

Der Klang von Kirchenglocken:

Modellierungen, Abschätzungen und Experimente mit dem Smartphone

Patrik Vogt*, Lutz Kasper[†]

*Pädagogische Hochschule Freiburg, Abteilung Physik

[†]Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Abteilung Physik

patrik.vogt@ph-freiburg.de, lutz.kasper@ph-gmuend.de

Kurzfassung

Kirchenglocken gehören zu den ältesten Musikinstrumenten überhaupt, sind trotz zahlreicher Forschungsarbeiten noch immer nicht vollständig verstanden und drängen sich aus unterschiedlichsten Gründen als Lerngegenstand für den Physikunterricht geradezu auf: Zum einen, weil sie nahezu überall vorhanden sind und mit geringstem Aufwand (z. B. mit einem Smartphone) experimentell untersucht werden können. Zum anderen, da die quantitative Beschreibung ihres Schlagtons höchst komplex ist und zunächst wie ein aussichtsloses Unterfangen wirkt, letztlich jedoch mit elementaren mathematischen sowie physikalischen Fertigkeiten möglich ist. Insofern liefern Kirchenglocken ein hervorragendes Beispiel für eine didaktische Reduktion, wobei das Idealisieren, Modellieren und Experimentieren gleichermaßen gefördert wird. Im Artikel wird ein elementarer Zugang zur quantitativen Beschreibung von Glockenfrequenzen vorgestellt und dieser nach und nach zu komplexeren Modellen erweitert. Schließlich zeigen wir, wie allein auf Grundlage der gemessenen Glockenfrequenz der Glockenradius wie auch die Masse mit hoher Genauigkeit bestimmt werden können und dass dieser Ansatz zur Finite-Element-Methode höchst valide ist. Letztere stellt derzeit die einzige Möglichkeit dar, das Frequenzspektrum von Kirchenglocken auf Grundlage charakteristischer Glockenparameter vollständig korrekt zu beschreiben.

1. Einleitung

Kirchenglocken sind im Alltag fast überall anzutreffende und mit einem Smartphone einfach zu untersuchende Musikinstrumente. Ihre physikalische Hintergrundtheorie erweist sich als schwierig und eine zuverlässige Vorhersage ihrer Eigenfrequenzen ist ausgehend von den genauen Abmessungen nur mit der Methode finiter Elemente¹ [2] möglich (Abb. 1). Fragt man einen Glockengießer, mit welchen Beziehungen er die Rippe (halber Längsschnitt der Glocke, der die akustischen Eigenschaften vollständig bestimmt) für eine Glocke mit gewünschtem Frequenzspektrum berechnet – wir selbst haben ca. 15 Glockengießer kontaktiert –, so erhält man gewiss keine Auskunft: Die Kunst des Glockengießens beruht auf jahrhundertelanger Erfahrung und das Wissen über die Rippenkonstruktion wird ausschließlich an direkte Nachkommen weitergegeben. Sind diese nicht vorhanden, so nimmt der Glockengießer sein Wissen mit ins Grab, was aus naturwissenschaftlicher Sicht eine Tragödie darstellt. Diesen gut behüteten Geheimnissen wollen wir uns im Artikel nähern, wohlwissend, dass wir sie nicht vollstän-

dig enträtseln können. Vorgestellt werden einfache Experimente und Modellierungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads, mit einer – wie ein Vergleich mit einem Datensatz von fast 700 Glocken zeigt – für Schulzwecke ausreichenden Genauigkeit und erstaunlicher Übereinstimmung mit der Finite-Elemente-Methode. So ist es nun möglich, u. a. den Radius oder die Masse einer Kirchenglocke allein auf Grundlage einer Frequenzmessung abzuschätzen. Die experimentellen Untersuchungen gliedern sich in das Projekt „Physics²Go!“ ein, in dem wir Smartphones und Tabletcomputer für quantitative Analysen im Alltag nutzen.

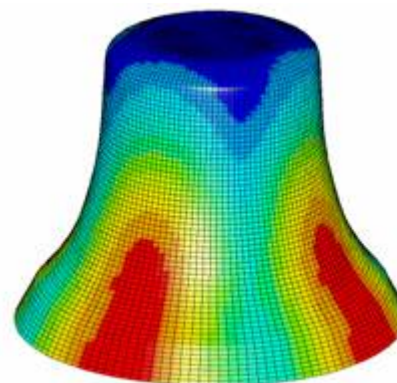


Abb. 1: Nutzung der Finite-Elemente-Methode zur Modellierung des Frequenzspektrums von Kirchenglocken [1]

¹ Die Finite-Element-Methode stellt ein numerisches Verfahren dar, bei dem der zu beschreibende Körper (hier die Glocke) in eine beliebig große Zahl endlicher Elemente zerlegt wird. Glockengießer arbeiten jedoch – von sehr wenigen Ausnahmen abgesehen – ausschließlich auf Grundlage von Erfahrungswerten und ohne die Methode finiter Elemente.

2. Schwingungsmoden von Kirchenglocken und bisherige Ansätze

Trifft der Klöppel gegen den Schlagring, so wird die Glocke zu Eigenschwingungen angeregt (Abb. 2). Wie bei den meisten Musikinstrumenten bilden sich dadurch zahlreiche Schwingungsmoden aus, hier jedoch mit der Besonderheit, dass die Partialtöne einer Glocke keine Harmonische darstellen. Die Oberfrequenzen entsprechen also nicht dem ganzzahligen Vielfachen einer Grundfrequenz. Stattdessen können im Frequenzspektrum eine Reihe aus der Musiktheorie bekannter Intervalle beobachtet werden, nämlich u. a. die Prime – ihre Frequenz entspricht näherungsweise der Frequenz des wahrzunehmenden Schlagtons –, die Terz, die Quinte und die Oberoktave (Tab. 1). Diese Intervalle kennzeichnen den vollen, mächtigen Klang einer Kirchenglocke. Der Grundton des Frequenzspektrums wird als Hum bezeichnet und tritt bei halber Prime-Frequenz auf. Seine analytische Beschreibung war schon frühzeitig Gegenstand physikalischer Forschung und eine Reihe herausragender Wissenschaftler haben sich bereits damit auseinandergesetzt. An dieser Stelle seien beispielhaft Euler, Jacques Bernoulli, Chladni, Helmholtz und Rayleigh genannt, welche sich dem Problem dadurch näherten, dass sie glockenähnliche Körper mit deutlich einfacheren Geometrien beschrieben haben, z. B. Ringe, Halbkugeln oder Hyperboloide [4]. Eine Beziehung für den Hohlzylinder geht auf Rayleigh zurück, welche die Schlagfrequenz einer Glocke jedoch nur unzureichend wiedergibt und hier lediglich die Komplexität des zu beschreibenden Sachverhaltes verdeutlichen soll ([5], zitiert nach [6]):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{12\rho R^4(1-\mu^2)}} \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \quad \{1\}$$

(f : Frequenz, E : Elastizitätsmodul, d : Manteldicke, R : Radius, ρ : Dichte, μ : Poissonzahl, n : Schwingungsmode) Im Zentrum des Artikels steht die Modellierung der Hum- bzw. Schlagtonfrequenz oder die Frage, wie diese aus dem Glockenradius und der Glockenmasse in guter Genauigkeit geschätzt werden kann.

Zur Überprüfung der aufgestellten Modelle wurde auf Grundlage eines Glockenbuches des Bistums Köln [7] ein Datensatz mit fast 700 Glocken erstellt, in welchem u. a. die Größen Hum-Frequenz, Glockenradius und Schlagringstärke enthalten sind. So werden die über mehrere Jahrhunderte reichenden Erfahrungen zahlreicher Glockengießer genutzt, um die Modellierungen zu prüfen und zur Erlangung einer höheren Übereinstimmung an die Realität anzupassen.

Dass Zwischen der Frequenz des Hum-Tons und dem Radius bzw. der Masse ein starker Zusammenhang besteht, zeigt bereits die grafische Darstellung der genannten Abhängigkeiten (Abb. 5, Abb. 6). Es wäre daher einfach, durch Anpassen verschiedener Funktionen ein empirisches Modell zu finden, wel-

ches man im Anschluss versucht, physikalisch zu interpretieren. Wir wollen aber den umgekehrte Weg gehen und von einer Modellierung auf dem Niveau der Sekundarstufe 1 ausgehen.

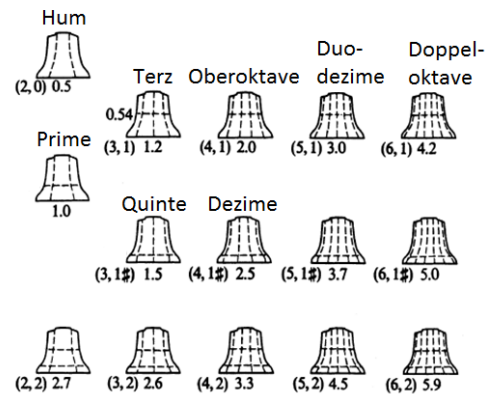


Abb. 2: Schwingungsmoden einer Kirchenglocke [3]

Bezeichnung	Frequenzverhältnis zur Prime	
	ideal	bei Kirchenglocken
Hum	0,5	0,5
Prime	1,0	1,0
Terz	1,2	1,183
Quinte	1,5	1,506
Oberoktave	2,0	2,0
Dezime	2,5	2,514
Undezime	2,667	2,662
Duodezime	3,0	3,011
Doppeloktave	4,0	4,166

Tab. 1: Frequenzverhältnisse im Spektrum einer Kirchenglocke [8]

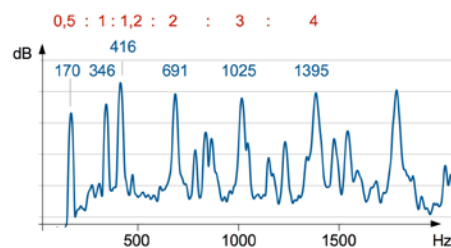


Abb. 3: Heilig-Kreuz-Münster, Schwäbisch Gmünd, Mittagsgeläut der Liebfraueglocke, aufgenommen mit der App „Spektroskop“ [9], dargestellt mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

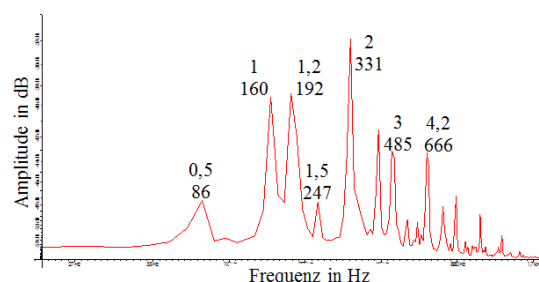


Abb. 4: Frequenzspektrum des Glockenintros von „Hells Bells“ (Rockklassiker von AC/DC), analysiert und dargestellt mit der Software „Sounds“ [10]

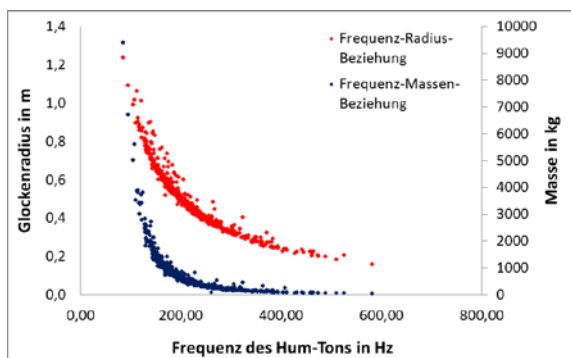


Abb. 5: Das Abtragen der Masse bzw. des Radius gegen die Frequenz des Hum-Tons von 684 Glocken zeigt eindrucksvoll, dass die Größen voneinander abhängen.

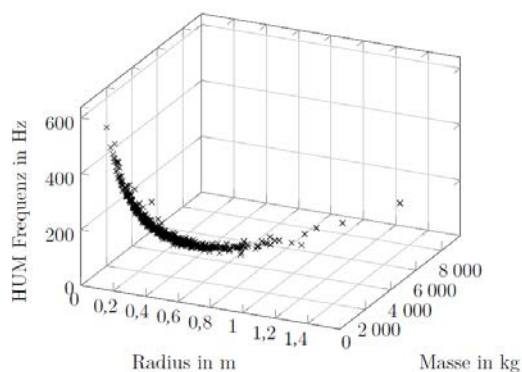


Abb. 6: Hum-Frequenz in Abhängigkeit von Radius und Masse

3. Frequenz-Radius-Beziehung: Ein einfaches Modell für die Sekundarstufe 1

3.1. Das Kaffeebecher-Modell

Analog zu einem mit den Fingern leicht zusammengedrückten Coffee-to-go-Becher (Abb. 7) bilden sich auch auf dem Schlagring einer Glocke im einfachsten Fall vier Knotenpunkte aus. Für die Hum-Frequenz f_{Hum} nehmen wir daher an, dass die zu ihr gehörende Wellenlänge λ_{Hum} gerade dem halben Schlagringumfang U entspricht:

$$U = 2\lambda_{\text{Hum}} = 2\pi R \quad \{2\}$$

Mit der Schallgeschwindigkeit $c = \lambda_{\text{Hum}} \cdot f_{\text{Hum}}$ (343 m/s für 0 °C) und dem Glockenradius R folgt für f_{Hum} :

$$f_{\text{Hum}} = \frac{c}{\pi R} \quad \{3\}$$

Zur Bewertung der Modellierung nutzen wir diese zur Abschätzung der Hum-Frequenz der im Datensatz vorhandenen Glocken und vergleichen die Ergebnisse mit den Literaturangaben. Wie der Abb. 8 entnommen werden kann, liegen die Schätzwerte auf Grundlage des „Kaffeebechermodells“ systematisch oberhalb der tatsächlichen Glockenfrequenzen, mit einer mittleren Abweichung von 9,8 %. Diese Abweichung ist für Unterrichtszwecke und unter Berücksichtigung der Einfachheit des Modells durchaus zufriedenstellend und kann von den Lernenden zur Abschätzung von Glockenradien genutzt wer-

den. Beispielsweise mit dem Smartphone und einer geeigneten FFT-App (z. B. [9]) analysieren sie das Frequenzspektrum der Glocke einer nahegelegenen Kirche, bestimmen die Hum-Frequenz und schätzen mit

$$R = \frac{c}{\pi f_{\text{Hum}}} \quad \{4\}$$

den Glockenradius ab.

Im Folgenden soll nun für diese einfache Berechnungsgleichung ein Korrekturfaktor gefunden werden, der die Übereinstimmung von Modell und Realität nochmals erhöht und ggf. auch den Schülerinnen und Schülern nach Einführung des elementaren Modells begründet mitgeteilt werden kann (Glockengeometrie und Massenabhängigkeit des Schlagtons erfordern zur Modellverbesserung einen Korrekturfaktor). Hierzu passen wir zunächst eine Potenzfunktion an den vorliegenden Datensatz an, welche neben dem Glockenradius auch deren Masse berücksichtigt.



Abb. 7: Veranschaulichung des Modellierungsansatzes anhand eines zusammengedrückten Kaffeebechers

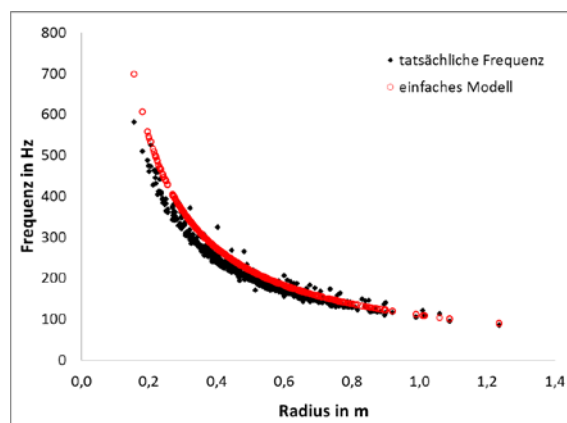


Abb. 8: Die einfache Modellierung überschätzt die tatsächlich vorliegenden Frequenzen leicht.

3.2. Empirisches Modell: Ein Potenzansatz

Als Ansatz, der auch die Massenabhängigkeit der Hum-Frequenz berücksichtigt, wählen wir:

$$f_{\text{Hum}}(M, R) = a \cdot \left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^b \cdot \left(\frac{R}{\text{m}}\right)^d \text{ Hz} \quad \{5\}$$

Eine mit der Statistiksoftware SPSS (Version 21) durchgeführte Kurvenanpassung liefert die gesuch-

ten Konstanten a , b und d und führt auf den Zusammenhang

$$f_{\text{Hum}}(M, R) = 137 \cdot \left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^{-0,03} \cdot \left(\frac{R}{\text{m}}\right)^{-0,8} \text{ Hz}, \{6\}$$

mit einem Bestimmtheitsmaß von 0,98, was für eine hervorragende Modellgüte spricht (vgl. hierzu auch Abb. 9).

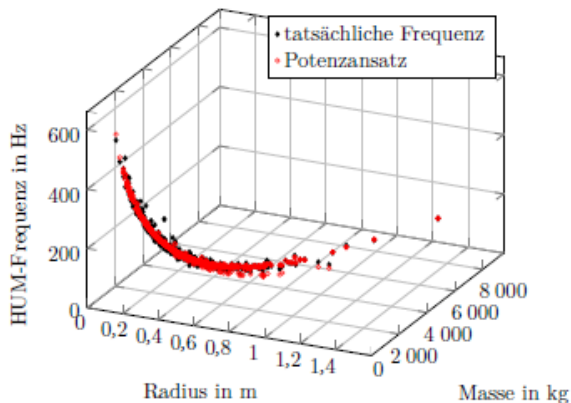


Abb. 9: Vergleich der tatsächlichen Frequenzen mit dem Potenzansatz

3.3. Einführung eines Korrekturfaktors

Setzt man die Schallgeschwindigkeit in Gleichung {3} ein, so stellt man eine hohe Ähnlichkeit zur Beziehung {6} fest:

$$f_{\text{Hum}} = \frac{c}{\pi R} = 109 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{R}$$

$$f_{\text{Hum}} = 137 \frac{1}{\left(\frac{R}{\text{m}}\right)^{0,8}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^{0,03}} \text{ Hz} \quad \{7\}$$

Die Konstanten weichen um nur ca. 25 % voneinander ab und der Exponent des Radius ist nahe 1. So entstand die Idee, die Beziehung

$$f_{\text{Hum}} = a \cdot \frac{\left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^b}{\frac{R}{\text{m}}} \text{ Hz} \quad \{8\}$$

anzupassen, also lediglich den Exponenten der Masse sowie den Vorfaktor variabel zu lassen. Auch bei diesem Ansatz ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von 0,98 und der funktionale Zusammenhang zu

$$f_{\text{Hum}} = \frac{89,2 \cdot \left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^{0,019}}{\frac{R}{\text{m}}} \text{ Hz}. \quad \{9\}$$

Daraus lässt sich nun ein massenabhängiger Korrekturfaktor entsprechend folgender Beziehung ableiten:

$$f_{\text{Hum}} = \frac{c}{\pi R} \cdot \underbrace{0,82 \cdot \left(\frac{M}{\text{kg}}\right)^{0,019}}_{\text{emp. bestimmter Korrekturfaktor}} \quad \{10\}$$

Eine deskriptive Analyse des Korrekturfaktors zeigt, dass dieser nur in einem kleinen Intervall variiert (Abb. 10) – Minimum: 0,87, Maximum: 0,98, Mittel: 0,92, SEM: 0,0007 –, weshalb wir im Folgenden einen mittleren Korrekturfaktor einführen:

$$f_{\text{Hum}} = \frac{c}{\pi R} \cdot \underbrace{0,92}_{\substack{\text{emp. bestimmter} \\ \text{mittlerer} \\ \text{Korrekturfaktor}}} \quad \{11\}$$

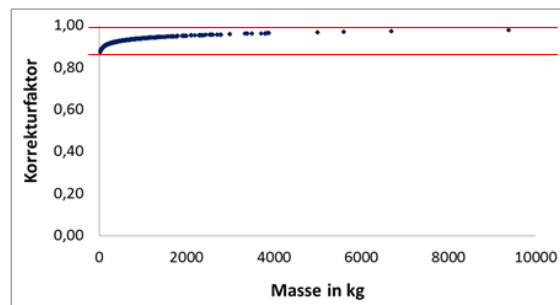


Abb. 10: Korrekturfaktor in Abhängigkeit von der Glockenmasse

Durch die Einführung des mittleren Korrekturfaktors kann die Abweichung der Frequenzschätzung und ohne Kenntnis der Glockenmasse von ursprünglich 9,8 % („Kaffeebechermodell“) auf gerade mal 3,5 % reduziert werden (Abb. 11). Umgekehrt ist es mit gleicher Genauigkeit möglich, den Glockenradius allein aus der gegebenen bzw. gemessenen Frequenz zu bestimmen (Abb. 12).

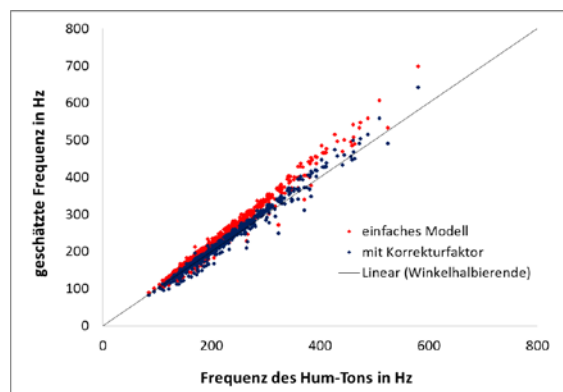


Abb. 11: Veranschaulichung der Modellverbesserung durch Einführung eines mittleren Korrekturfaktors

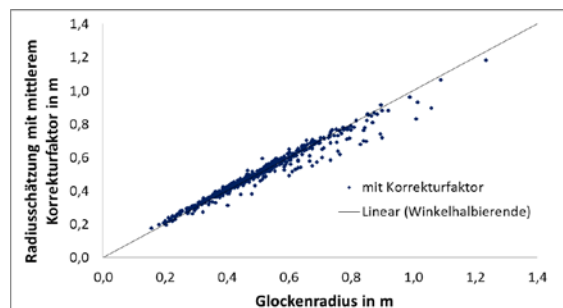


Abb. 12: Vergleich der Radiusschätzung mit mittlerem Korrekturfaktor und den tatsächlich vorhandenen Radien

Alternativ kann man sich den Umweg über den Potenzansatz sparen und direkt den Zusammenhang

$$f_{\text{Hum}} = k \frac{c}{\pi R} \quad \{12\}$$

an den Glockendatensatz anpassen. Dies führt auf den Korrekturfaktor $k = 0,91$, was gut mit dem oben angegebenen Wert übereinstimmt. Im Physikunter-

richt der Sekundarstufe 1 kann darüber hinaus auch allein auf Grundlage der mittleren Abweichung von ca. 10 % nach oben argumentiert und auf Kurvenanpassungen komplett verzichtet werden. Dann wählt man den elementaren Ansatz

$$f_{\text{Hum,geschätzt}} \approx f_{\text{Hum}} + 0,1 \cdot f_{\text{Hum}} \quad \{13\}$$

bzw.

$$f_{\text{Hum}} \approx \frac{f_{\text{Hum,geschätzt}}}{1,1}$$

$$f_{\text{Hum}} \approx 0,91 \cdot f_{\text{Hum,geschätzt}} = 0,91 \frac{c}{\pi R} \quad \{14\}$$

Zur weiteren Prüfung der Beziehung {11} wurde diese zusätzlich auf 29 Glocken angewendet, welche nicht in dem zur Modellanpassung genutzten Glockendatensatz enthalten waren (8 Glocken des Aachener Doms, 10 Glocken des Ulmer Münsters, 11 Glocken des Erfurter Doms). Auch hier ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Realität (Abb. 13).

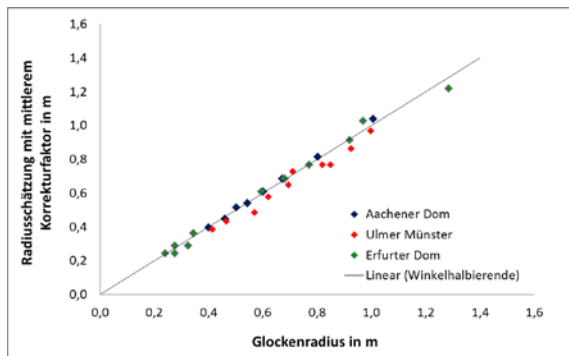


Abb. 13: Anwendung des aufgestellten Modells auf einen weiteren Glockendatensatz

4. Masse-Radius-Beziehung und Massenschätzung

Um von der gemessenen Hum-Frequenz einer Kirchenglocke auch auf deren Masse schließen zu können, benötigen wir eine Masse-Radius-Beziehung. Eine solche wurde bereits von Otte im Jahr 1885 angegeben [11]

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad \{15\}$$

($M_{1/2}$: Masse der Glocke $1/2$, $R_{1/2}$: Radius der Glocke $1/2$), welche auch so formuliert werden kann, dass die Masse M zum Kubikradius der Glocke proportional ist. Da das Volumen eines homogenen Körpers zu seiner Masse proportional ist und gleichzeitig die Dimension m^3 besitzt, ist Gleichung {15} leicht einzusehen. Im Schulunterricht kann sie auch anhand der Betrachtung des Hohlzylinders (in Analogie zur Glocke) begründet werden (Abb. 14): Nach Lehr [12] entspricht die Höhe h einer Glocke dem 1,55-fachen ihres Radius, die Schlagringstärke S_S ist laut eigener Analysen $S_S \approx 0,14 \cdot R$. Somit berechnet sich das Mantelvolumen V zu

$$V = U \cdot h \cdot S_S$$

$$V = 2\pi R \cdot 1,55R \cdot 0,14R \approx 1,36R^3 \quad \{16\}$$

und wegen $V \sim M$ gilt insbesondere $M \sim R^3$. Zur Folgerung dieser Proportionalität müssen die genauen Beziehungen für $h(R)$ und $S_S(R)$ nicht bekannt sein, ausreichend ist ein Verständnis der proportionalen Abhängigkeiten.

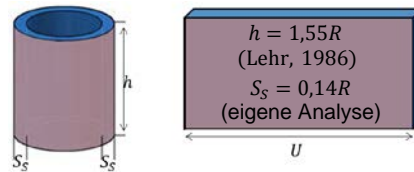


Abb. 14: Betrachtung der Glocke als Hohlzylinder

4.1. Die „gemeine deutsche Rippe“

Um nun die Masse einer Glocke allein aus ihrem Radius abschätzen zu können, benötigt man nach Gleichung {15} lediglich eine Musterglocke. Eine solche, nämlich die „gemeine deutsche Rippe“ wird von Otte ebenfalls angegeben [11]: $M = 700$ Pfund Nürnberger Gewicht, $R = 16$ Zoll. Mit ihr ergibt sich die gesuchte Masse-Radius-Beziehung zu

$$M = 5314 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot R^3 \quad \{17\}$$

und unter Berücksichtigung von {11} folgt

$$M \approx 5314 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\frac{c}{\pi f_{\text{Hum}}} \cdot 0,92 \right)^3 \quad \{18\}$$

Mit dieser Beziehung kann nun auf Grundlage einer Frequenzmessung auch die Glockenmasse abgeschätzt werden, jedoch noch mit einer recht hohen mittleren Abweichung von 16,5 %.

4.2. Empirisch bestimmte Musterglocke

Um die mittlere Abweichung der Massenschätzung zu minimieren, wird nun nicht die „gemeine deutsche Rippe“ berücksichtigt, sondern eine aus dem Datensatz bestimmte „empirische Musterglocke“. Hierzu fittet man die Beziehung $M = c \cdot R^3$ mit dem Ergebnis

$$M = 4776 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot R^3 \quad \text{bzw.} \quad \{19\}$$

$$M \approx 4776 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\frac{c}{\pi f_{\text{Hum}}} \cdot 0,92 \right)^3 \quad \{18\}$$

Mit dieser empirisch begründeten Masse-Radius-Beziehung kann die Massenschätzung auf Grundlage der Frequenzmessung zumindest auf eine mittlere Abweichung von 11,7 % reduziert werden. (Abb. 15).

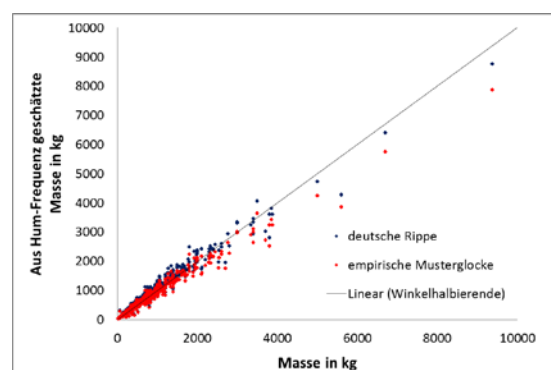


Abb. 15: Abschätzung der Masse aus der Hum-Frequenz

5. Vergleich mit der Methode finiter Elemente

Wie bereits erläutert, konstruieren die meisten Glockengießer die Rippe auch heute noch ausschließlich auf Grundlage von Erfahrungswerten. Mit der Glockengießerei Grassmayr (Innsbruck) [13] konnte jedoch ein Unternehmen ausfindig gemacht werden, welches seit geraumer Zeit ausschließlich die Finite-Elemente-Methode zur Rippenkonstruktion heranzieht. Die Anwendung der aufgestellten Modelle auf das Glockenangebot der Glockengießerei Grassmayr ($N = 53$) ermöglicht somit einen Vergleich zwischen Modellierung und Finite-Elemente-Methode und dadurch eine weitere Prüfung der Modellgüte. Das Ergebnis der Gegenüberstellung zeigen die Abb. 16

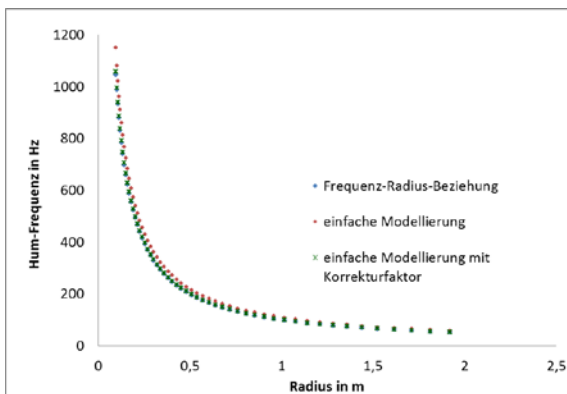


Abb. 16: Frequenz-Radius-Beziehung: Die mit der Methode finiter Elemente bestimmte Frequenzen (blau) entsprechen nahezu exakt dem einfachen Modell mit mittlerem Korrekturfaktor

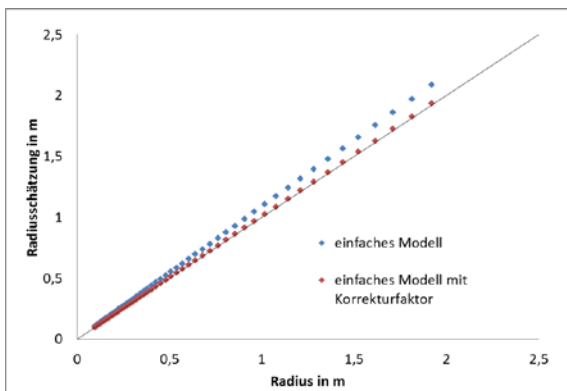


Abb. 17: Beurteilung der Radiusschätzung: Die Radiusschätzung mit mittlerem Korrekturfaktor liegt fast exakt auf der Winkelhalbierenden, d. h. die Übereinstimmung mit der Finite-Elemente-Methode ist außerordentlich hoch.

6. Dank

Unser Dank gilt dem Glockensachverständigen Achim Grabinski für den Hinweis auf die Modellierung mittels Potenzansatz sowie dem Glockengießer Peter Grassmayr für die Bereitstellung des Datensatzes, der von ihm angebotenen Glocken.

bis Abb. 19. Die Übereinstimmung der vorgestellten Modellierungen mit der Finite-Elemente-Methode ist außerordentlich hoch. Geht man davon aus, dass die Methode finiter Elemente die Realität korrekt beschreibt, so kann abschließend festgestellt werden, dass auch die Modelle {11} und {18} hervorragende Näherungen darstellen. Umgekehrt reicht bereits die Analyse des Glockenangebots der Gießerei Grassmayr aus, um den Korrekturfaktor sowie die empirische Musterglocke anhand einfacher Analysen zu erhalten. Dadurch können die vorgestellten statistischen Betrachtungen z. B. bereits in der Sekundarstufe 2 anhand eines kleinen und überschaubaren Datensatzes nachvollzogen werden.

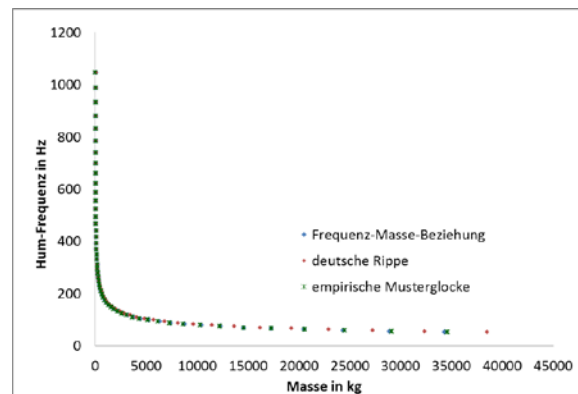


Abb. 18: Frequenz-Masse-Beziehung: Die mit der Methode finiter Elemente bestimmte Frequenzen (blau) entsprechen nahezu exakt dem einfachen Modell mit mittlerem Korrekturfaktor und „empirischer Musterglocke“

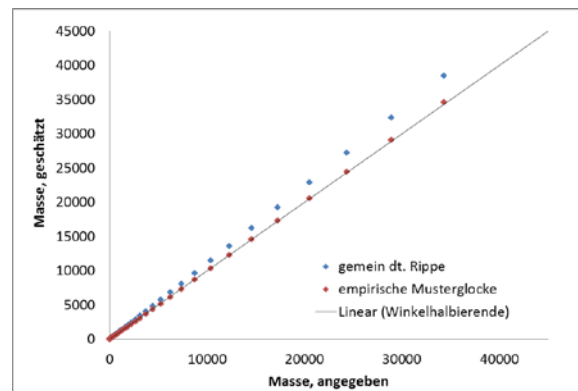


Abb. 19: Beurteilung der Massenschätzung: Die Massenschätzung mit mittlerem Korrekturfaktor und unter Berücksichtigung der „empirischen Musterglocke“ liegt fast exakt auf der Winkelhalbierenden, d. h. die Übereinstimmung mit der Finite-Elemente-Methode ist außerordentlich hoch.

7. Literatur

- [1] Internetauftritt des Instituts für Mechanik (IFM) der Universität Karlsruhe (KIT). Verfügbar unter: http://www.ifm.kit.edu/15_3375.php (Stand: 06/2015)

- [2] Perrin, R.; Charnley, T. (1983): Normal modes of the modern English church bell. In: Journal of Sound and Vibration 90 (1), pp. 29–49.
- [3] Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1998): The Physics of Musical Instruments. New York: Springer.
- [4] Lehr, A. (2005): Die Konstruktion von Läuteglocken und Carillonglocken in Vergangenheit und Gegenwart. Greifenstein.
- [5] Rayleigh, Lord (J. W. Strutt) (1945): Theory of Sound, Vol. I. New York: Dover Publications.
- [6] Schad, C.-R.; Warlimont, H. (1973): Akustische Untersuchungen zum Einfluß des Werkstoffs auf den Klang von Glocken. In: Acustica 29, S. 1-14.
- [7] Hoffs, G. (2004): Glocken katholischer Kirchen Kölns. Verfügbar unter: http://www.glockenbuecherebk.de/pdf/glockenbuch_koeln.pdf (Stand 06/2015)
- [8] Internetenzyklopädie „Wikipedia“ (engl. Fassung), Stichwort: „Strike tone“. Verfügbar unter: http://en.wikipedia.org/wiki/Strike_tone (Stand: 06/2015)
- [9] Bezugsquelle der App „Spektroskop“: <https://itunes.apple.com/de/app/spektroskop/id517486614> (Stand: 06/2015)
- [10] Downloadmöglichkeit der Software „Sounds“: <http://didaktik.physik.fu-berlin.de/sounds/> (Stand: 06/2015)
- [11] Otte, H. (1884): Glockenkunde. Leipzig: T. O. Weigel.
- [12] Lehr, A. (1952): A general bell-formula. In: Acustica 2/1, Number 1, S. 35–38.
- [13] Internetseite der Glockengießerei Grassmayr (Innsbruck). Verfügbar unter: <http://www.grassmayr.at/> (Stand: 06/2015)