt z. B. das Modellieren in einer außermathematischen Situation, sowie das kalkühlhafte „Abspulen“ eines Algorithmus oder das mathematische Argumentieren ([22]).

2. Entwicklung eines Kompetenzmodells der Mathematik für die Physik (Sek II)

Da die Mathematik ein wesentliches Werkzeug (wenn nicht sogar das wesentlichste) im Umgang mit der Physik darstellt ([4], [6], [11], [12]) muss die Funktion der Mathematik in der Physik - besonders der Sekundarstufe II - angemessen berücksichtigt werden ([23]). Daher ist ein flexibler Umgang, im Sinne von *mathematical literacy* ([24], [25]) auch schon im Mathematikunterricht anzustreben - indem fächerübergreifend gearbeitet wird, um für die Physik notwendige mathematische Kompetenzen auszubilden. Der Schwerpunkt von Mathematik sollte deshalb „[…] auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise […]“ ([24], S.2) liegen und nicht bloß auf Kenntnisse und Fähigkeiten wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden. Um eine gezielte Diagnose von mathematischen Kompetenzen im Fach Physik vornehmen und um Hinweise für die Gestaltung von Unterrichtsmaterialien und Abituraufgaben geben zu können, bedarf es daher der Entwicklung und Evaluation von Kompetenzmodellen für die Physik, die die Mathematik berücksichtigen. Bisher wird diese in den Kompetenzmodellen der Sekundarstufe I nicht systematisch betrachtet (vgl. z. B. [26]) und für die Sekundarstufe II in einem - in der Entwicklung befindlichem - Modell ([27]) nur in Form von Aufgaben „mit Mathematik“ und „ohne Mathematik“ berücksichtigt. In Anlehnung an das Kompetenzmodell der Mathematik (u .a. [28]) soll daher ein dreidimensionales mathematisches Kompetenzmodell für die Physik konstruiert und empirisch geprüft werden. Dieses soll zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen eines anderen Projekts in ein Kompetenzmodell der Physik der Sekundarstufe II eingegliedert werden.

3. Physikalische Modellierung - Welche mathematischen Vokabeln und welche mathematischen Kompetenzen werden in der Schulphysik (Sek II) benötigt?

In Anlehnung an den Modellierungskreislauf der Mathematik (u. a. [29]) wurde in diesem Projekt ein Modellierungskreislauf der Physik zur Untersuchung von Physikaufgaben mit Mathematik der Oberstufe entwickelt (vgl. Abbildung 2). Dieser ermöglicht es die Frage nach den relevanten mathematischen Vokabeln bzw. Inhalten sowie mathematischen Kompetenzen durch Aufzeigen potentieller Hürden und Analyse der Teilschritte beim Aufgabenlösen systematisch zu untersuchen. Der wesentliche Unterschied zum Modellierungskreislauf der Mathematik liegt darin, dass eine 3. Welt - die *Physikalische Welt* - „zwischen“ die *Reale Welt* und die *Mathematische Welt* rückt (in Abbildung 2 als „Phänomen“, „Physik“ und „notwendige Mathematik“ bezeichnet). Dieses lässt sich damit begründen, dass nicht jede alltägliche Wahrnehmung einer fachwissenschaftlichen Interpretation unterzogen werden muss, woraus abgeleitet wird, dass beim Modellieren die *Reale Welt* fachwissenschaftlich - hier also physikalisch - interpretiert wird, um sie erst im Anschluss mathematisch zu modellieren (vgl. auch [30]). Der aus zwei Welten bestehende Modellierungskreislauf der Mathematik hingegen geht davon aus, dass eine Realsituation direkt in Bezug auf eine mathematische Fragestellung hin untersucht wird. Als Beispiel sei die Betrachtung eines vom Baum fallenden Apfels genannt (Abbildung 1). Dieses ruft nämlich nicht automatisch den physikalischen Gedanken „es wirkt eine Kraft auf den Apfel“ - geschweige denn die mathematische Gleichung F=m a hervor.

Abbildung 1: Betrachtung eines fallenden Apfels vom Baum

Weiter geht in den Modellierungskreislauf der Physik ein, dass die Mathematik - als die Sprache der Physik – ein Teil der physikalischen Welt ist. Dieses lässt sich in der vorliegenden Situation (notwendige Mathematik und Mathematikkompetenz) dadurch rechtfertigen, dass sich die Physik (hier im Speziellen die Schulphysik) nur eines Teils der „reinen“ Mathematik bedient sowie, dass die Mathematikkompetenz Teil der Physikkompetenz ist.

Damit läuft eine physikalische Modellierung (im Idealfall) wie folgt ab:

Die Realsituation wird zunächst aus dem Standpunkt der Physik analysiert (Entstehung eines Realmodells Physik) bevor es zu einer mathematischen Betrachtung und damit zu einer Mathematisierung kommt (Entstehung eines Realmodells Mathematik). Das Realmodell Mathematik kann dabei als ein Teil des Realmodells Physik ausgezeichnet werden ([31], [32]).

Dieses gilt es vor dem mathematischen Arbeiten weiter zu strukturieren (Mathematisches Modell). Das mathematische Ergebnis muss letztendlich in Bezug auf die Mathematik, die Physik und die Realität interpretiert werden. Der vollständige Prozess fordert insbesondere also mathematische *und* physikalische Kompetenz sowohl im Wechsel als auch parallel.

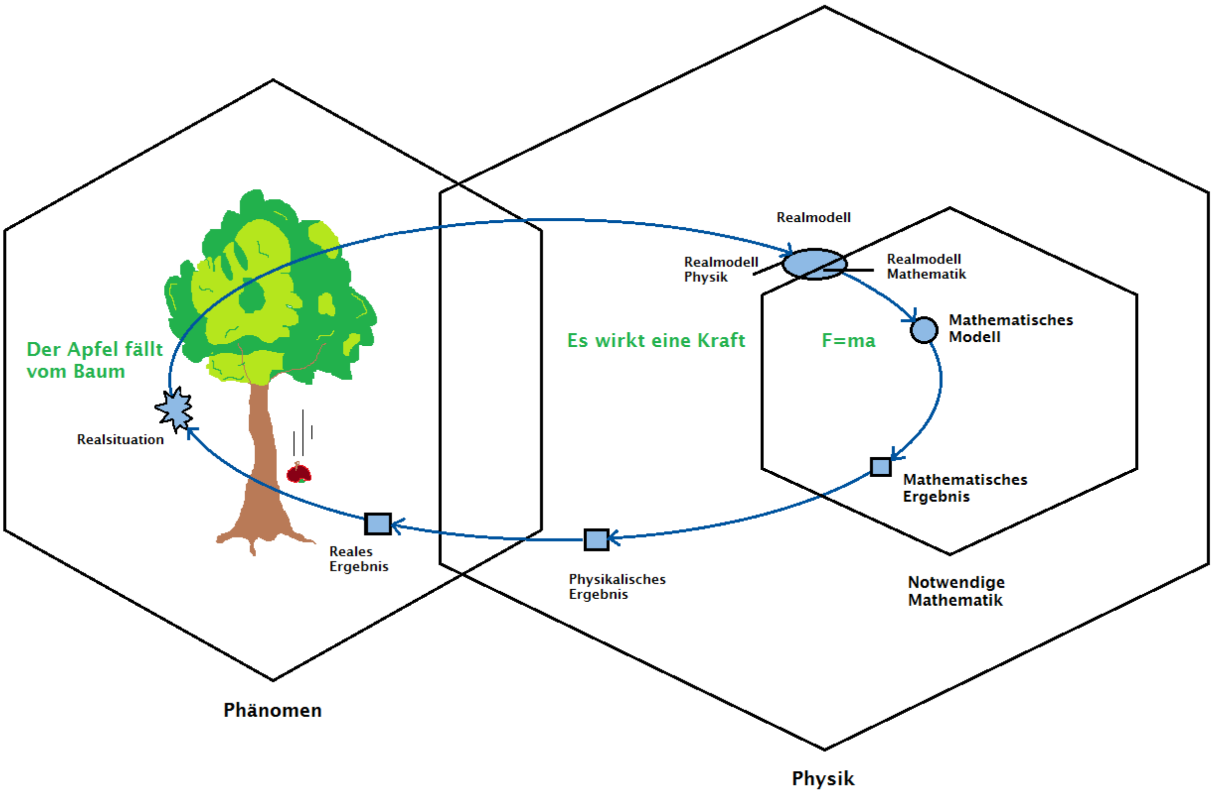


Abbildung 2: Der Modellierungskreislauf der Physik (adaptiert nach [29])

Der dargestellte Kreislauf kann also durch seine Kleinschrittigkeit potenzielle Hürden beim Lösen einer Physikaufgabe mit Mathematik aufzeigen. Für dieses Projekt stehen dabei besonders folgende Fragen im Fokus:

1. Welches domänenspezifische mathematische Wissen muss für die Bewerkstelligung der Teilschritte vorliegen?
2. Welche Übersetzungsscharniere sind notwendig, um dieses Wissen erfolgreich anwenden zu können?
3. Welche mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten sind notwendig?

Die Fragen 1 und 3 lassen sich nach der Definition des Grundwissens (siehe Ende Abschnitt 1) zusammenfassen zu:

Welches mathematische Grundwissen muss im Schulfach Physik (domänenspezifisch) vorliegen?

Es ist zusammenfassend festzuhalten:

Das physikalische Wissen und die physikalische Kompetenz darüber, welche physikalischen Aspekte die Realsituation beschreiben und welche mathematischen Aspekte zur Beschreibung notwendig sind, um sie mathematisch zu modellieren, sind von enormer Bedeutung. Übersetzungsscharniere, Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie das Vorwissen - sowohl das mathematisch als auch das physikalisch - spielen eine große Rolle.
Der mathematische Aspekt steht in dieser Studie im Fokus.

4. Grundvorstellungen als Übersetzungsscharnier zwischen der physikalischen und mathematischen Welt

Mathematische Modellierfähigkeit - als Teil der physikalischen Modellierfähigkeit (siehe Abbildung 2) - beschreibt den gesamten Prozess des Verknüpfens der physikalischen Problemsituation mit dem mathematischen Modell durch kognitive Aktivitäten. Es findet demnach eine Verknüpfung oder genauer eine *Übersetzung* von „Physik in die Mathematik" bzw. von „Mathematik in die Physik" statt. Für diese Verknüpfung ist Wissen darüber notwendig, welche Mathematik (Definitionen, Fakten, Verfahren, Techniken,…) bzw. welche mathematischen Konzepte auf die Problemsituation passen ([33]).
Das Konzept der Grundvorstellungen (GV) von vom Hofe ([13]) greift diese Aspekte auf:

Um ein mathematisches Konzept zur Mathematisierung nutzen zu können, muss man die lokale Bedeutung des Konzepts aktivieren können, die zu der Struktur der Situation passt. Diese lokale Bedeutung wird als Grundvorstellung […] bezeichnet ([4], S.12).

Abbildung 3 zeigt, wo sich die Grundvorstellungen (GV) im Modellierungskreislauf der Physik verorten lassen. Sie sind hier sowohl an den Übergängen „Realmodell-Mathematisches Modell", „Mathematisches Ergebnis-Physikalisches Ergebnis" sowie bei der innermathematischen Betrachtung „Mathematisches Modell-Mathematisches Ergebnis" von Bedeutung.

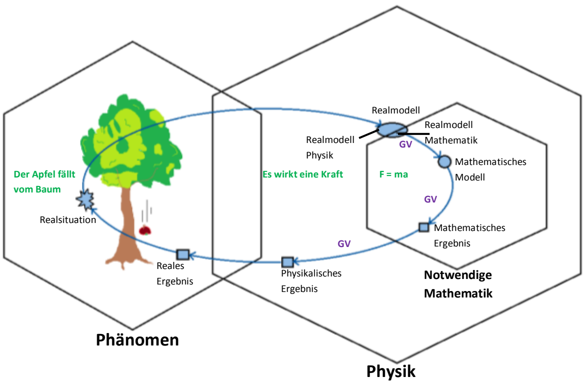
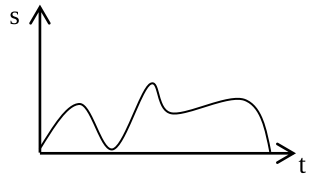


Abbildung 3: Grundvorstellungen (GV) als Übersetzungsscharniere zwischen Physik und Mathematik (adaptiert nach [29])

Zur Veranschaulichung der eben genannten Definition von GV kann das Beispiel in Abbildung 4 dienen. Das Beispiel zeigt eine Aufgabe zum Thema Bewegungen, bei der aus einem gegebenem Graphen ein neuer erstellt und beschrieben (Aufgabenteil a)) sowie für eine weitere Interpretation von Extremstellen (Aufgabenteil b)) genutzt werden soll.

Beispiel
a)
Erstelle mittels des gegebenen s-t-Diagramms eines Autofahrers ein möglichst realistisches v-t-Diagramm und beschreibe!
b)
Welche Beschleunigung liegt an den Extremstellen vor?



Lösung durch:
a)
Aktivierung der (geometrischen) GV „Ableitung als Steigung des Graphen in einem Punkt".
b)
Aktivierung der GV „Ableitung als lokale / momentane Änderungsrate".

Abbildung 4: Beispiel einer Physikaufgabe zur Veranschaulichung der Definition von GV

Speziell in Aufgabenteil a) muss zur Lösung der Aufgabe das mathematische (jedoch physikalisch eingefärbte) Wissen über den Zusammenhang von s und v vorliegen (v als zeitliche Ableitung der zurückgelegten Strecke). Hierbei handelt es sich um die (geometrische) GV „Ableitung als Steigung des Graphen in einem Punkt". Vorab bedarf es jedoch dem physikalischen Verständnis von s-t- und v-t-Diagrammen. Zur Lösung der Aufgabe muss somit der Verlauf der Steigung des neuen Graphen mittels der Steigung des gegeben Graphen durch Aktivierung der genannten GV konstruiert und physikalisch interpretiert werden (beides fordert zudem ein Umgang mit mathematischen Darstellungen). Für den Aufgabenteil b) (Beschleunigung an den Extremstellen?) muss das physikalische Wissen über den Zusammenhang von a und v vorliegen, sowie das mathematische Verständnis vom Extremwert. Zur Lösung der Aufgabe muss dabei die GV "Ableitung als lokale / momentane Änderungsrate" herangezogen sowie der Zusammenhang mit der Physik hergestellt werden (Änderungsrate = 0 = a).
Dieses Aufgabenbeispiel zeigt auf, dass der physikalische Zusammenhang jeweils auf eine mathematisch Struktur zurückgeführt wird, die physikalisch „eingefärbt" ist. Dabei muss besonders betont werden, dass für das Verstehen und Interpretieren im Sachkontext Physik physikalische Kompetenz vorliegen muss!
Die Besonderheit von GV liegt darin, dass sie den Kern des mathematischen Inhalts erfassen ([34]; [35]) und somit „losgelöst vom konkreten Kontext und daher übertragbar auf strukturell gleiche andere Kontexte (…)" ([4], S.12) sind. Sie ermöglichen es

somit mathematische Begriffe oder Verfahren auf Problemsituationen zu übertragen bzw. Situationen mit (für diese relevanten) mathematischen Begriffen oder Verfahren zu verknüpfen ([4], [13], [36]). GV sind demnach die Vermittler zwischen Realität, Mathematik und dem Individuum bzw. - speziell im vorliegenden Fall - zwischen Physik, Mathematik und Individuum. Es handelt sich insbesondere nicht nur um bildliche Vorstellungen, sondern auch um Tätigkeiten, Anwendungsmöglichkeiten und andere Arten des Wissens ([17]). Sie sind zudem keine starren kognitiven Strukturen zu einem Inhalt, sondern unterliegen stets Veränderungen, Erweiterungen oder Neubildungen, sodass ein immer größer werdendes Netzwerk mentaler mathematischer Modelle entsteht, die physikalisch eingefärbt sein können (siehe Beispiel). „Die Ausbildung dieser GV und ihre gegenseitige Vernetzung wird auch Grundverständnis des Begriffs genannt“ ([34], S.6). „Frühzeitig im Bearbeitungsablauf aufgerufene GV würden zu einem Lösungsprozess führen, der *concept driven* abliefe im Gegensatz zu *data driven*“ ([37], S. 111).
Die mathematische Modellierfähigkeit wird dadurch gekennzeichnet, dass angeeignete mathematische Inhalte unabhängig von den individuellen Erfahrungen und Vorstellungen auch auf neue Sachsituationen bzw. neue Problemsituationen angewendet werden, „(…) d.h. dass es mit entsprechend flexibel zu handhabenden GV möglich ist, in neuen Anwendungssituationen durch visuelle Handlungsbilder bekannte Strukturen zu erkennen und zu entdecken und diese zur Lösung mathematischer und physikalischer Frage- und Problemstellungen heranzuziehen“ (vgl. [38]). Dieses lässt sich damit für die Physik adaptieren.

Damit ist zusammenfassend festzuhalten:

GV sind, vereinfacht ausgedrückt, besonders wichtige Vorstellungen, „(…) die mit einem bestimmten (mathematischen) Inhalt, insbesondere einem bestimmten (mathematischen) Begriff verbunden werden sollen“ ([17], S.69), um so wesentliche Aspekte aus dem täglichen Leben (z. B. Prozentrechnung, Geschwindigkeit als Änderungsrate) besser zu verstehen.
In dem physikalischen Modellierungskreislauf liefert das Konzept der GV ein Übersetzungsscharnier zwischen physikalischer Kompetenz und mathematischem Werkzeug.

5. Grundvorstellungen (GV) als schwierigkeitsaufklärendes Konzept auch in Physik?

Um explizit ein mathematisches Konzept (Rechengesetze, Begriffe, Verfahren...) zum Lösen einer Mathematikaufgabe verwenden zu können, bedarf es GV ([34]). Eine Studie von Blum und vom Hofe ([35]), konnte im Rahmen einer Analyse von PISA-Mathematikaufgaben nachweisen, dass GV, hierarchisch angeordnet, als aufgabenanalytisches und diagnostisches Konstrukt dienen können und Aussagen über die Schwierigkeit einer Mathematikaufgabe ermöglichen ([35], [39]). Sie stellen also einen guten Prädiktor zur Aufklärung der Mathematikaufgabenschwierigkeit dar. Dies gilt es im Rahmen von Physikaufgaben mit Mathematik zu überprüfen.
Es wurden drei Arten von GV unterschieden, deren jeweilige kognitive Anforderungen unterschiedlicher Qualität und Intensität sind ([35]):

1. Elementare Grundvorstellungen (GV)
2. Erweiterte Grundvorstellungen (GV)
3. Komplexe Grundvorstellungen (GV)

Elementare GV sind alltagsnahe Vorstellungen, die mit gegenständlichen Handlungserfahrungen bzw. Handlungsvorstellungen aus der Alltagswelt (z. B. aus Kindergarten, Schule…) verankert sind. Das Schema „Eingabe-Handlung-Ausgabe“ mit Blick auf einzelne Objekte ist hier typisch. Als Beispiel sind zum einen die arithmetischen Grundoperationen oder aber auch die Vorstellungen vom Variablenbegriff als Gegenstand sowie die diskrete Zuordnungsvorstellung vom Funktionsbegriff zu nennen (vgl. [35]).
Diese elementaren GV werden im Laufe des Lernprozesses durch erweiterte GV, die auf Anschauungs- und Darstellungsmitteln (z. B. aus dem Unterricht) basieren, ergänzt. Hier können zudem zwei Arten von erweiterten GV unterschieden werden: Zum einen GV, die bereits von realen Handlungen abgelöst sind und sich nicht nur auf einzelne Objekte, sondern auf ganze Bereiche beziehen. Hier ist als Beispiel die Einsetzungs-Vorstellung vom Variablenbegriff oder die Kovariations-Vorstellung (Änderung von f(x), wenn sich x ändert) beim Funktionsbegriff zu nennen. Zum anderen GV, bei denen handlungsnahe elementare GV nichttrivial kombiniert werden. Die Mittelwertvorstellung sei hier als Beispiel zu nennen (ebd.).
Komplexe Vorstellungen liegen dann vor, wenn erweiterte GV in nichttrivialer Weise kombiniert werde. Dazu zählt u. a. der Ableitungsbegriff, der aus Änderungsrate und Grenzwertbegriff gebildet wird. (vgl. [35]). Hiermit lassen sich nun Aufgaben „(…) nach dem Ausmaß der kognitiven Anforderungen, die normativ zugrunde gelegt werden, hierarchisch klassifizieren“ ([40], S.2). Klassifiziert wird dabei nach der Intensität der GV, wobei drei Arten unterschieden werden [35].
Auf dieser Grundlage wurde eine Variable „Grundvorstellungsintensität“ definiert, die messen soll, wie viele und welche GV zur Lösung einer vorgegebenen Aufgabe aktiviert werden müssen. Es kann also eine Aufgabenkategorisierung vorgenommen werden. Es werden vier Ausprägungen dieser Variablen unterschieden (vgl. [35]):

Niveau 0:
Für das Lösen der Aufgabe werden keine Vorstellungen benötigt, da die Aufgabe rein technischer Natur ist.

Niveau 1:
Für das Lösen der Aufgabe ist eine elementare Vorstellung nötig oder eine einfache Kombination von elementaren „verwandten“ Grundvorstellungen (+ mit -). Dieses kann auch repetitiv geschehen.
(Bsp. Grundaufgabe der Prozentrechnung)

Niveau 2:
Für das Lösen der Aufgabe ist eine erweiterte Grundvorstellung oder eine Kombination zweier verschiedener (nicht verwandter) elementarer Vorstellungen notwendig. Auch eine triviale Kombination und Repetition von einer erweiterten GV

Niveau 3:
Es ist eine komplexe GV nötig, oder eine Kombination von nicht verwandten elementaren sowie erweiterten GV.

6. Das Kompetenzmodell der Mathematik für die Physik (Sek II)

Basierend auf den vorherigen Überlegungen und Fragen

1. Welche mathematischen Inhalte werden zum Lösen von Physikaufgaben benötigt?
2. Welche mathematischen Kompetenzen (Grundfähig- und -fertigkeiten) und welche Grundvorstellungen werden zum Lösen von Physikaufgaben benötigt?
3. Sind Grundvorstellungen schwierigkeitserzeugend?

wurde in Anlehnung an das dreidimensionale Kompetenzmodell der Mathematik ([28]) ein Kompetenzmodell der Mathematik für die Physik entwickelt (vgl. Abb. 5).

Ziel ist es die mathematischen Inhalte, im Gegensatz zum mathematischen Modell (hier wird nur von Leitideen bzw. Blickwinkeln gesprochen), genau zu benennen sowie die in der Physik erforderlichen mathematischen Kompetenzen neu zu definieren. Die mathematischen Kompetenzen bezeichnen dabei hier im Speziellen die mathematischen Grundfähigkeiten und -fertigkeiten, die sich wiederum in bestimmten Tätigkeiten äußern (siehe Ende Abschnitt 1). In Anlehnung an die Bildungsstandards ([41]), werden unter diesen „mathematischen Tätigkeiten“ Prozesse verstanden, die unter die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Argumentieren; Probleme mathematisch lösen; Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen; Mathematische Darstellungen verwenden; Modellieren; Kommunizieren) gefasst werden können. Für die Physik sind diese jedoch neu zu definieren, denn die mathematische Kompetenz wird als ein Teil der physikalischen angesehen (siehe auch Abbildung 2). Dieses hat zur Folge, dass unter anderem die Kompetenzen „Kommunizieren“ und „Argumentieren“ nicht gesondert aufgeführt werden müssten.

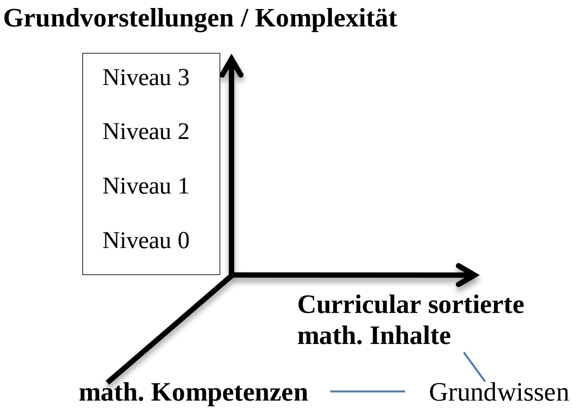


Abbildung 5: Kompetenzmodell der Mathematik für die Physik

Insgesamt wird davon ausgegangen, dass nur einige mathematische Inhalte sowie Fähigkeiten und Fertigkeiten bzw. mathematische Kompetenzen (zusammen als Grundwissen bezeichnet), die im Mathematikunterricht vermittelt werden (sollen) in der Physik notwendig sind. Selbiges gilt für die damit einhergehenden GV - Abbildung 6 soll dieses veranschaulichen. Weiter wird vermutet, dass zusätzliche Inhalte, die nicht im Mathematikunterricht vermittelt werden (z. B. Lösen von DGL) notwendig sind.

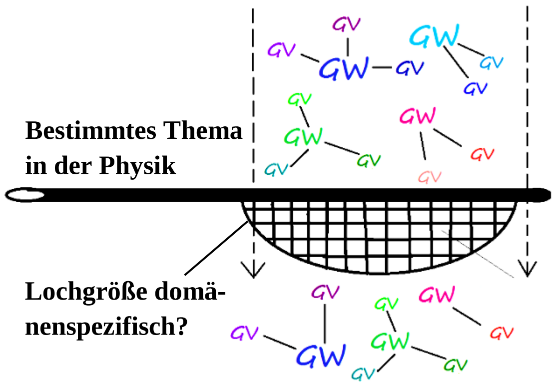


Abbildung 6: Die Siebfunktion der Physik

7. Aufgabenanalyse zur Ausdifferenzierung der Achsen des Kompetenzmodells der Mathematik für die Physik (Sek II)

Mittels eines entwickelten Aufgabenmanuals werden in einem ersten Schritt, die in der Physik notwendigen mathematischen Inhalte domänenspezifisch benannt. Hierfür werden die fünf repräsentativsten Physikbücher der Sekundarstufe II herangezogen.

Darauf aufbauend erfolgt die Bestimmung der mit den Inhalten verknüpften GV sowie die in der Physik notwendigen mathematischen Grundfähigkeiten und -fertigkeiten (Dimension „Grundvorstellung / Komplexität“ und „mathematische Kompetenzen“, vgl. Abbildung 5).
In einem dritten Schritt wird anhand der empirischen Lösungshäufigkeit von Abiturteilaufgaben überprüft, ob die Dimensionen Grundvorstellungen / Komplexität sowie curricular geordnete mathematische Inhalte schwierigkeitserzeugend sind.

8. Ausblick

Das in der Entwicklung befindliche Kompetenzmodell der Mathematik für die Physik hat zum Ziel Lehrpersonen der Schule und Hochschule sowie Schulbuchverlagen von Nutzen zu sein. So soll es zum einen dazu beitragen Lehrpersonen der Physik im Vorfeld aufzuzeigen, welches mathematische Grundwissen domänenspezifisch notwendig ist. Lehrpersonen der Mathematik kann gezeigt werden, wo sie verstärkt fächerübergreifend und kontextorientiert arbeiten können. Dies kann dazu führen, dass die in der Physik notwendigen mathematischen Kompetenzen geschult in die Physik übertragen werden können. Zum anderen soll das Kompetenzmodell Hochschullehrern der Physik Informationen darüber geben, welche mathematischen Kompetenzen in Physik bei den Abiturienten vorliegen.

9. Literatur

[1] **Weinert, F.**. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. Weinert (Hrsg.), Leistungsmessungen in Schulen (S. 17-31). Weinheim: Beltz Verlag.

[2] **Feynman, R. P. (1993):** Vom Wesen physikalischer Gesetze. München: Piper, S.60-76.

[3] **Krey, U. & Mikelskis H. F. (2009):** Zur Rolle der Mathematik in der Physik. In D. Höttecke (Ed.), Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Dresden 2009. Münster: Lit Verlag.

[4] **Prediger, S. (2009):** „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittler Beschreibung von Welt. In D. Höttecke, Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Dresden 2009 (S. 6 - 20). Berlin: Lit.

[5] **Pospiech, G. (2009):** Die Rolle der Mathematik im Physikunterricht der Sekundarstufe I. In D. Höttecke, Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Schwäbisch Gmünd 2008 (S. 164 - 166). Münster: Lit.

[6] **Pospiech, G. (2008):** Matheamatical Constructs in the Physical Reality. In: Sriraman, Michelsen, Beckmann, Freiman (Eds.): Proseedings of the 2nd International Symposium on Mathematics and its Connections to Arts and Sciences (MACAS2). Centre for Science and Mathematics Education, University of Southern Denmark.

[7] **Pospiech, G. (2010):** Designing a curriculum for developing the competence of mathematical modelling in secondary school. In: Physics Curriculum Design, Development and Proceedings of the GIREP 08 Conference.

[8] **Galilei, G. (1623):** II Saggiatore. Edition Nazionale, Bd. 6, Florenz 1896, S. 232.

[9] **American Association for the Advancement of Science [AAAS] (2009):** The Nature of Mathematics. New York: Oxford University Press.

[10] **Pospiech, G. (2006):** Argumentieren und Mathematisieren – im Gleichschritt?. In D. Höttecke (Ed.), Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Bern 2006. Münster: Lit Verlag**.**

[11] **Angell, C., Kind, P.M., Henriksen, E.K. & Guttersrud, Øystein, G. (2008):** An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. *Physics Education 43 (3),* 256-264.

[12] **Greca, I. M. & Moreira, M. A. (2002):** Mental, Physical, and Mathematical Models in the Teaching and Learning of Physics, Science Education 85(6), S.106-121.

[13] **Hofe, R. vom (1995):** Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

[14] **TIMSS III (1995):** http://www.timss.mpg.de/Nationale_Befunde/Ergebnisse_zu_den_Fachleistungen.htm#Faehigkeitsniveaus_im_Mathematik-_und_Physikunterricht (Stand 26.05.2012).

[15] **PISA (2010):** http://www.oecd.org/document/7/0,3746,en_21571361_44315115_46635719_1_1_1_1,00.html , (Stand 5/2012).

[16] **Erickson T. (2006):** Stealing from physics: modeling with mathematical functions in data-rich-contexts [Electronic version]. Teaching Mathematics and its Applications, 25, S. 23-32.

[17] **Malle, G. (o.J.):** Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentailquotienten. (PDF unter: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1999%20Band%2030/Malle1999.pdf (Stand 5/2012)).

[18] **Aufschnaiter, C. von, Sträßer, R. (2010):** Vom Bildungskanon zu den Bildungsstandards.

Assoziationen eines Mathematikdidaktikers mit Zwischenbemerkungen einer Physikdidaktikerin. In: Buschkühle, Carl-Peter; Duncker, Ludwig; Oswalt, Vadim (Hrsg.): Bildung zwischen Standardisierung und Heterogenität – ein interdisziplinärer Diskurs. VS Verlag für Sozialwissenschaften/GWV Fachverlage, Wiesbaden, S. 35 - 51.

[19] **Horn, M. E., Wolfgang, J. (2011):** Geometrische Algebra in höheren Dimensionen (PDF unter http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/viewDownloadInterstitial/281/400 , (Stand 5/2012)).

[20] **ISB: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung:** http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNav=6&QNav=12&TNav=1&INav=0&Pub=748 Stand (9/2012)

[21] **Fischer, R, Malle, G. (1985):** Mensch und Mathematik. Mannheim: BI.

[22] **Lechner, J. (2001).** Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten. (PDF unter: http://www.acdca.ac.at/projekt3/a303grundwissen.pdf (Stand 5/2012)).

[23] **Schecker, H., Fischer, H., & Wiesner, H. (2004):** Physikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In H.-E. Tenorth (Hrsg.), Kerncurriculum Oberstufe II (S. 148-234). Weinheim: Beltz.

[24] **Baumert, J., Klieme E., Neubrand, M. et al., (1999):** Internationales und nationales Rahmenkonzept für die Erfassung von mathematischer Grundbildung in PISA.

[25] **Neubrand, M. (2001):** "Mathematical literacy"/ "Mathematische Grundbildung". Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test. In: ZfE, 6. Jahrg., Heft 3/2003, S. 338-356.

[26] **Kauertz, A., Fischer, H. E., Mayer, J., Sumfleth, E. & Walpuski, M. (2010):** Standardbezogene Kompetenzmodellierung in den Naturwissenschaften der Sekundarstufe I. Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften. 16,135-154.

[27] **Schoppmeier, F. Borowski, A., Fischer, H. (2011):** Entwicklung eines Kompetenzmodells der Sekundarstufe II. In: Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Oldenburg 2011. Berlin: Lit Verlag. S. 518-520.

[28] **Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., Köller, O. (2010):** Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelson Verlag Scriptor GmbH & Co.KG.

[29] **Blum, W. & Leiß D. (2005):** Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. Mathematik lehren, 128, 18-21**.**

[30] **Kreiter, B., Trump S., Borowski, A. (in Arbeit):** Entwicklung eines Analysekreislaufes für physikspezifische kognitive Anforderungen und Aktivitäten beim Lösen von Physikaufgaben in der Sekundarstufe II

[31] **Kircher, E. (2009):** Modellbegriff und Modellbildung in der Physikdidaktik. In: E. Kircher, R. Girwitz & P. Häußler (Hrsg.). Physikdidaktik – Theorie und Praxis. Heidelberg: Springer S. 735-762.

[32] **Mikelskis-Seifert, S., Fischler, H. (2003):** Die Bedeutung des Denkens in Modellen bei der Entwicklung von Teilchenvorstellungen – Stand der Forschung und Entwurf einer Unterrichtskonzeption. In: ZfdN, Jg. 9, S.75-88.

[33] **Hompage des Schulministeriums NRW:** http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/netzwerk-fachliche-unterrichtsentwicklung/mathematik/mathematik-home/netzwerk-g8-fachliche-unterrichtsentwicklung-mathematik-home.html (Stand 5/2012)

[34] **Hofe, R. vom. (2003):** Grundvorstellungen und Grundbildung. In: Mathematik lehren, Heft 118, S. 4-9.

[35] **Blum, W., Hofe, R. vom, Jordan, A. & Kleine, M. (2004):** Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In: Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland, S. 145-158. Wiesbaden, VS-Verlag.

[36] **Hofe, R. vom & Kleine, M. (2002):** „Grundvorstellungen" as a mental model for mathematical education. In: Unterrichten/Erziehen, Heft 3, S. 123-127.

[37] **Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004):** Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland (S. 145-158). Wiesbaden, VS-Verlag, S.109-138.

[38] **Barwanietz, T. (2005):** Die Förderung der Modellierungsfähigkeit im Mathematikunterricht der Grundschule.- (PDF unter http://epub.uni-regensburg.de/10365/ (Stand 26.05.2012)).

[39] **Harvey, E., Kleine, M., Jordan A. (2005):** With a focus on 'Grundvorstellungen' Part 2: 'Grundvorstellungen' as a theoretical and empirical criterion. ZDM 2005 Vol. 37 (3).

[40] **Kleine, M. (2004):** Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I. Franzbecker, Hildesheim 2004.

[41] **[KMK]. (2004): Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland** Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Physik. Neuwied: Luchterhand.