

Lorentz-Transformationen mit GAALOP

Martin Erik Horn

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Badensche Str. 52, 10825 Berlin
e_hornm@doz.hwr-berlin.de, mail@martinerikhorn.de

Kurzfassung

Lorentz-Transformationen können in der vierdimensionalen Raumzeit als hyperbolische Rotationen modelliert werden. Diese wiederum lassen sich als Hintereinanderausführung hyperbolischer Reflexionen deuten.

Da Reflexionen in der Geometrischen Algebra und insbesondere hyperbolische Reflexionen in der Raumzeit-Algebra nach Hestenes durch Sandwich-Produkte beschrieben werden, lassen sich auf dieser Grundlage Lorentz-Transformationen didaktisch elegant und mathematisch sehr einfach durch simple Multiplikationen von Vektoren darstellen.

Diese Multiplikationen können entweder von Hand oder aber mit Computerhilfe durchgeführt werden. Im Beitrag wird gezeigt, wie Lorentz-Transformationen auf mathematisch unterschiedlichen Niveaustufen mit Hilfe des Programm-Tools „Geometric Algebra Algorithms Optimizer“ (GAALOP) verstanden und berechnet werden können. Dabei kommt GAALOP die Rolle eines speziell-relativistischen Taschenrechner-Ersatzes zu.

1. Was wäre, wenn ...

Was wäre passiert, wenn Einstein in eine Menschheit hineingeboren worden wäre, die die Algebra **nicht** erfunden hätte? Hätte die Spezielle Relativitätstheorie formuliert werden können, wenn das Aufstellen algebraischer Gleichungen und die Verwendung von Variablen uns Menschen nicht bekannt gewesen wäre?

Die Antwort auf diese Frage lautet mit Sicherheit doppelt: Ja! Zum einen: Ja, Einstein hätte auch ohne algebraische Kenntnisse die Spezielle Relativitätstheorie physikalisch korrekt formulieren und fachsprachlich vollständig beschreiben können.

Und ein zweites Ja lautet sicherlich: Hätte ein Einstein in einer solchen algebra-freien Welt die Relativitätstheorie nicht formuliert, wären seine Kolleginnen und Kollegen irgendwann ganz automatisch per Experiment und durch die Kraft der Erfahrung auf Allgemeine und Spezielle Relativitätstheorie gestoßen.

Dabei müssen wir uns vor Augen halten, dass es ein sehr und wirklich sehr, sehr großer historischer Zufall war, ein singuläres Ereignis geradezu überwältigender Dimension, dass ein Diophantus und seine Kolleginnen und Kollegen um die Zeitenwende des Jahres Null herum (nicht einmal das genaue Jahrhundert ist bekannt, in dem Diophantus lebte [1, S. 31, S. 34]) die Nutzung von Variablen und das Aufstellen abstrakter Gleichungen in die Mathematik einführten.

Die Babylonier, die Ägypter, die Inder, die Chinesen, die südamerikanischen und viele weitere Kultu-

ren dieses Erdballs betrieben schon vor Jahrtausenden eine sehr anspruchsvolle, eine sehr wirkungsmächtige und eine sehr effektive Mathematik [2], [3], die – siehe Gauß-Algorithmus [4], [5] – auch inhaltlich äußerst modern strukturiert war.

Dennoch gilt auch, was Derbyshire schreibt: „We started in 1800 BC with the Babylonians solving quadratic equations written as word problems, and now here we are 2600 years later with al-Khwarizmi ... solving quadratic equations written as word problems.“

It is, I agree, all a bit depressing. Yet it is also inspiring, in a way. The extreme slowness in putting together a symbolic algebra testifies to the very high level at which the subject dwells. The wonder, to borrow a trope from Dr. Johnson, is not that it took us so long to learn how to do this stuff; the wonder is that we can do it at all” [1, S. 51].

Dieses Wunder hätte auch ausbleiben können – beispielsweise dadurch, dass die Römer das ihnen eigene gewisse mathematische Desinteresse vielleicht stärker als politische Maxime durchgesetzt hätten.

Die Römer sind, wie viele andere technisch hoch entwickelten Kulturen der letzten Jahrtausende auch, in der Tat ein typisches Beispiel dafür, dass auch ohne algebraisch-abstrakte Mathematisierungen großartige kulturelle und technische Leistungen (wie Aquädukte und die technische Infrastruktur der Wasserbeförderung, Hochbauten aus Beton, Brückenkonstruktionen, Hochseeschiffahrt, Metallverarbeitung, etc.) gelingen können.

Es ist also durchaus vorstellbar, dass in einer Welt

ohne Diophantus ein rein anwendungsbezogener, ingenieurmäßiger Gebrauch der Mathematik ohne Algebra sich bis heute hätte halten können.

In einer solchen Welt hätten Tüftler und Experimentatoren dann auch das Prinzip des Rückstoßes (Raketen), das Prinzip der leitungslosen Signalübertragung (Telegraphie) und das Prinzip der kosmischen Fluchtgeschwindigkeiten (Satellitenbahnen) ohne tiefer gehende mathematische Fundierung allein durch Ausprobieren und strukturiertes Experimentieren aufgefunden.

Und wenn dann ein erster GPS-Satellit die Erde umkreist, wäre wohl aufgefallen, dass Raum und Zeit experimentell-messbar von bisherigen Erwartungen abweichen [6, S. 80/82], [7, S. 46]. Spätestens dann steht in einer solchen algebra-freien, technisch aber entwickelten Welt ein Einstein vor der Aufgabe, das Gemessene algebra-frei darzustellen und bei weiteren Anwendungen zu berücksichtigen.

Die eingangs gestellte Frage kann aber auch unter einem zweiten, zeitlich ebenso fiktiven Rahmen diskutiert werden: Was wäre, wenn Einstein tatsächlich zu Zeiten der Spät-Babylonier geboren worden wäre? Wie hätte Einstein in dieser damaligen Welt ohne Algebra die Relativitätstheorie formulieren und darstellen können?

Zur Beantwortung dieser Frage lohnt ein Blick in diese spät-babylonische Zeit, in der anspruchsvolle mathematische Konzepte ohne eine Nutzung der Algebra, die erst später erfunden werden sollte, entwickelt und genutzt wurden.

Ein mathematischer Meilenstein dieser Epoche war insbesondere die Entwicklung einer Vorstufe der Integration [8].

Diese babylonische Art der Integration knüpft ebenso wie im modernen Fall an die Flächenberechnung real existierender Objekte an. Über Jahrtausende hinweg wurde dabei immer auf Flächen tatsächlich flächenhafter Größen (also im Wesentlichen Grundstücke) Bezug genommen.

In der Spätphase der babylonischen Mathematik – der Berliner Wissenschaftshistoriker Ossendrijver untersuchte mathematisch-astronomische Keilschrifttexte, die zwischen 350 v.Chr. und 50 v.Chr. entstanden sein dürften [9] und damit zeitlich parallel zu Aristoteles [48, S. 52/53] liegen – begannen einzelne babylonische Mathematiker und Astronomen, physikalische Größen wie beispielsweise die variierende Geschwindigkeit Jupiters zeitlich aufzutragen und die zurückgelegte Strecke als Fläche unter der gewonnenen Kurve und somit als Integral zu bestimmen.

Den zentralen Erkenntnisfortschritt fasst Ossendrijver dabei so zusammen: „Trapezberechnungen konnten sie (die Babylonier) zwar schon um 1.800 v. Chr. vornehmen, allerdings an realen Objekten wie zum Beispiel Gärten oder Feldern. (...) In diesem Fall haben sie die Methode in einem abstrakten

Raum angewandt, indem sie Geschwindigkeit und Zeit eines Objektes auftrugen. Das ist ein großer Fortschritt“ [10].

Wenn das Konzept eines abstrakten mathematischen Raums, in dem Größen graphisch gegeneinander aufgetragen werden können, einem zwei Jahrtausende zu früh geborenen, spät-babylonischen Einstein bekannt gewesen wäre, dann hätte er damit auch die spezielle Relativitätstheorie und insbesondere die Lorentz-Transformationen als deren zentralem mathematischen Kern mathematisch vollständig und korrekt beschreiben können – und zwar algebra-frei mit rein geometrisch-graphischen Werkzeugen, wie im folgenden Abschnitt beispielhaft gezeigt werden soll.

Notwendig dazu wären die gedankliche Kraft und Imaginationsschärfe Einsteins. Und diese unglaubliche Erkenntnistiefe Einsteins ist im Jahre 1905 gleichermaßen unterwartet wie sie auch zwei Jahrtausende zuvor unerwartet zu Tage getreten wäre, wie aus einem mittlerweile berühmt gewordenen Zitat Plancks abzuleiten ist, der prä-faktisch 1909 die bereits erfundene Spezielle Relativitätstheorie über die noch nicht erfundene Allgemeine Relativitätstheorie stellt: „...diese neue Auffassung des Zeitbegriffs stellt an die Abstraktionsfähigkeit des Physikers die allerhöchsten Anforderungen; sie übertrifft an Kühnheit wohl alles, was bisher in der spekulativen Naturforschung ... geleistet wurde; die nicht-euklidische Geometrie ist Kinderspiel dagegen“ [11, S. 120], deutsche Fassung des Zitats in [12, S. 78].

In der Schweiz des Jahres 1905 ist sie es somit kaum weniger kühn als im Babylon 2000 Jahre zuvor, eine Relativitätstheorie zu entwickeln.

Und folgt man Pauli, dann wäre es für einen babylonischen und somit vor-kantianischen Einstein sogar weit einfacher, eine Relativitätstheorie zu erfinden, als es für den modernen europäischen Einstein gewesen sein muss, denn Pauli merkte in einem Brief an Fierz einst an: „Bekanntlich hat es dann einer ganz außerordentlichen Anstrengung bedurft, um Raum und Zeit (... die Newton quasi zur rechten Hand Gottes gesetzt hat ...) aus diesem Olymp wieder herunterzuholen. Diese Arbeit wurde noch künstlich erschwert durch Kants philosophischen Versuch, den Zugang zu diesem Olymp für die menschliche Vernunft zu sperren. Deshalb ist für mich die Zeit besonders interessant, wo Raum und Zeit noch nicht dort oben waren“ [13, S. 219].

In der Schweiz des Jahres 1905 mag es somit möglicherweise ungleich kühner gewesen sein als im Babylon 2000 Jahre zuvor, eine Relativitätstheorie zu entwickeln – zumal Bondi zufolge Einstein beim Verfassen seiner „Elektrodynamik bewegter Körper“ 1905 [14] „überhaupt noch nichts von Michelson und Morleys Experiment gewusst“ habe [15, S. 27].

Die Spezielle Relativität ist deshalb in den Anfängen kaum experimentell und nahezu ausschließlich verstandesmäßig durch Gedankenexperimente fundiert.

2. Eine modifizierte Abituraufgabe

Da die Babylonier keine algebraischen Formeln notieren konnten, „machten sie ein Beispiel nach dem anderen“ [16, S. 70]. Von dieser Vorgehensweise zieht Feynman eine direkte Linie zur Physikdidaktik, wenn er schreibt: „Heute besitzen wir nicht die Fähigkeit, einem Studenten zu zeigen, wie er Physik *physikalisch* verstehen kann! Wir können die Gesetze aufschreiben, aber wir können immer noch nicht sagen, wie man sie physikalisch versteht. Mangels einer Ausdrucksmöglichkeit ist der einzige Weg, Physik physikalisch zu verstehen, auch heute noch der langweilige, Babylonische Weg, viele Beispiele zu machen, bis man es verstanden hat“ [16, S. 70].

Diese physikdidaktische Schlussfolgerung, die Feynman hier formuliert, zieht er auch deshalb, weil er die Physik selbst in grundlegender Weise fachphysikalisch (und nicht lediglich fachdidaktisch) als babylonisch-beispielhaft und nicht griechisch-axiomatisch zugänglich erachtet: „In physics we need the Babylonian method, and not the Euclidean or Greek method“ [17, S. 47].

Der Grund ist die derzeitige Unvollständigkeit der Physik: Weil wir noch nicht alle physikalischen Gesetze kennen, können wir diese nicht axiomatisch fassen. Und erst, wenn eines Tages die Gesamtheit aller physikalischen Gesetze bekannt sein sollte, kann in der Fachphysik von der babylonisch-beispielhaften auf die griechisch-axiomatische Sichtweise übergegangen werden [17, S. 50].

Ein babylonischer Einstein würde also vollkommen legitim und physikalisch einwandfrei agieren, wenn er nicht formelhaft, sondern beispielhaft agiert und argumentiert.

Im Folgenden wird deshalb auf ein Beispiel Bezug genommen, das die Lorentz-Transformation in typischer Weise darstellt und das geringfügig modifiziert aus [18] übernommen wurde.

Dabei handelt es sich dabei um die Teil-Aufgabe 2.2d [18, S. 12] der schriftlichen Abiturprüfung 2009 des Leistungskurses Physik der Otto-Hahn-Gesamtschule Berlin/Neukölln (siehe Abb. 1), die noch vor Einführung des Zentralabiturs gestellt werden konnte. Diese Aufgabe baut auf einer Unterrichtsreihe zur Speziellen Relativitätstheorie auf, in der die Raumzeit-Algebra [19, Kap. 9], [20], [21, Kap. 5] als didaktische Umformung der Dirac-Algebra [22] zur Mathematisierung speziell-relativistischer Gesetze genutzt wurde [23], [24], [25].

In der ursprünglichen Fassung dieser Aufgabe wurde die spätere Position der Rakete von Dr. Pau mit $r_2 = 12 \text{ Lj } \gamma_t + 3 \text{ Lj } \gamma_x$ anstelle der hier in Abb. 1 gewählten Position $r_2 = 4 \text{ Lj } \gamma_t + 1 \text{ Lj } \gamma_x$ angegeben¹. Die modifizierte Position führt auf eine identische Rela-

¹ Die neu gewählten Werte bieten die Möglichkeit einer allgemeineren Diskussion, da sich die Supernova aus Sicht von Dr. Wolf nun nicht mehr zum vorgegebenen Zeitpunkt von r_2 ereignet.

Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei.

Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.

Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position

$$r_2 = 4 \text{ Lj } \gamma_t + 1 \text{ Lj } \gamma_x$$

Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$r_3' = 10 \text{ Lj } \gamma_t' + 5 \text{ Lj } \gamma_x'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

Abb.1: Abitur-Teilaufgabe 2.2d zur Lorentz-Transformation aus [18].

tivgeschwindigkeit von ebenfalls $v = 0,25 \text{ c}$ und damit auf eine vollkommen identische Lösung dieser Abituraufgabe.

Eine typische Lösung der Abituraufgabe besteht darin, nach Ermittlung der Geschwindigkeit von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf (Teil-Aufgabe 2.2a, siehe Abb. 2) alle nun bekannten Größen in die zuvor im Unterricht hergeleiteten [24, AB 25, S. 33] und ausführlich diskutierten Formeln der Lorentz-Transformation [24, AB 26, S. 34] für zeitliche (siehe Abb. 3) und räumliche (siehe Abb. 4) Koordinatenwerte einzusetzen.

Aus Schülersicht wird diese Art der Aufgabenlösung als die wohl einfachste erscheinen, da sie zum einen im Unterricht ausführlich eingeübt wurde.

Zum anderen kommt diese Art der Aufgabenlösung einem üblichen, naiv ergebnisorientierten Schülerhandeln entgegen, das oft sehr konsequent lediglich

2.2a) $s = 3 \text{ Lj}$ $t = \frac{72 \text{ Lj}}{c}$
 Ansatz: $v = \frac{s}{t}$
 $v = \frac{3 \text{ Lj}}{\frac{72 \text{ Lj}}{c}} = \frac{1 \text{ Lj}}{4 \text{ Lj}} \cdot c = \frac{1}{4} \cdot c = 0,25 \cdot c = 7,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Abb.2: Beispiellösung zur Geschwindigkeitsberechnung der Rakete von Dr. Pau aus Sicht von Dr. Wolf.

darin besteht, zu vorgegebenen Größen eine der Oberflächenstruktur nach offenkundig passende Formel aus einem im Laufe der Schuljahre angefüllten Korb unterschiedlichster Gleichungen und Formeln herauszusuchen und dann gegebene Größen mehr oder auch weniger reflektiert einzusetzen.

Sofern bei der Aufgabenlösung kein Transfer erwartet wird, ist diese Lösungsstrategie in vielen Fällen sowohl zeitlich effektiv wie auch inhaltlich erfolgreich. Dies zeigt auch die Schülerlösung dieser Aufgabe, die am Ende zu einem korrekten Ergebnis von $r_3 = (45 \text{ Lj } \gamma_t + 30 \text{ Lj } \gamma_x) / \sqrt{15} \approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t + 7,75 \text{ Lj } \gamma_x$ (siehe letzte Zeile von Abb. 4) führt.

Dr. Wolf misst also die Supernova in seinem Koordinatensystem 11,62 Jahre nach Start der Rakete von Dr. Pau in einer räumlichen Entfernung von 7,75 Lichtjahren.

3. Der speziell-relativistische Satz des Pythagoras

Physikalisch betrachtet beschreiben Lorentz-Transformationen nicht den physikalischen Kern der Speziellen Relativität. Lorentz-Transformationen sind in erster Linie mathematische Transformationen und keine physikalischen.

Physikalisch relevant sind dagegen Messungen, die aus unterschiedlichen Perspektiven erfolgen – und zwar in der Speziellen Relativität üblicherweise Messungen, die in zwei sich zueinander mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegenden Koordinatensystemen vorgenommen werden.

Lorentz-Transformationen beschreiben auch nicht den mathematischen Kern der Speziellen Relativität. Der mathematische Kern besteht stattdessen in einer raumzeitlichen Umformulierung bzw. Erweiterung des Satzes des Pythagoras.

Während der klassische Satz des Pythagoras die Berechnung des Längenquadrats eines rein räumlichen Vektors in einem Euklidischen Koordinatensystem beschreibt

$$r^2 = (x \sigma_x + y \sigma_y)^2 = x^2 + y^2 \quad \{1\}$$

beschreibt der relativistische Pythagoras die Berechnung des Längenquadrats eines raumzeitlichen Vektors in einem pseudo-Euklidischen Koordinatensystem:

$$r^2 = (ct \gamma_t + x \gamma_x)^2 = (ct)^2 - x^2 \quad \{2\}$$

Der räumliche, auf der Geometrischen Algebra des dreidimensionalen Raums (Pauli-Algebra) aufbauende Fall [24, AB 1–7] wurde deshalb im Rahmen der damaligen Unterrichtsreihe vor Erörterung der Raumzeit-Algebra (Dirac-Algebra) ausführlich im Unterricht behandelt und mit den Schülern diskutiert.

Den Babylonischen Mathematikerinnen und Mathematikern war der klassische Satz des Pythagoras nicht nur wohlbekannt [2, S. 33-35], [3, S. 134-139], sondern er war ein zentraler geometrischer Eckpfei-

$$t = \frac{t' + \frac{x' \cdot v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{10 \text{ Lj}}{c} + \frac{5 \text{ Lj} \cdot \frac{1}{2} \cdot c}{c^2}$$

$$= \frac{10a + 1,25a}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{11,25a}{\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

$$= 11,62 a$$

$$ct = 11,62 \text{ Lj}$$

Abb.3: Beispiellösung zur Bestimmung des zeitlichen Koordinatenwertes der Supernova auf der ct-Achse im Inertialsystem von Dr. Wolf.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{5 \text{ Lj} + \frac{1}{2} c \cdot \frac{10 \text{ Lj}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{7,5 \text{ Lj}}{\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

$$= 7,75 \text{ Lj}$$

$$r_3 = 11,62 \text{ Lj } \gamma_t + 7,75 \text{ Lj } \gamma_x$$

Abb.4: Beispiellösung zur Bestimmung des räumlichen Koordinatenwertes der Supernova auf der x-Achse im Inertialsystem von Dr. Wolf. Ganz unten wurde vom Schüler der vollständige Dirac-Vektor angegeben.

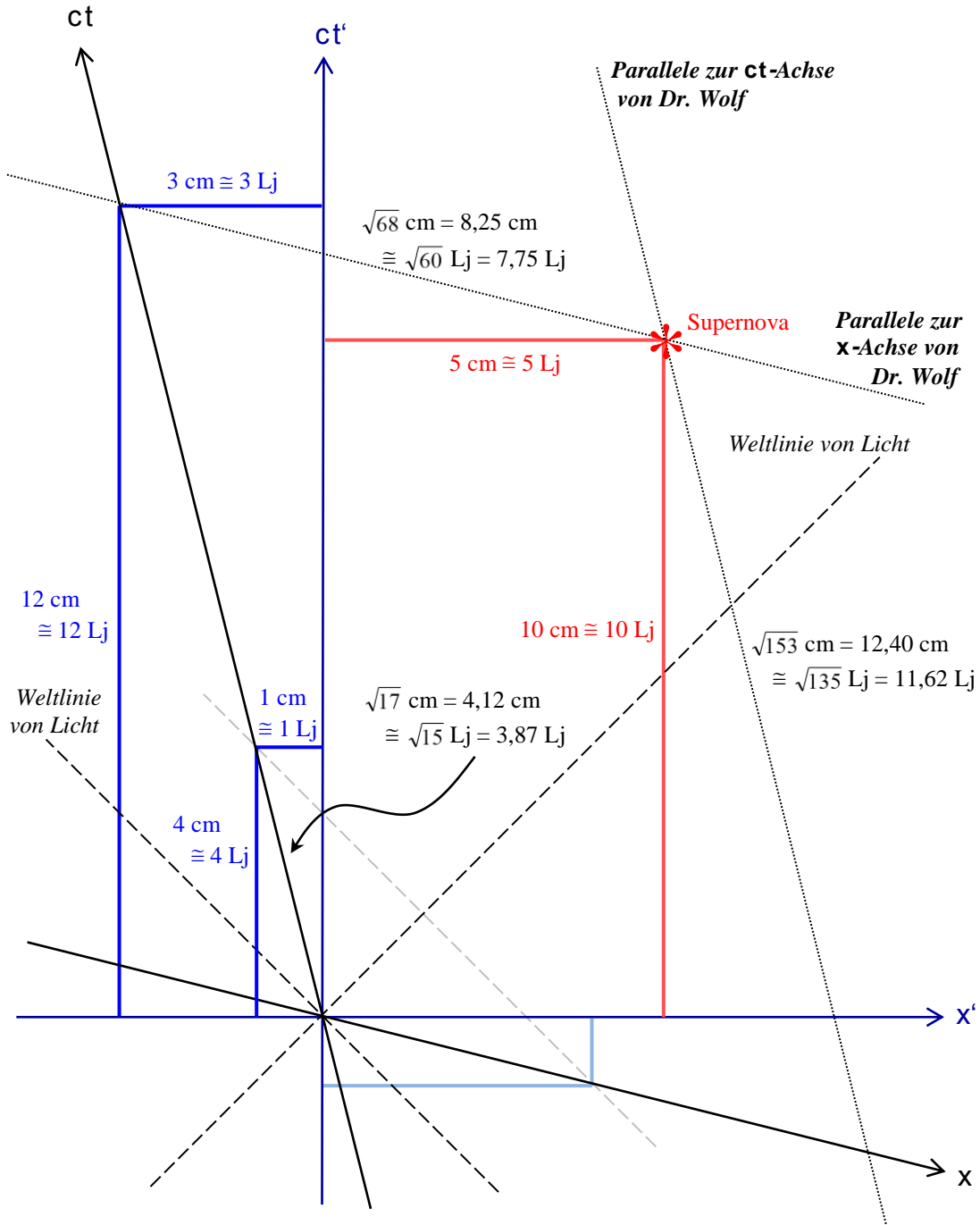


Abb.5: Graphische Ermittlung der Lösungswerte $x = 7,75 \text{ Lj}$ und $ct = 11,75 \text{ Lj}$ der Abitur-Teilaufgabe 2.2d.

ler ihrer Mathematik: „Auffällig ist das häufige Vorkommen der Berechnung der Diagonale von Rechtecken mittels des pythagoreischen Lehrsatzes – viele Jahrhunderte vor Pythagoras!“ [27, S. 17]

Es ist somit durchaus denkbar, dass ein weitsichtiger alt-babylonischer Einstein eine raumzeitliche Erweiterung des Satzes des Pythagoras kognitiv fassen konnte, denn eine solche Erweiterung ist ja in der rechnerischen Umsetzung nicht allzu schwierig. Schwierig ist einzig und allein die kognitive Fundierung.

Mit Hilfe des Konzepts abstrakter mathematischer Räume, in denen Größen graphisch gegeneinander aufgetragen werden können, kann ein zwei Jahrtausende zu früh geborener, spät-babylonischer Einstein dann Ergebnisse dieser und ähnlicher Aufgaben auf Grundlage des relativistischen, raumzeitlichen Pythagoras und einer einfachen Dreisatz-Rechnung (bzw. eleganter als Anwendung eines naiven raumzeitlichen Strahlensatzes) gänzlich ohne Formelnutzung bestimmen und so die gesuchten Koordinatenwerte graphisch fundiert ermitteln.

4. Durchführung von Lorentz-Transformationen ohne Formel-Nutzung

Algebra-freie Durchführungen von Lorentz-Transformationen ohne Nutzung der Lorentz-Transformationsformeln (... und ohne überhaupt etwas transformiert zu haben...) werden in den Diagrammen von Abb. 5, Abb. 6 und Abb. 7 gezeigt.

Es wird einzig und allein die Kenntnis des relativistischen Pythagoras benötigt, der einem babylonischen Einstein – ebenso wie der klassische Pythagoras – dann algebra-frei zur Verfügung gestanden haben sollte.

Auch in moderner Zeit wird dies immer wieder erfolgreich praktiziert, wobei moderne Bücher (wie z.B. [26]) nicht konsequent auf Formeln verzichten, sondern die graphische Deutung meist als motivierendes Element für einen Vergleich mit formelbezogenen Ansätzen nutzen.

Folgende Schritte sind dann durchzuführen:

- Zeichnung der in Abb. 5 blau eingefärbten, gestrichenen Achsen des Koordinatensystems von Dr. Pau.
- Einzeichnen der Position von Dr. Wolf, der sich in negativer Richtung von Dr. Pau entfernt und nach $ct' = 4 \text{ Lj}$ (4 cm) genau $x' = -1 \text{ Lj}$ (1 cm) entfernt ist.
- Zeichnung der Weltlinie von Dr. Wolf in Form einer Geraden durch den Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems und des in b) aufgefundenen Punktes als ungestrichene, in Abb. 5 schwarz eingefärbte zeitliche ct -Achse des Koordinatensystems von Dr. Wolf.
- Zeichnung einer Senkrechten zur ct -Achse des ungestrichenen Koordinatensystems durch den Ursprung und einen an der Weltlinie von Licht gespiegelten Punkt $ct' = -1 \text{ Lj}$ (1 cm) und $x' = 4 \text{ Lj}$ (4 cm, siehe hellblaue Linien in Abb. 5) als ungestrichene, schwarz eingefärbte räumliche x -Achse des Koordinatensystems von Dr. Wolf.
- Einzeichnen der gegebenen Position der Supernova im gestrichenen Koordinatensystem von Dr. Pau mit $ct' = 10 \text{ Lj}$ (10 cm) und $x' = 5 \text{ Lj}$ (5 cm, siehe rote Linien in Abb. 5).
- Zeichnung von Parallelen zur ungestrichenen ct -Achse und zur ungestrichenen x -Achse durch die Position der Supernova. Die Entfernung der Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Achsen des ungestrichenen Koordinatensystems von Dr. Wolf zum Ursprung gegen die gesuchten, lorentz-transformierten Koordinatenwerte an, die nun lediglich abgemessen werden müssen.
- Messung der Entfernung der in b) eingezeichneten Position von Dr. Wolf vom Ursprung.
Ergebnis: $ct_0 \cong 4,12 \text{ cm}$.
- Anwendung des relativistischen Pythagoras: Die in g) abgemessene Strecke entspricht einer zeitlichen Distanz von $\sqrt{4^2 - 1^2} \text{ Lj} = \sqrt{15} \text{ Lj} = 3,87 \text{ Lj}$,

so dass aus $4,12 \text{ cm} \cong 3,87 \text{ Lj}$ der Maßstab für Entfernungen im Koordinatensystem von Dr. Wolf zu $1 \text{ cm} \cong 0,94 \text{ Lj}$ folgt.

- Messung der Entfernung des in f) aufgefundenen Schnittpunktes der Parallelen mit der ungestrichenen ct -Achse von Dr. Wolf vom Ursprung.
Ergebnis: $ct \cong 12,40 \text{ cm}$.
- Umrechnung des Ergebnisses von i) mit Hilfe des in h) ermittelten Maßstabs.
Ergebnis: $ct = 12,40 \text{ cm} \cdot 0,94 \text{ Lj/cm} = 11,62 \text{ Lj}$
Dieser Wert gibt den gesuchten Zeitpunkt an, an dem aus Sicht von Dr. Wolf die Supernova stattfindet.
- Messung der Entfernung des in f) aufgefundenen Schnittpunktes der zweiten Parallelen mit der ungestrichenen x -Achse von Dr. Wolf vom Ursprung.
Ergebnis: $x \cong 8,25 \text{ cm}$.
- Umrechnung des Ergebnisses von k) mit Hilfe des in h) ermittelten Maßstabs.
Ergebnis: $ct = 8,25 \text{ cm} \cdot 0,94 \text{ Lj/cm} = 7,75 \text{ Lj}$
Dieser Wert gibt die gesuchte räumliche Entfernung an, in der aus Sicht von Dr. Wolf die Supernova stattfindet.

Zur Ermittlung der Lösungswerte war die Nutzung des relativistischen Pythagoras unumgänglich. Eine formelhafte Nutzung der Lorentz-Transformation war dagegen nicht notwendig.

5. Lorentz-Reflexionen

In moderner Sichtweise überführt eine Lorentz-Transformation ein raumzeitliches Koordinatensystem in ein anderes raumzeitliches Koordinatensystem. Bezogen auf die hier diskutierte Aufgabe müsste somit die ungestrichene Zeitachse von Dr. Wolf so transformiert werden, dass sie auf der ursprünglichen, gestrichenen Zeitachse von Dr. Pau zu liegen kommt.

Und die ungestrichene räumliche x -Achse von Dr. Wolf müsste so transformiert werden, dass sie auf der gestrichenen räumlichen x' -Achse von Dr. Pau zu liegen kommt.

Eine solche Transformation transformiert selbstredend jeden Punkt der Raumzeit und damit auch den raumzeitlichen Ort und Zeitpunkt der Supernova².

Die gerade beschriebene Überführung der beiden Koordinatenachsen soll im Folgenden aufgeteilt werden: In einem ersten Schritt werden die zeitlichen Koordinatenachsen ineinander überführt.

² Es handelt sich somit ausdrücklich nicht um eine sogenannte passive Transformation (bei der die Koordinatenachsen ihre Lage ändern und das Ereignis unverändert am gleichen Raumzeit-Punkt verbleibt) und nicht um eine sogenannte aktive Transformation (bei der die Koordinatenachsen unverändert ihre Lage beibehalten, während das Ereignis einem neuen Raumzeit-Punkt zugewiesen wird). Sowohl die Koordinatenachsen wie auch das Ereignis ändern ihre Lage.

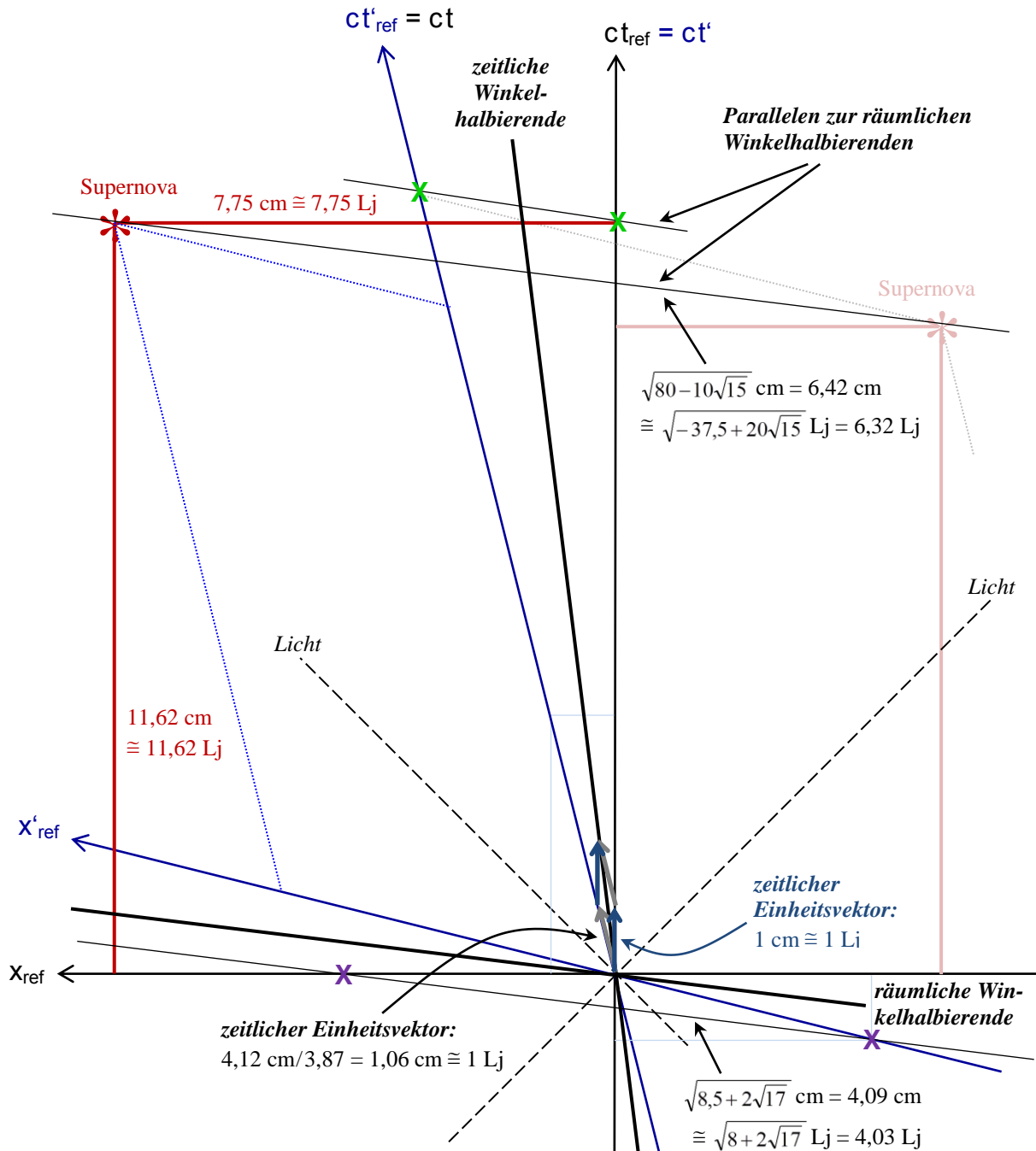


Abb.6: Graphische Darstellung der Reflexion an der zeitlichen Winkelhalbierenden zur alternativen Ermittlung der Lösungswerte $x = 7,75 \text{ Lj}$ und $ct = 11,75 \text{ Lj}$ der Abitur-Teilaufgabe 2.2d.

Und erst in einem zweiten Schritt werden die räumlichen Achsen in geeigneter Weise transformiert.

Die Überführung der beiden zeitlichen Koordinatenachsen gelingt sehr einfach durch eine Reflexion an der Winkelhalbierenden der beiden Zeitachsen.

Diese Reflexion kann algebraisch durchgeführt werden, was später mit Hilfe der Raumzeit-Algebra (Dirac-Algebra) und mit Hilfe von GAALOP geschehen soll. Zur didaktischen Fundierung soll in diesem Abschnitt jedoch wieder von einem fiktiven Einstein oder einem fiktiven Minkowski spät-baby-

lonischer Prägung ausgegangen werden, der diese Reflexion algebra-frei und rein geometrisch am vorliegenden Beispiel (siehe Abb. 6) durchführt.

Folgende Schritte sind dann durchzuführen:

- a) Geometrische Ermittlung der Lage der zeitlichen Winkelhalbierenden, indem beispielsweise dem Vektor der Länge von $4,12 \text{ cm}$ in ct -Richtung ein Vektor der Länge von $3,87 \text{ cm}$ in ct' -Richtung angefügt wird. Oder beide Vektoren werden normiert, so dass ein zeitlicher Einheitsvektor der Länge von $1,06 \text{ cm}$ in ct -Richtung dem zeit-

- lichen Einheitsvektor der Länge von 1 cm in ct' -Richtung angefügt wird. Für diesen Zeichenschritt ist die Kenntnis des relativistischen Pythagoras notwendig, da beide Vektoren die gleiche raumzeitliche Länge aufweisen müssen.
- b) Da beide Vektoren aus a) gleich lang sind, verläuft die zeitliche Winkelhalbierende durch den Endpunkt der aufaddierten Vektoren. Sie kann nun eingezeichnet werden, indem eine Linie durch diesen Punkt und den Ursprung gezogen wird.
- c) Geometrische Ermittlung der Lage der räumlichen Winkelhalbierenden, indem analog zu a) und b) räumliche Einheitsvektoren aufaddiert werden. Oder aber die räumlichen und zeitlichen Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der zeitlichen Winkelhalbierenden werden vertauscht, so dass ein Punkt auf der räumlichen Winkelhalbierenden gebildet wird.
- d) Da nun ein Punkt auf der räumlichen Winkelhalbierenden bekannt ist, kann diese eingezeichnet werden, indem eine Linie durch diesen Punkt und den Ursprung gezogen wird.
- e) Durch einen beliebigen Punkt auf der ct -Achse (z.B. den grünen Punkt in Abb. 6 oben) wird eine Parallele zur räumlichen Winkelhalbierenden gezogen, da die räumliche Winkelhalbierende die Senkrechte der zeitlichen Winkelhalbierenden ist.
- f) Die Entfernung des in e) gewählten Punktes zum Schnittpunkt dieser Parallelen mit der zeitlichen Winkelhalbierenden wird gemessen.
- g) Die Entfernung wird auf der anderen Seite der Winkelhalbierenden in Fortsetzung der Parallelen abgetragen, so dass der Bildpunkt des in e) gewählten Punktes (in Abb. 6 ebenfalls grün markiert) eingezeichnet werden kann.
- h) Die an der zeitlichen Winkelhalbierenden reflektierte ct_{ref} -Achse kann eingezeichnet werden, indem der in g) aufgefundene Bildpunkt mit dem Ursprung verbunden wird. Wie erwartet, entspricht die reflektierte ct_{ref} -Achse der ursprünglichen ct' -Achse.
- i) Da der in g) aufgefundene Bildpunkt auf der ct' -Achse liegt, folgt automatisch, dass auch die reflektierte ct'_{ref} -Achse der ursprünglichen ct -Achse entsprechen muss.
- j) Durch einen beliebigen Punkt auf der x -Achse (z.B. den violetten Punkt in Abb. 6 unten) wird eine Parallele zur räumlichen Winkelhalbierenden gezogen, da die räumliche Winkelhalbierende die Senkrechte der zeitlichen Winkelhalbierenden darstellt.
- k) Die Entfernung des in j) gewählten Punktes zum Schnittpunkt dieser Parallelen mit der zeitlichen Winkelhalbierenden wird gemessen. Im Beispiel von Abb. 6 sind dies 4,09 cm.
- l) Die Entfernung von 4,09 cm wird auf der anderen Seite der zeitlichen Winkelhalbierenden in Fortsetzung der Parallelen abgetragen, so dass der Bildpunkt des in j) gewählten Punktes (in Abb. 6 ebenfalls violett markiert) eingezeichnet werden kann.
- m) Die an der zeitlichen Winkelhalbierenden reflektierte x_{ref} -Achse kann eingezeichnet werden, indem der in l) aufgefundene Bildpunkt mit dem Ursprung verbunden wird. Die reflektierte x_{ref} -Achse liegt ebenfalls auf der ursprünglichen x' -Achse, ist jedoch entgegengesetzt orientiert.
- n) Da der in l) aufgefundene Bildpunkt auf der x' -Achse liegt, folgt automatisch, dass auch die reflektierte x'_{ref} -Achse auf der ursprünglichen x -Achse liegen muss. Und sie muss ihr ebenfalls entgegengesetzt orientiert sein.
- o) Nun wird der Bildpunkt der in Abb. 6 hellrot markierten Supernova konstruiert, indem durch die Position der Supernova eine Parallele zur räumlichen Winkelhalbierenden (die wie bekannt die Senkrechte der zeitlichen Winkelhalbierenden ist) gezogen wird.
- p) Die Entfernung der Supernova zum Schnittpunkt dieser Parallelen mit der zeitlichen Winkelhalbierenden wird gemessen. Im Beispiel von Abb. 6 sind dies 6,42 cm.
- q) Die Entfernung von 6,42 cm wird auf der anderen Seite der zeitlichen Winkelhalbierenden in Fortsetzung der Parallelen abgetragen, so dass der Bildpunkt der Supernova (in Abb. 6 dunkelrot markiert) eingezeichnet werden kann.
- r) Durch den Bildpunkt der Supernova werden die beiden Parallelen zur ct_{ref} -Achse und zur x_{ref} -Achse eingezeichnet. Nun können die lorentztransformierten Koordinatenwerte direkt als Streckenlängen in Abb. 6 gemessen werden.
- s) Die Messung der Entfernung der Supernova von der ct_{ref} -Achse gibt die räumliche Entfernung an. Ergebnis: $x_{\text{ref}} \cong 7,75$ cm.
- t) Die Messung der Entfernung der Supernova von der x_{ref} -Achse gibt die zeitliche Entfernung an. Ergebnis: $ct_{\text{ref}} \cong 11,62$ cm.
- u) Da die senkrecht zueinander stehenden reflektierten räumlichen und zeitlichen Achsen auch auf dem Papier senkrecht zueinander stehend mit einem Winkel von 90° eingezeichnet werden konnten, ist der Umrechnungsfaktor 1. Die gemessenen Längen entsprechen somit direkt räumlichen und zeitlichen Distanzen.
Endergebnisse: $x_{\text{ref}} = 7,75$ Lj und $ct_{\text{ref}} = 12,62$ Lj
Die Supernova findet aus Sicht von Dr. Wolf somit 12,62 Jahre nach Start der Rakete von Dr. Pau in einer räumlichen Entfernung zur Erde von 7,75 Lj statt.
- Das also ist der zentrale und wichtigste Beweggrund, wieso die Menschheit Lorentz-Transforma-

tionen nutzt: Es ist in Punkt u) keine Umrechnung mehr nötig. Eingezeichnete Längen können direkt als Koordinatenwerte gemessen und interpretiert werden.

Die Umrechnung bzw. Normierung zu Einheitsvektoren fand ja bereits in den Schritten a) und c) statt.

Und es ist auch keine Lorentz-Rotation notwendig, eine Lorentz-Reflexion reicht zur korrekten Ermittlung der transformierten Koordinatenwerte vollkommen aus.

Es wird dann lediglich in einem linkshändigen Koordinatensystem gemessen, was aber schlicht Gewöhnungssache ist und an der Korrektheit der Ergebnisse nichts ändert.

6. Lorentz-Rotationen

Die Nutzung von hyperbolischen Rotationen im Sinne einer Lorentz-Transformation bei der Bearbeitung speziell-relativistischer Aufgabenstellungen ist somit logisch überflüssig.

Dennoch soll sie – da wir Menschen offenkundig durch eine Jahrhunderte alte Bildungstradition auf rechtshändige Koordinatensysteme eingepägt sind – im Folgenden dargestellt und diskutiert werden.

Dieser letzte Schritt, der dazu führen soll, dass die ungestrichene räumliche x-Achse von Dr. Wolf so transformiert wird, dass sie auf der ursprünglichen, gestrichenen räumlichen x'-Achse von Dr. Pau zu liegen kommt, kann leicht durch eine zweite Refle-

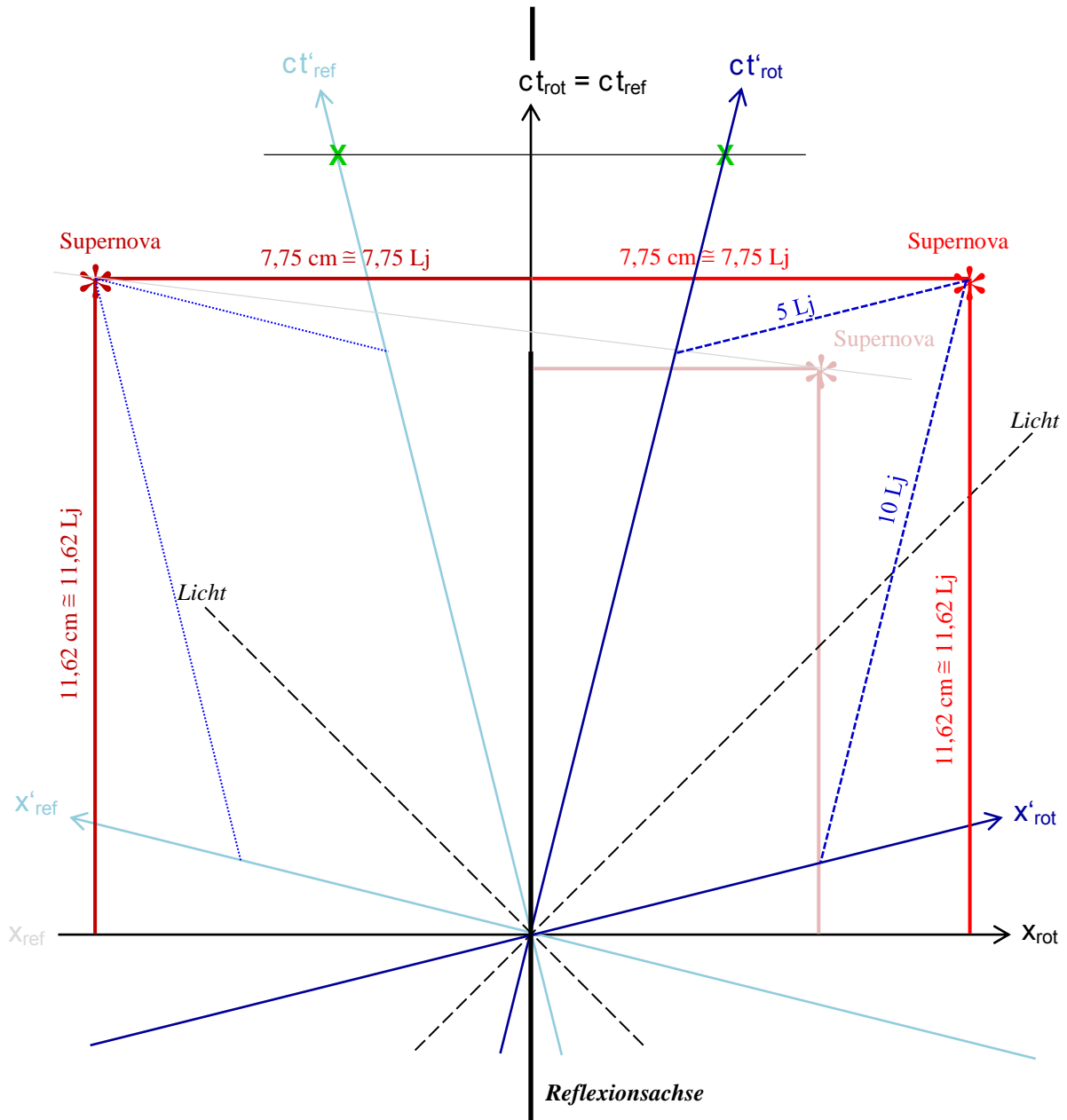


Abb.7: Graphische Darstellung einer Lorentz-Transformation als Rotation zur Ermittlung der Lösungswerte $x = 7,75 \text{ Lj}$ und $ct = 11,75 \text{ Lj}$ der Abitur-Teilaufgabe 2.2d.

xion modelliert werden. Abb. 6 zeigt deutlich, dass lediglich eine Richtungsumkehr der x_{ref} -Achse notwendig ist, damit diese dann identisch mit der ursprünglichen x' -Achse wird.

Diese Richtungsumkehr gelingt durch eine Reflexion an der ct_{ref} -Achse, die alle zeitlichen Koordinatenwerte unverändert lässt, die räumlichen jedoch einer Vorzeichenumkehr unterzieht.

Abb. 7 zeigt das Ergebnis dieser zweiten Reflexion. Alle die Reflexion konstituierenden Entfernungen können aufgrund der zeichnerisch senkrechten Ausrichtung räumlicher und zeitlicher Strecken direkt abgelesen und eingetragen werden. Der Umrechnungsfaktor zwischen Zeichnung und physikalisch relevanten raumzeitlichen Distanzen ist somit wie in Unterpunkt u) wieder genau 1.

Die räumliche Entfernung der Supernova zur Erde von $x_{\text{ref}} = 7,75$ Lj (dunkelrote Strecke links in Abb. 7) bleibt durch die zweite Reflexion mit nun $x_{\text{rot}} = 7,75$ Lj (hellrote Strecke rechts in Abb. 7) ebenso unverändert wie die zeitliche Distanz aus Erdsicht von $ct_{\text{ref}} = ct_{\text{rot}} = 12,62$ Lj.

Dis bestätigt die bereits bekannte mathematische Beziehung, dass jede Rotation (und mithin auch jede hyperbolische Rotation) als Hintereinanderausführung zweier Reflexionen (mithin also zweier hyperbolischer Reflexionen) beschrieben werden kann.

Dabei ist die Aufspaltung von Rotationen in zwei Reflexionen nicht eindeutig. Der hier gewählten Variante einer Reflexion an der zeitlichen Winkelhalbierenden, die von einer Reflexion an der ursprünglichen gestrichelten Zeitachse gefolgt wird, könnte beispielsweise eine zweite Variante, bei der eine Reflexionen an der ersten und dritten zeitlichen Winkel-Viertelnden aufeinander folgen, zur Seite gestellt werden. Oder aber es werden aufeinander folgende Reflexionen an den räumlichen Winkelhalbierenden oder Winkel-Viertelnden gewählt.

7. Minkowskis Entscheidung

Bei der Entwicklung einer mathematisch soliden Fundierung der von Einstein 1905 [14] vorgelegten Speziellen Relativitätstheorie musste Hermann Minkowski eine Entscheidung treffen, die er in einer Fußnote [28, S. 28] so umschreibt: „Man könnte auch daran denken, statt des Cayleyschen Matrizenkalküls den Hamiltonschen Quaternionenkalkül heranzuziehen, doch erscheint mir der letztere für unsere Zwecke als zu eng und schwerfällig.“

Wie allseits bekannt, hat sich Minkowski für die Darstellung durch Matrizen entschieden und ist verstorben.

Was wäre passiert, wenn die damalige Entscheidung so nicht getroffen worden wäre? Wie sähe die Mathematisierung der Relativitätstheorie aus, wenn nicht nur einzelne Physiker (Silberstein [29], Lanczos [30]) und Mathematiker (Klein & Sommerfeld [31, S. 939-943]) den Hamiltonschen Weg gegangen wären und die quaternionische Mathematisierung

der Speziellen Relativitätstheorie fortgeführt [32], [33] hätten?

Letztendlich sind die Mathematik der Quaternionen und die auf Grassmann aufbauende Geometrische Algebra in ihrem zentralen mathematischen Ideen Kern wesensgleich. Der einzige relevante Unterschied liegt darin, dass die Geometrische Algebra von Grassmann und Hestenes weit allgemeiner ist als die Quaternionenalgebra von Hamilton.

Hamiltons Quaternionen bilden lediglich eine geradzahlig Unteralgebra der Pauli-Algebra, da die quaternionischen Basiseinheiten i, j, k als Produkte zweier Pauli-Basiseinheiten³ dargestellt werden können [21, S. 34], [34, eq. 53], [33, eq. 16]:

$$i = \sigma_y \sigma_z \quad j = -\sigma_z \sigma_x \quad k = \sigma_x \sigma_y \quad \{3\}$$

Hestenes schreibt dazu: „The ironic thing about the vector-quaternion controversy is that there was nothing substantial to dispute“ [19, S. 61]. Die quaternionischen Basiseinheiten $\{3\}$ repräsentieren Einheits-Flächenstücke und damit Einheits-Bivektoren, während die Pauli-Basiseinheiten Einheitsvektoren repräsentieren.

Und die Pauli-Algebra, die die Geometrische Algebra des dreidimensionalen, Euklidischen Raumes darstellt, bildet wiederum eine Unteralgebra der Dirac-Algebra, da die Pauli-Basiseinheiten als Produkte zweier Dirac-Basiseinheiten³ dargestellt werden können [20, eq. 43], [22, S. 1193], [33, eq. 17]:

$$\sigma_x = \gamma_x \gamma_t \quad \sigma_y = \gamma_y \gamma_t \quad \sigma_z = \gamma_z \gamma_t \quad \{4\}$$

Da als zweiter Faktor in $\{4\}$ die zeitliche Basiseinheit γ_t anmultipliziert wird, wird hierdurch die vierdimensionale Raumzeit in einen dreidimensionalen, rein räumlichen (und somit zeitabsoluten) Raum reduziert.

Sind die algebraischen Grundbeziehungen der Dirac-Basiseinheiten geometrisch durch ihre Orthogonalität bzw. algebraisch durch ihre anti-kommutative Vertauschung

$$\begin{aligned} \gamma_x \gamma_y &= -\gamma_y \gamma_x & \gamma_y \gamma_z &= -\gamma_z \gamma_y & \gamma_z \gamma_x &= -\gamma_x \gamma_z \\ \gamma_x \gamma_t &= -\gamma_t \gamma_x & \gamma_y \gamma_t &= -\gamma_t \gamma_y & \gamma_z \gamma_t &= -\gamma_t \gamma_z \end{aligned} \quad \{5\}$$

sowie geometrisch durch ihre Einheitslänge bzw. algebraisch durch ihre raum- oder zeitartige Normierung

$$\gamma_t^2 = 1 \quad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1 \quad \{6\}$$

bekannt, so folgen automatisch die entsprechenden Beziehungen für die Pauli-Basiseinheiten $\{4\}$ und die quaternionischen Basiseinheiten $\{3\}$.

Es ist deshalb davon auszugehen, dass der Weg von den – wie Minkowski sagt – „engen und schwerfäll-

³ Die Basiseinheiten der Pauli-Algebra können als (2×2) -Matrizen dargestellt werden, müssen es jedoch nicht. Ebenso können die Basiseinheiten der Dirac-Algebra als (4×4) -Matrizen dargestellt werden, müssen es jedoch nicht. In beiden Fällen kann auch ohne explizite Repräsentation durch Matrizen gearbeitet werden.

ligen“ Quaternionen zu den im Kontrast dazu weiten, also allgemeineren und leichtfälligen, also einfach zu handhabenden Diracschen Basiseinheiten sehr viel früher und noch vor Entwicklung der Quantenmechanik gegangen worden wäre, hätte sich Minkowski für die zweite Alternative einer quaternionischen Mathematisierung der Speziellen Relativität entschieden.

Einen ähnlichen Standpunkt unter der Perspektive einer verpassten Chance („Missed Opportunities“ [35]) der Mathematik- und Physikentwicklung beschreibt Dyson in seiner Josiah Willard Gibbs-Vorlesung 1972: „When Grassmann's work finally became known, mathematicians (...) were spending more energy in polemical arguments for and against quaternions than in trying to understand how Grassmann and Hamilton might be fitted together into a larger scheme of things“ [35, S. 644].

Hätten sie die richtigen Fragen gestellt und darüber nachgedacht, warum „two quite different and incompatible algebraic structures“ [35, S. 644] gleichermaßen perfekt zur mathematischen Beschreibung unserer Welt herangezogen werden können, wäre ein vollständiges Verständnis der Beziehungen zwischen Quaternionen und Vektoren sowie die Theorie der Spinoren weit früher (und zwar „by approximately 40 years“ [35, S. 644]) erlangt worden.

Aus zweierlei Gründen ist die damalige Entscheidung von Minkowski zwar bedauerlich, aber auch nachvollziehbar. Zum einen ist es eine physikalisch geprägte Entscheidung zur Beschreibung eines physikalischen Sachverhalts, die deshalb auch mit einem der Physik eigenen mathematischen Opportunismus getroffen wurde.

Klein und Sommerfeld schreiben dazu: „Die Grassmann'sche Theorie geht bei der Aufzählung der Raumgrößen systematisch, die physikalische Vektorrechnung opportunistisch vor“ [31, S. 938].

Zum anderen lag damals zwar die mathematische Beschreibung von Rotationen durch die Hamiltonschen Vorarbeiten relativ sachklar und gefestigt vor. Eine ähnlich gut erarbeitete mathematische Beschreibung von Reflexionen, wie sie bei Verfolgung des in den vorigen Abschnitten 5 und 6 dargestellten geometrischen Ansatzes notwendig ist, war Minkowski wohl allerdings nicht bekannt.

Diese auf Grassmann aufbauende Mathematik der Reflexionen soll jedoch im folgenden Abschnitt zur algebraisch einfachen Darstellung der Speziellen Relativität genutzt werden.

8. Sandwich-Produkte zur Beschreibung raumzeitlicher Reflexionen und Rotationen

Wie in Abschnitt 2 bereits ausgeführt, basiert die hier gewählte mathematische Fassung der Abitur-Teilaufgabe auf einer didaktischen Umformung der Dirac-Algebra. Dabei werden raumzeitliche Vektoren \mathbf{r} als Linearkombinationen der Dirac-Matrizen,

die im schulischen Unterricht ohne ein Eingehen auf einen möglichen Matrizencharakter als Dirac-Vektoren bezeichnet werden, beschrieben:

$$\mathbf{r} = ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z \quad \{7\}$$

Reflexionen an einer Achse, die in Richtung eines Vektors \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = n_t \gamma_t + n_x \gamma_x + n_y \gamma_y + n_z \gamma_z \quad \{8\}$$

weist, werden durch Sandwich-Produkte [36, S. 258], [37] beschrieben. Dabei wird der raumzeitliche Vektor \mathbf{r} rechts- und linksseitig in Sandwich-Form mit dem Reflexionsvektor \mathbf{n} multipliziert.

Liegt der Reflexionsvektor bereits als zeitartiger Einheitsvektor \mathbf{n}_{ein} mit

$$\mathbf{n}_{\text{ein}}^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}_{\text{ein}} = \mathbf{n}_{\text{ein}}^{-1} \quad \{9\}$$

vor, so wird die Reflexion durch ein perfektes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n}_{\text{ein}} \mathbf{r} \mathbf{n}_{\text{ein}} \quad \{10\}$$

dargestellt. Im allgemeinen Fall eines Reflexionsvektors, der nicht zeitartig ist oder keine Einheitslänge aufweist, muss ein normiertes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{r} \mathbf{n}^{-1} = \mathbf{n}^{-1} \mathbf{r} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n} \mathbf{r} \mathbf{n}}{\mathbf{n}^2} \quad \{11\}$$

gebildet werden. Da das Vektorquadrat \mathbf{n}^2 ein Skalar ist, muss bei der Normierung mit Hilfe einer Division durch \mathbf{n}^2 auch nicht auf die Rechen-Reihenfolge geachtet werden.

Das ist ein erstaunlich einfacher Sachverhalt! Die Nutzung von oft recht unübersichtlichen und unhandlichen Reflexionsmatrizen kann entfallen. Es werden lediglich Multiplikationen des in der Mitte stehenden zu reflektierenden Vektors \mathbf{r} mit dem rechts- und linksseitig anmultiplizierten Reflexionsvektor benötigt.

Falls gewünscht kann diese mathematische Beschreibung raumzeitlicher Reflexionen mit Hilfe der Beziehungen {3} und {4} auch in die Quaternionendarstellung übertragen werden.

Im Gegensatz zu Minkowskis Einschätzung „eng und schwerfällig“ beschreiben Anwender aus der Praxis die Beziehung zwischen Matrizen und Quaternionen durchgängig genau umgekehrt, beispielsweise als: „We point out with some joy and just a bit of satisfaction that the quaternion approach does seem to be easier and more efficient than the matrix approach“ [38, S. 152].

Und die im folgenden Abschnitt vorzunehmende Übersetzung der in den vorigen Abschnitten diskutierten Abitur-Teilaufgabe in die Mathematik der Raumzeit-Algebra resp. Dirac-Algebra zeigt ebenso deutlich, dass diese geometrisch-algebraische Darstellung der Dirac-Algebra noch einfacher und noch effizienter sein wird.

Zuvor sollte aber noch kurz erwähnt werden, dass zur Darstellung der Lorentz-Transformationen nun

lediglich zwei Lorentz-Reflexionen hintereinander ausgeführt werden müssen.

Es wird somit eine zweite Reflexionsachse benötigt, die durch einen Vektor \mathbf{m} , der in ihre Richtung zeigt,

$$\mathbf{m} = m_t \gamma_t + m_x \gamma_x + m_y \gamma_y + m_z \gamma_z \quad \{12\}$$

repräsentiert wird. Handelt es sich wieder um einen zeitartigen Einheitsvektor \mathbf{m}_{ein} mit

$$\mathbf{m}_{\text{ein}}^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m}_{\text{ein}} = \mathbf{m}_{\text{ein}}^{-1} \quad \{13\}$$

so wird die Rotation als zweifache Reflexion durch das perfekte doppelte Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{m}_{\text{ein}} \mathbf{n}_{\text{ein}} \mathbf{r} \mathbf{n}_{\text{ein}} \mathbf{m}_{\text{ein}} \quad \{14\}$$

dargestellt.

Im allgemeinen Fall beliebig langer Reflexionsvektoren oder Reflexionsvektoren, die raumartig sind, muss das doppelte Sandwich-Produkt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{Lorentz}} = \mathbf{r}_{\text{rot}} &= \mathbf{m} \mathbf{n} \mathbf{r} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{m}^{-1} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{r} \mathbf{n} \mathbf{m} \\ &= \frac{\mathbf{m} \mathbf{n} \mathbf{r} \mathbf{n} \mathbf{m}}{\mathbf{n}^2 \mathbf{m}^2} \end{aligned} \quad \{15\}$$

normiert werden. Da durch die Skalare \mathbf{n}^2 und \mathbf{m}^2 dividiert wird, muss bei dieser Normierung auch nicht auf die Divisions-Reihenfolge geachtet werden.

Das ist das Geheimnis der Quaternionen. Quaternionen \mathcal{Q} beschreiben Rotationen deshalb in einer so überraschend effektiven Art und Weise, weil sie schichtweg das Produkt zweier Vektoren

$$\mathcal{Q} = \mathbf{m} \mathbf{n} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{n} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{n} \quad \{16\}$$

sind. Das gilt im Euklidischen, dreidimensionalen Fall auf Grundlage der Gleichung {3} genauso wie in beliebig höher-dimensionalen Fällen mit einer entsprechend höheren Anzahl an quaternionischen Basiseinheiten. Und es gilt im Fall räumlicher Rotationen genauso wie im Fall raumzeitlicher Lorentz-Rotationen.

Quaternionen und verallgemeinerte Quaternionen sind also nichts anderes als Linearkombinationen aus einem skalaren Wert $\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}$ und einem bivectoriell Anteil $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ der rechten Seite von Gl. {16}. Oder mit geometrischen Worten: Die Summe einer dimensionslosen Zahl und zweidimensionaler Flächenstücke ist ein Quaternion.

9. Geometrisch-algebraische Lösungsvarianten der modifizierten Abitur-Teilaufgabe

Auf Grundlage von Gl. {15} kann die oben vorgestellte Abituraufgabe nun auf verschiedenen mathematischen Schwierigkeitsstufen bearbeitet werden.

Im ersten Unterabschnitt werden lediglich eine Normierung mit Hilfe des relativistischen Pythagoras und die Grundlagen vektorielle Multiplikation (siehe die Gleichungen {5}) benötigt.

Im zweiten Unterabschnitt wird auf hyperbolische Winkelbeziehungen zurückgegriffen, was wohl nur für Schülerinnen und Schüler in Frage kommt, die

die entsprechenden Sachverhalte in einem Mathematik-Leistungskurs zuvor erarbeitet haben.

Während die ersten beiden Ansätze der Unterabschnitte 9.1 und 9.2 eine Reflexion an einer Achse in Richtung der zeitlichen Winkelhalbierenden, gefolgt von einer zweiten Reflexion an der ursprünglichen Zeitachse beschreiben, zeigt Unterabschnitt 9.3 zwei aufeinander folgende Reflexionen an den zeitlichen Winkel-Viertelnden.

Selbstredend werden durch alle Ansätze identische Ergebnisse ermittelt.

9.1. Beispielrechnung mit Normierung des Reflexionsvektors

Wie in Abschnitt 2 bereits vorgestellt, findet die Supernova aus Sicht von Dr. Pau an der Position

$$\mathbf{r}_3' = 10 \text{ Lj } \gamma_t + 5 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{17\}$$

statt. Dieser Positionsvektor ist in das Inertialsystem von Dr. Wolf zu transformieren. Wie in Abb. 5 gezeigt, verläuft die zeitliche Koordinatenachse von Dr. Wolf aus Sicht von Dr. Pau in Richtung des raumzeitlichen Ortsvektors

$$\mathbf{r}_2' = 4 \text{ Lj } \gamma_t - 1 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{18\}$$

Dieser Ortsvektor hat eine Länge von

$$|\mathbf{r}_2'| = \sqrt{(\mathbf{r}_2')^2} = \sqrt{15} \text{ Lj} \quad \{19\}$$

Um die in Abb. 6 gezeigte erste Reflexion an der Winkelhalbierenden zwischen der Weltlinie von Dr. Wolf {13} und der zeitlichen Koordinatenachse von Dr. Pau in Richtung von γ_t zu konstruieren, muss ein ebenso langer Vektor $\sqrt{15} \text{ Lj } \gamma_t$ in Richtung dieser Koordinatenachse zum raumzeitlichen Ortsvektor {18} addiert werden.

Der folgende Punkt

$$\mathbf{n}_1 = (4 + \sqrt{15}) \text{ Lj } \gamma_t - 1 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{20\}$$

liegt somit auf der gesuchten Winkelhalbierenden und kann als erster Reflexionsvektor verwendet werden.

Um die Normierung durchzuführen, wird das Längensquadrat dieses Reflexionsvektors von

$$\mathbf{n}_1^2 = 30 + 8\sqrt{15} \quad \{21\}$$

benötigt. Nun kann die in Abb. 6 gezeigte graphische Reflexion an der zeitlichen Winkelhalbierenden algebraisch gefasst werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2\text{ref}} &= \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{r}_3' \mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_1^2} \\ &= 3\sqrt{15} \text{ Lj } \gamma_t - 2\sqrt{15} \text{ Lj } \gamma_x \\ &\approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t - 7,75 \text{ Lj } \gamma_x \end{aligned} \quad \{22\}$$

Wie erwartet ergibt sich das bereits graphisch aufgefundene Ergebnis der Lorentz-Reflexion von Abschnitt 5.

Eine weitere Reflexion an der zeitlichen Koordinatenachse, die durch den zeitartigen Einheitsvektor

$$\mathbf{m}_1 = \gamma_t \quad \{23\}$$

repräsentiert werden kann, führt auf das Endergebnis der Lorentz-Rotation

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_{2\text{ref}} \mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1^2} = \mathbf{m}_1 \mathbf{r}_{2\text{ref}} \mathbf{m}_1 \\ &= 3\sqrt{15} \text{ Lj } \gamma_t + 2\sqrt{15} \text{ Lj } \gamma_x \quad \{24\} \\ &\approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t + 7,75 \text{ Lj } \gamma_x\end{aligned}$$

von Abschnitt 6. Damit ist die Lorentz-Transformation der Abitur-Teilaufgabe 2.2d algebraisch auf Grundlage der Raumzeit-Algebra (Dirac-Algebra) vollständig durchgeführt.

9.2. Nutzung hyperbolischer Funktionen

In diesem etwas anspruchsvolleren Lösungsansatz wird der Winkel $\alpha/2$, der zwischen Reflexionsachse und Koordinatenachse liegt, mit Hilfe einer Halbierung des Winkels α zwischen den beiden Weltlinien von Dr. Pau und Dr. Wolf bestimmt.

Da die Koordinaten eines Punktes der Weltlinie von Dr. Pau in der Aufgabenstellung (Abb. 1) gegeben sind, kann dieser Winkel unkompliziert über

$$\tanh \alpha = \frac{1 \text{ Lj}}{4 \text{ Lj}} = 0,25 \quad \{25\}$$

$$\alpha = \text{arc tanh } 0,25 = 0,2554 \quad \{26\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,1277 \quad \{27\}$$

bestimmt werden. Die zeitliche Winkelhalbierende wird somit durch den Reflexionsvektor

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_2 &= \cosh(\alpha/2) \gamma_t - \sinh(\alpha/2) \gamma_x \\ &= 1,0081 \gamma_t - 0,1281 \gamma_x \quad \{28\}\end{aligned}$$

repräsentiert. Da es sich mit

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_2^2 &= \cosh^2(\alpha/2) - \sinh^2(\alpha/2) \\ &= 1,0081^2 - 0,1281^2 = 1 \quad \{29\}\end{aligned}$$

nun um einen zeitartigen Einheitsvektor handelt, kann eine Normierung entfallen und direkt Gl. {10}

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{2\text{ref}} &= \mathbf{n}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{n}_2 \\ &= 11,6190 \text{ Lj } \gamma_t - 7,7460 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{30\} \\ &\approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t - 7,75 \text{ Lj } \gamma_x\end{aligned}$$

genutzt werden, was auf ein zu {22} identisches Ergebnis führt. Die zweite Reflexion ist dementsprechend ebenfalls zu Gl. {23} und {24} identisch und ergibt mit

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \mathbf{m}_2 \mathbf{r}_{2\text{ref}} \mathbf{m}_2 = \gamma_t \mathbf{r}_{2\text{ref}} \gamma_t \\ &= 11,6190 \text{ Lj } \gamma_t + 7,7460 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{31\} \\ &\approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t + 7,75 \text{ Lj } \gamma_x\end{aligned}$$

das erwartete Ergebnis.

9.3. Reflexion an den Winkel-Viertelnden

Aus Gl. {26} folgt unkompliziert

$$\frac{\alpha}{4} = 0,0639 \quad \{32\}$$

$$\frac{3\alpha}{4} = 0,1916 \quad \{33\}$$

so dass die beiden Reflexionsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_3 &= \cosh(3\alpha/4) \gamma_t - \sinh(3\alpha/4) \gamma_x \\ &= 1,0184 \gamma_t - 0,1927 \gamma_x \quad \{34\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_3 &= \cosh(\alpha/4) \gamma_t - \sinh(\alpha/4) \gamma_x \\ &= 1,0020 \gamma_t - 0,0639 \gamma_x \quad \{35\}\end{aligned}$$

lauten werden. Wiederum handelt es sich aufgrund

$$\mathbf{n}_3^2 = \mathbf{m}_3^2 = 1 \quad \{36\}$$

um zeitartige Einheitsvektoren, so dass die Reflexionen als einfache Sandwich-Produkte ohne Normierung berechnet werden können:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{2\text{neu}} &= \mathbf{n}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{n}_3 \quad \{37\} \\ &= 12,7052 \text{ Lj } \gamma_t - 9,2963 \text{ Lj } \gamma_x\end{aligned}$$

Eine kurze Probe durch

$$12,7052^2 - (-9,2963)^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \quad \{38\}$$

zeigt, dass dieses Zwischenergebnis korrekt ist. Die zweite raumzeitliche Reflexion lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \mathbf{m}_3 \mathbf{r}_{2\text{neu}} \mathbf{m}_3 \\ &= 11,6190 \text{ Lj } \gamma_t + 7,7460 \text{ Lj } \gamma_x \quad \{39\} \\ &\approx 11,62 \text{ Lj } \gamma_t + 7,75 \text{ Lj } \gamma_x\end{aligned}$$

Auch hier kann ein kurze Probe mit

$$\begin{aligned}(3\sqrt{15})^2 - (2\sqrt{15})^2 &= 135 - 60 \quad \{40\} \\ &= 10^2 - 5^2 = 75\end{aligned}$$

bestätigen, dass das Ergebnis sinnvoll und korrekt ist.

10. GAALOP

Die in den drei Unterabschnitten von Abschnitt 9 benötigten algebraischen Schritte können bei eingeübter und gefestigter Rechenroutine durch die Lernenden Schritt für Schritt von Hand selbst vorgenommen oder recht einfach nachvollzogen werden.

Im Wesentlichen handelt es sich bei allen Lösungsvarianten um eine Berechnung unterschiedlicher Multiplikationen raumzeitlicher Größen, die unter Beachtung der Vertauschungs- {5} und Normierungsregeln {6} bei entsprechend vorhandenen zeitlichen Ressourcen auch problemlos durch Lernende selbst vorgenommen werden können.

Allerdings können äußere Umstände wie beispielsweise zeitliche Einschränkungen oder lernstrategische Hemmnisse wie beispielsweise eine rechnerische Ungeübtheit aufgrund der bei zahlreichen Schülerinnen und Schülern oder Studierenden vorhandenen Fixierung auf eine Taschenrechner-Nutzung die Berechnung der notwendigen raumzeitlichen Multiplikationen stören, stark behindern oder bei starken Rechendefiziten eventuell sogar gänzlich unmöglich machen.

Deshalb ist es sinnvoll, didaktische Alternativen bzw. den Einsatz von Hilfsmitteln in Betracht zu ziehen. Da derzeit allerdings keine schulischen Ta-

schonrechner auf dem Markt sind, die Rechnungen zur Raumzeit-Algebra (Dirac-Algebra) zulassen, müsste hier ein entsprechender Taschenrechner-Ersatz zur Anwendung kommen.

Als ein solcher Taschenrechner-Ersatz kann das Programm-Tools „Geometric Algebra Algorithms Optimizer“ (GAALOP) genutzt werden. Jedoch ist dabei auch zu beachten, dass diese Nutzung von GAALOP als geometrisch-algebraischer Taschenrechner-Ersatz [39] – [42] in gewisser Weise einen didaktisch motivierten ‚Missbrauch‘ dieses Programm-Tools darstellt.

Ursprünglich war GAALOP [43] – [47] von seinen Entwicklern als ein Werkzeug gedacht, mit dessen Hilfe Rechenschritte der Geometrischen Algebra in Programme integriert werden können, die in Standard-Programmiersprachen verfasst sind und keine Rechnungen zur Geometrischen Algebra zulassen.

Das im Compiler-Feld angezeigte Resultat der Programmoptimierung enthält deshalb immer auch Syntax-Anteile, die eine solche Einbindung ermöglichen und die bei einer Nutzung als Taschenrechner-Ersatz zu ignorieren sind.

Da die Programm-Syntax von GAALOP recht einfach und die Anwendung nahezu selbsterklärend ist und in der Regel nach kurzer Erläuterung von den Studierenden verstanden werden, ergeben sich bei einem Gebrauch als Taschenrechner-Ersatz kaum größere Schwierigkeiten.

Darüber hinaus steht GAALOP kostenfrei zur Verfügung und kann im Internet unter der Adresse www.gaalop.de/download [43] problemlos heruntergeladen und installiert (siehe Abb. 8) werden.



Abb.8: Download des Programm-Tools GAALOP.

Zur Notation muss lediglich gesagt werden, dass die als Basisvektoren gedeuteten Dirac-Matrizen durchnummeriert und als Einheitsvektoren nun mit lateinischen Buchstaben darzustellen sind:

$$\begin{aligned}
 \gamma_t &\longrightarrow e_1 \\
 \gamma_x &\longrightarrow e_2 \\
 \gamma_y &\longrightarrow e_3 \\
 \gamma_z &\longrightarrow e_4
 \end{aligned}
 \quad \{41\}$$

Die drei unterschiedlichen Multiplikationsformen {16} werden ebenso intuitiv einsichtig übertragen als

$$\begin{aligned}
 \text{Geometrische Multiplikation: } m n &\longrightarrow m * n \\
 \text{Innere Multiplikation: } m \bullet n &\longrightarrow m \cdot n \\
 \text{Äußere Multiplikation: } m \wedge n &\longrightarrow m \wedge n
 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich auch die logischen Darstellungen der Basis-Bivektoren

$$\begin{aligned}
 \gamma_x \gamma_t &\longrightarrow e_2 * e_1 \quad \text{und} \quad \gamma_x \gamma_y &\longrightarrow e_2 * e_3 \\
 \gamma_y \gamma_t &\longrightarrow e_3 * e_1 \quad \text{und} \quad \gamma_y \gamma_z &\longrightarrow e_3 * e_4 \\
 \gamma_z \gamma_t &\longrightarrow e_4 * e_1 \quad \text{und} \quad \gamma_z \gamma_x &\longrightarrow e_4 * e_2
 \end{aligned}
 \quad \{43\}$$

Und das Berechnungsziel wird angegeben, indem die gesuchte Größe durch Angabe eines vorgesetzten Fragezeichens gekennzeichnet wird.

Für die in Abschnitt 11 gezeigten Musterlösungen wurden die folgenden Einstellungen gewählt:

- Algebra to use: **st4d – space-time**
- Visual Code Inserter: **Visual Code Inserter**
- Optimization: **Table-Based Approach**
- Code Generator: **TEX LaTeX**

Nach einer einführenden Einübung der Grundlagen von GAALOP (beispielsweise durch einfache Flächenberechnungen oder rein räumliche Rotationen [42]) können dann Lorentz-Transformationen als raumzeitliche Rotationen mit GAALOP rechnerisch gelöst werden.

11. Lorentz-Rotationen mit GAALOP

In diesem Abschnitt werden nun die bereits in 9.1 bis 9.3 vorgestellten Lösungsstrategien in GAALOP-Programme übertragen. Dazu müssen lediglich die vorgegebenen Größen in GAALOP angegeben und die Lorentz-Rotationsformel {15} korrekt umgesetzt werden

11.1. GAALOP-Beispiel mit Normierung des Reflexionsvektors

In Abb. 9 wird das GAALOP-Programm zur ersten Lösungsstrategie gezeigt. Angegeben werden die Position der Supernova aus Sicht von Dr. Pau {17} sowie die beiden Reflexionsvektoren {20} und {23}. Da GAALOP keine Wurzelberechnungen vornimmt, muss der zur Normierung notwendige Wert von $\sqrt{15} = 3,87298335$ gesondert angegeben werden.

Damit entfallen vier der fünf Zeilen des Programms auf die Angabe der gegebenen Größen. Die Angabe der eigentlichen raumzeitlichen Rotation benötigt nur eine einzige Programmzeile.

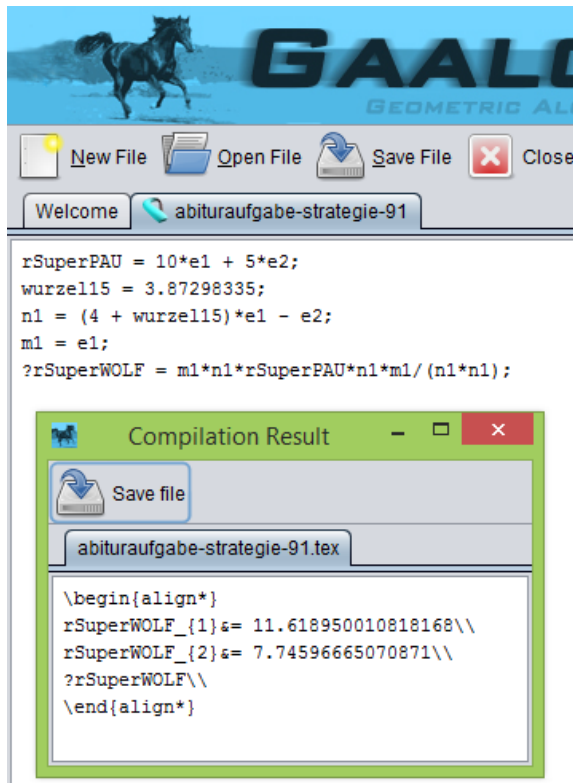
Die mathematische Eleganz dieses Grassmannschen Ansatzes spiegelt sich hier auch in der Kürze des GAALOP-Programms wider.

Nach Aktivierung des Optimize-Buttons werden die Rechenschritte vom Programm ausgeführt.

Das Ergebnis wird in einem sich öffnenden Compiler-Feld ausgegeben, wobei die zeitliche Koordinate des Positionsvektors der Supernova aus Sicht von

Dr. Wolf hier im Beispiel mit $r_{\text{SuperWOLF}_{\{1\}}$ gekennzeichnet wird, während die räumliche Koordinate der x -Richtung $r_{\text{SuperWOLF}_{\{2\}}$ entsprechend der Zuordnungen $\{41\}$ mit dem Indexwert zwei versehen ist.

Das Ergebnis zeigt die erwarteten Werte, die ab der achten Nachkommastelle Rundungsungenauigkeiten aufweisen.



```

rSuperPAU = 10*e1 + 5*e2;
wurzel115 = 3.87298335;
n1 = (4 + wurzel115)*e1 - e2;
m1 = e1;
?rSuperWOLF = m1*n1*rSuperPAU*n1*m1/(n1*n1);

```

```

\begin{align*}
r_{\text{SuperWOLF}_{\{1\}}} &= 11.618950010818168 \\
r_{\text{SuperWOLF}_{\{2\}}} &= 7.74596665070871 \\
?r_{\text{SuperWOLF}} & \\
\end{align*}

```

Abb.9: GAALOP-Programm der ersten Lösungsstrategie mit Normierung des Reflexionsvektors.

11.2. GAALOP-Beispiel zur Nutzung hyperbolischer Funktionen

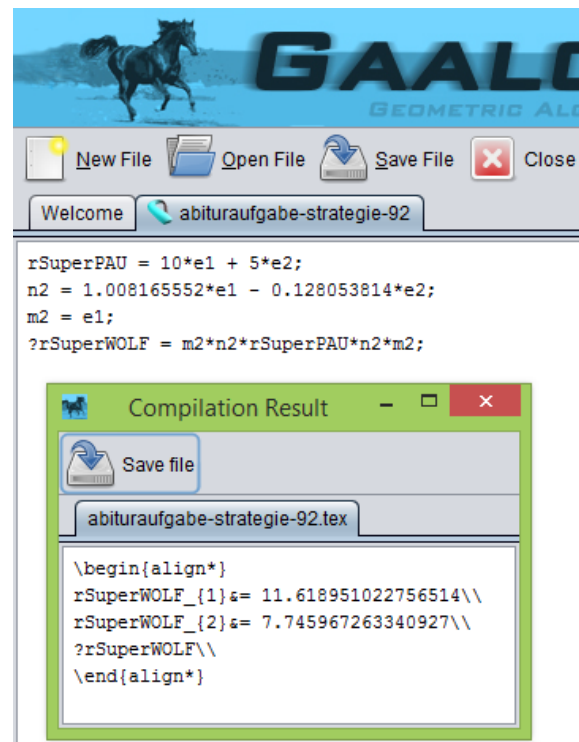
Nachdem mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen die entsprechenden Werte der Winkelhalbierenden für $\cosh \alpha/2$ und $\sinh \alpha/2$ ermittelt wurden, können die gegebenen Größen in den ersten drei Zeilen des GAALOP-Programms (siehe Abb. 10) eingegeben werden.

Erneut benötigt die Angabe des eigentlichen Rechenschritts nur eine einzige Programmzeile. Und erneut weist die Kürze dieses GAALOP-Programms deutlich auf die mathematische Eleganz dieses Ansatzes hin.

Auch aus diesem Grund schreibt Hestenes: „... for applications to rotations, quaternions are demonstrably more efficient than the vectorial and matrix methods taught in standard physics courses. The difference hardly matters in the world of academic exercises, but in the aerospace industry, for instance, where rotations are bread and butter, engineers opt for quaternions“ [34, S. 106].

Würden Ingenieure der Luftfahrtindustrie Flugzeuge für einen Gebrauch in der vierdimensionalen Raumzeit konstruieren, würden sie sich folgerichtig für eine Mathematisierung mit Hilfe von verallgemeinerten Quaternionen auf Grundlage der Dirac-Algebra entscheiden.

Die Frage von Rundungsungenauigkeiten – hier nun ab der sechsten Nachkommastelle – spielt dagegen eine technisch untergeordnete Rolle.



```

rSuperPAU = 10*e1 + 5*e2;
n2 = 1.008165552*e1 - 0.128053814*e2;
m2 = e1;
?rSuperWOLF = m2*n2*rSuperPAU*n2*m2;

```

```

\begin{align*}
r_{\text{SuperWOLF}_{\{1\}}} &= 11.618951022756514 \\
r_{\text{SuperWOLF}_{\{2\}}} &= 7.745967263340927 \\
?r_{\text{SuperWOLF}} & \\
\end{align*}

```

Abb.10: GAALOP-Programm der zweiten Lösungsstrategie mit Nutzung hyperbolischer Funktionen.

11.3. GAALOP-Beispiel zur Reflexion an den Winkel-Viertelenden

Erneut sind lediglich drei Programmzeilen zur Eingabe der raumzeitlichen Position der Supernova aus Sicht von Dr. Pau und der raumzeitlichen Lage der Winkel-Viertelenden notwendig.

Und erneut erfordert die Angabe des eigentlichen Rechenschritts nur eine einzige Programmzeile.

Wie in Unterabschnitt 9.3 gezeigt, kann die räumliche Lage der Winkel-Viertelenden mit Hilfe trigonometrischer Hyperbelfunktionen ermittelt werden.

Alternativ ist es jedoch auch möglich, die Lage der Winkel-Viertelenden durch die Addition eines Einheitsvektors in Richtung der Winkelhalbierenden und eines Einheitsvektors in Richtung der zeitlichen ct -Achse von Dr. Wolf bzw. von Dr. Pau zu bestimmen.

Da diese Summe in unterschiedliche Richtungen weisenden Einheitsvektoren selbst kein Einheitsvektor sein wird, ist hier dann wieder eine Normie-

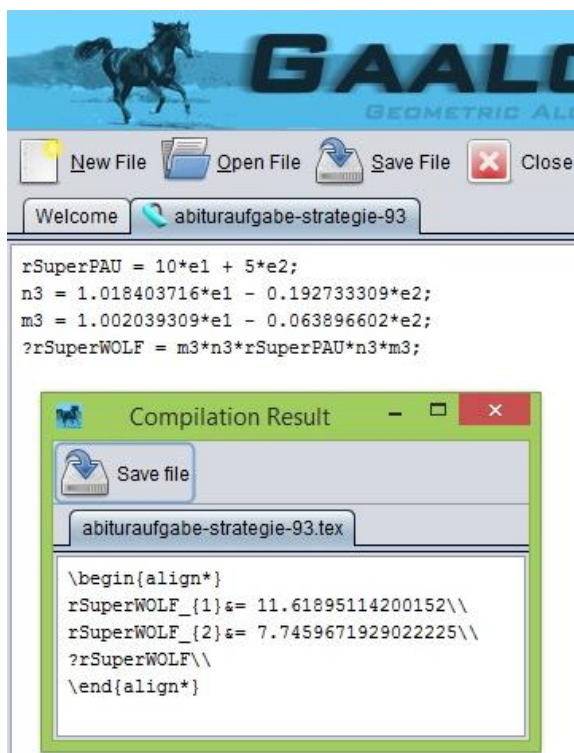


Abb.11: GAALOP-Programm der dritten Lösungsstrategie mit Reflexion an den Winkel-Viertelenden.

zung mit Hilfe des relativistischen und damit raumzeitlichen Satzes von Pythagoras notwendig.

Die konkrete Umsetzung dieser vierten Strategie mit GAALOP, die ohne eine Nutzung hyperbolischer Zusammenhänge zur Lösung führt, ist im beigefügten Poster der GDCP-Jahrestagung 2017 in Regensburg [52, Strategie IV] zu finden.

12. Schlussfolgerung

Mit Hilfe des Programm-Tools GAALOP können Berechnungen zur Speziellen Relativität zeitsparend und effektiv durchgeführt werden. GAALOP erfüllt damit die Funktion eines einfach zu handhabenden und intuitiv zugänglichen Taschenrechner-Ersatzes.

Kenntnisse von Hyperbel-Funktionen sind keine notwendige Voraussetzung. Lernende sollten lediglich ein Grundverständnis für die Multiplikationsregeln der Geometrischen Algebra und Raumzeit-Algebra (Dirac-Algebra) mitbringen.

Dies dürfte bei einer ausführlichen Erörterung des raumzeitlichen Satzes von Pythagoras auch schulisch gut umsetzbar sein.

13. Ausblick: Achsenvertauschungen

Bis heute heute haben wir die Spezielle Relativitätstheorie noch nicht vollständig verstanden.

Letztendlich wird in diesem Beitrag die Lorentz-Transformation als eine mathematische Operation aufgefasst, bei der die Lage der zeitlichen und räumlichen Achsen eines ersten Koordinatensystems (also in Abb. 5 die ct-Achse und die x-Achse des auf der Erde zurückbleibenden Beobachters Dr. Wolf) in die

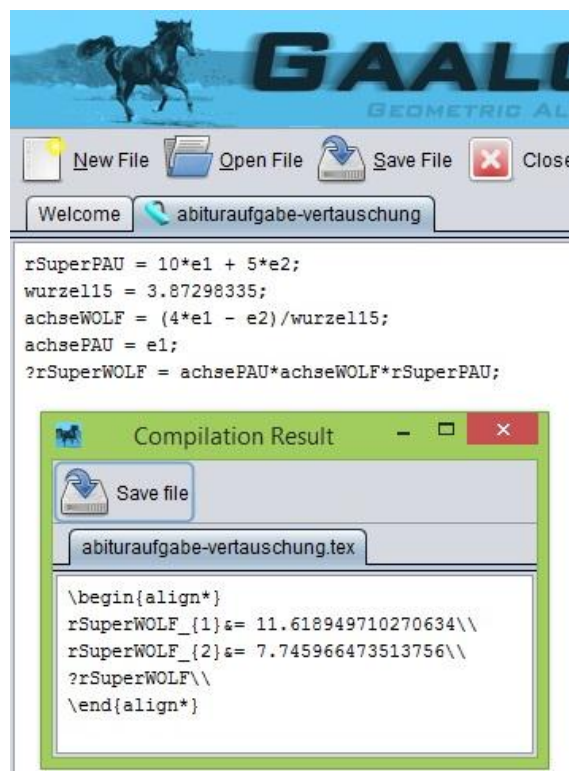


Abb.12: GAALOP-Programm der alternativen Lösungsstrategie zur Achsenvertauschung.

ursprüngliche Lage der zeitlichen und räumlichen Achsen eines zweiten Koordinatensystems (also in Abb. 5 die ct'-Achse und x'-Achse des sich in der Rakete befindlichen Dr. Pau) überführt werden.

Dadurch können die Koordinaten eines Ereignisses (also in Abb. 5 die Koordinaten der Supernova), dessen Lage im zweiten Koordinatensystem bekannt ist, für das erste Koordinatensystem ermittelt werden.

Diese Bestimmung der Koordinaten kann rechnerisch erfolgen oder zeichnerisch, indem Streckenlängen gemessen und über den relativistischen Pythagoras in raumzeitliche Distanzen umgerechnet werden.

Diese Umrechnung ist natürlich dann besonders einfach, wenn raumzeitlich senkrecht stehende Strecken auch auf dem von Natur aus euklidischen Papier senkrecht eingezeichnet werden können. Das ist der konzeptuelle Kern der Abbildungen 6 und 7: Der Umrechnungsfaktor der abgelesenen Streckenlängen von Dr. Wolf beträgt genau 1, so dass ein Zentimeter genau einem Lichtjahr entspricht.

Diese Überführung der Achsen eines Koordinatensystems in ein zweites wird im Rahmen konventioneller Beschreibungen der Lorentz-Transformationen immer als raumzeitliche Rotation verstanden und durchgeführt.

Im zweidimensionalen Fall gibt es jedoch noch eine sehr einfache Alternative, die die Interpretation der zweidimensionalen Lorentz-Transformation unter ei-

nem weiteren Blickwinkel erscheinen lässt: An Stelle einer raumzeitlichen Rotation kann eine raumzeitliche Achsenvertauschung vorgenommen werden [49], [50].

Dabei wird an Stelle eines reinen Sandwich-Produktes {10} und {11}, bei dem identische Größen rechts- und linksseitig anmultipliziert werden, ein gemischtes Sandwich-Produkt gebildet, indem unterschiedliche Größen rechts- und linksseitig an die zu transformierende Größe anmultipliziert werden.

Wird der raumzeitliche Ortsvektor {7}

$$\mathbf{r}_{\text{alt}} = ct \gamma_{t\text{-alt}} + x \gamma_{x\text{-alt}} + y \gamma_{y\text{-alt}} + z \gamma_{z\text{-alt}} \quad \{44\}$$

beispielsweise rechtsseitig mit dem Basisvektor $\gamma_{t\text{-alt}}$ in Richtung der ursprünglichen Zeitachse und linksseitig mit einem neuen Basisvektor $\gamma_{t\text{-neu}}$ in Richtung einer neuen Zeitachse multipliziert, so werden die beiden Zeitachsen vertauscht.

Die ursprüngliche Zeitachse wird durch die neue Zeitachse ersetzt:

$$\mathbf{r}_{\text{fast neu}} = \gamma_{t\text{-neu}} \mathbf{r}_{\text{alt}} \gamma_{t\text{-alt}} \quad \{45\}$$

$$= ct \gamma_{t\text{-neu}} + x \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{x\text{-alt}} \gamma_{t\text{-alt}} + y \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{y\text{-alt}} \gamma_{t\text{-alt}} + z \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{z\text{-alt}} \gamma_{t\text{-alt}}$$

Allerdings treten hierbei zwei Nebenwirkungen auf.

Zum ersten wird durch diese Achsenvertauschung die Orientierung des Koordinatensystems geändert. Aus einem ursprünglich rechtshändigen raumzeitlichen Koordinatensystem wird ein linkshändiges.

Dieser Nebeneffekt kann jedoch leicht korrigiert werden, indem nach der oben beschriebenen Achsenvertauschung eine Reflexion an der alten Zeitachse, die durch den Basisvektor $\gamma_{t\text{-alt}}$ repräsentiert wird, vorgenommen wird.

Der neue raumzeitliche Ortsvektor lautet dann:

$$\mathbf{r}_{\text{neu}} = \gamma_{t\text{-alt}} \gamma_{t\text{-neu}} \mathbf{r}_{\text{alt}} \quad \{46\}$$

$$= ct \gamma_{t\text{-alt}} \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{t\text{-alt}} + x \gamma_{t\text{-alt}} \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{x\text{-alt}} + y \gamma_{t\text{-alt}} \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{y\text{-alt}} + z \gamma_{t\text{-alt}} \gamma_{t\text{-neu}} \gamma_{z\text{-alt}}$$

Die zweite Nebenwirkung ist jedoch gravierender. Es werden die rein vektoriellen Komponenten des alten Ortsvektors in Komponenten überführt, die nicht nur vektorielle und somit streckenartige, sondern auch trivektorielle und somit volumenartige Anteile aufweisen.

Eindimensionale Längen transformieren sich teilweise in dreidimensionale Rauminhalte. Die physikalische Deutung dieser zusätzlichen Volumina ist noch nicht vollständig geklärt. Es ist jedoch sinnvoll, diese als zusätzlich generierte Felder [49] zu interpretieren.

Im zweidimensionalen Fall der hier diskutierten modifizierten Abituraufgabe können jedoch keine zusätzlich generierten trivektoriellen Felder entstehen, da ein zweidimensionaler Raum oder eine zweidimensionale Raumzeit schlicht keinen Platz für dreidimensionale Größen hat.

Aus diesem Grund muss die zweidimensionale Achsenvertauschung zur zweidimensionalen Rotation identisch sein.

Daraus kann auch gefolgert werden, dass nur senkrecht zur Vertauschungsebene stehende Vektorkomponenten in trivektorielle Anteile überführt werden. Auch aus diesem Grund müssen im Zweidimensionalen Achsenvertauschung und Rotation vollständig identisch sein.

Der raumzeitliche Ortsvektor der Supernova aus Sicht von Dr. Pau \mathbf{r}_3 {17} wird somit gemäß {46} mit den beiden zeitlichen Basisvektoren

$$\gamma_{t\text{-alt}} = \gamma_t \quad \{47\}$$

sowie auf Grundlage von {18} und {19}

$$\gamma_{t\text{-neu}} = \frac{\mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_2'|} = \frac{1}{\sqrt{15}} (4 \text{Lj } \gamma_t - 1 \text{Lj } \gamma_x) \quad \{48\}$$

linksseitig multipliziert. Dabei ergibt sich nach Gl. {46} mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{15}} \gamma_t (4 \text{Lj } \gamma_t - 1 \text{Lj } \gamma_x) (10 \text{Lj } \gamma_t + 5 \text{Lj } \gamma_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} (40 \text{Lj } \gamma_t + 20 \text{Lj } \gamma_x + 10 \text{Lj } \gamma_x + 5 \text{Lj } \gamma_t) \\ &= 3\sqrt{15} \text{Lj } \gamma_t + 2\sqrt{15} \text{Lj } \gamma_x \\ &\approx 11,62 \text{Lj } \gamma_t + 7,75 \text{Lj } \gamma_x \end{aligned} \quad \{49\}$$

das tatsächlich erwartete Ergebnis.

Dieses Ergebnis können Schülerinnen und Schüler, denen eine Berechnung von

$$1 \cdot 4 \cdot 10 = 40 \quad \text{bzw.} \quad 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20 \quad \{50\}$$

und unter Beachtung zusätzlicher Minuszeichen aufgrund der Normierungs- und Vertauschungsregeln

$$(-1) \cdot 10 \cdot (-1) = 10$$

$$\text{bzw.} \quad (-1) \cdot 5 \cdot (-1) = 5 \quad \{51\}$$

ohne einen relativistischen Taschenrechner nicht zugemutet werden möchte, auch mit Hilfe von GAALOP (siehe Abb. 12) erzielen.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Nutzung von Achsenvertauschungen an Stelle von Rotationen bei zweidimensionalen Situationen tatsächlich nicht nur praktikabel, sondern auch sinnvoll und sehr effektiv ist.

Und sie funktioniert so einfach [50], [51] und so überzeugend, dass eine solche mathematische Modellierung auch im schulischen Rahmen – auf jeden Fall mit Leistungskursschülern sowie mit Unterstützung durch GAAOP auch mit Grundkursschülern – durchgeführt und mit Schülerinnen und Schülern sachangemessen diskutiert werden kann.

14. Literatur

- [1] Derbyshire, John (2006): *Unknown Quantity. A Real and Imaginary History of Algebra*. Joseph Henry Press, Washington.

- [2] Gericke, Helmuth (1992): *Mathematik in Antike und Orient & Mathematik im Abendland*. Sonderausgabe in einem Band. Fourier-Verlag, Wiesbaden.
- [3] Wußing, Hans (2008): *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] Grcar, Joseph Frank (2011): *Mathematicians of Gaussian Elimination*. In: *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 58, No. 6, S. 782-792.
- [5] Grcar, Joseph Frank (2011): *How Ordinary Elimination Became Gaussian Elimination*. In: *Historia Mathematica*, Vol. 38, No. 2, S. 163-218.
- [6] Gruss, Peter (2006): *Von der Erkenntnis zum Gewinn – Technologietransfer aus der Grundlagenforschung*. Rede beim Unternehmertreff ZENIT in Mülheim an der Ruhr. Auszugsweise veröffentlicht in: Iris Karabelas, Mechthild Schmid (Red.), (2014): *Amtszeit Peter Gruss 2002 – 2014*. S. 78-82. Booklet der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, München.
- [7] Ashby, Neil (2002): *Relativity and the Global Positioning System*. In: *Physics Today*, May 2002, S. 41-47.
- [8] Rietz, Helga (2016): *Integrieren wie die Babylonier*. In: *Neue Zürcher Zeitung*, Online-Ausgabe vom 28. Jan. 2016, URL: www.nzz.ch/wissenschaft/astronomie/integriern-wie-die-babylonier-1.18685442 (02.07.2017).
- [9] Ossendrijver, Mathieu (2016): *Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph*. In: *Science*, Vol. 351, Issue 6272 (29.01.2016), S. 482-484, URL: <http://science.sciencemag.org/content/351/6272/482> (02.07.2017).
- [10] Nestler, Ralf (2016): *Geniale Mathematiker, diese Babylonier!* In: Online-Ausgabe der ZEIT vom 29. Jan. 2016, URL: www.zeit.de/wissen/2016-01/astronomie-mathematik-babylon-geometrie-jupiter (02.07.2017).
- [11] Planck, Max (1915): *Eight Lectures on Theoretical Physics delivered at Columbia University in 1909*. Columbia University Press, New York.
- [12] Biener, Klaus (2005): *Hermann Minkowski – Mathematiklehrer Einsteins*. In: *Computer- und Medienservice der Humboldt-Universität Berlin*, cms-journal 27, August 2005, S. 77-78.
- [13] Pauli, Wolfgang (1994): *Writings on Physics and Philosophy*. Herausgegeben von Charles P. Enz und Karl von Meyenn. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [14] Einstein, Albert (1905): *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. In: *Annalen der Physik*, Vol. 17, S. 891-921.
- [15] Bondi, Hermann (1971): *Mythen und Annahmen in der Physik*. VR Kleine Vandenhoeck Reihe 323/324/325, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- [16] Feynman, Richard P. (2006): *Physik »The Lost Lectures«*. Pearson Studium, München.
- [17] Feynman, Richard P. (1967): *The Character of Physical Law*. First MIT Press Paperback Edition, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [18] Horn, Martin Erik (2010): *Die Raumzeit-Algebra im Abitur*. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik*, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2010, Beitrag 28.4. URL: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/192 (31.12.2010).
- [19] Hestenes, David (2002): *New Foundations for Classical Mechanics*. Second edition, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.
- [20] Hestenes, David (2003). *Spacetime Physics with Geometric Algebra*. In: *American Journal of Physics*, Vol. 71, No. 7, 691-714.
- [21] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [22] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): *Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime*. In: *Foundations of Physics*, Vol. 23, No. 9, S. 1175-1201.
- [23] Horn, Martin Erik (2009): *Die Spezielle Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra*. In: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebauch (Hrsg.): *Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, Beitrag 30.40. LOB – Lehmanns Media, Berlin.
- [24] Horn, Martin Erik (2009): *Arbeitsbögen zur Geometrischen Algebra und zur Raumzeit-Algebra*. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [23].
- [25] Horn, Martin Erik (2011): *Grassmann, Pauli, Dirac: Special Relativity in the Schoolroom*. In: Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, Steve Russ (Hrsg.). *From Past to Future – Grassmann's Work in Context*. Grassmann Bicentennial Conference, S. 435-450, Birkhäuser-Verlag/Springer, Basel, Berlin.
- [26] Liebscher, Dierck-Ekkehard (1991): *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*. Zweite, durchgesehene und erweiterte Auflage, Akademie Verlag, Berlin.
- [27] Scriba, Christoph J.; Schreiber, Peter (2010): *5000 Jahre Geometrie. Geschichte • Kulturen • Menschen*. Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

- [28] Minkowski, Hermann (1910): Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin.
- [29] Silberstein, Ludwig (1932): Quaternionic Form of Relativity. In: *Philosophical Magazine Series 6*, Vol. 23, No. 137 (LXXVI.), S. 790-809.
- [30] Lanczos, Cornelius (1919/2004): Die Funktionentheoretischen Beziehungen der Maxwell'schen Äthergleichungen. Ein Beitrag zur Relativitäts- und Elektronentheorie. Dissertation, Universität Budapest, Verlagsbuchhandlung Josef Német, Budapest. Reprint und englische Übersetzung: *The Functional Theoretical Relationships of the Homogenous Maxwell Equations. A Contribution to the Theory of Relativity and Electrons*. arXiv:physics/0408079v1, Url: <http://arxiv.org/abs/physics/0408079> (17.08.2004).
- [31] Klein, Felix; Sommerfeld, Arnold (1910): Über die Theorie des Kreisels. Heft IV – Die Technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.
- [32] Girard, Patrick R. (2007): *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- [33] Horn, Martin Erik (2010): Reconsidering and Rethinking Quaternionic Special Relativity. In: Vaclav Skala, Eckhard Hitzer (Hrsg.): *GraVisMa 2010 Workshop Proceedings. Second International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics*, S. 123-129. Union Agency, Plzen.
- [34] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: *American Journal of Physics*, Vol. 71, No. 2, S. 104-121.
- [35] Dyson, Freeman J. (1972): Missed Opportunities. Josiah Willard Gibbs Lecture of January 17, 1972. In: *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 78, No. 5. S. 635-652.
- [36] Vince, John (2010): *Mathematics for Computer Graphics*. Third edition, Springer-Verlag, London, Heidelberg.
- [37] Horn, Martin Erik (2015): Sandwich Products and Reflections. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015*, Beitrag 17.7. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642 (17.12.2015).
- [38] Kuipers, Jack B. (1999): *Quaternions and Rotation Sequences. A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [39] Horn, Martin Erik (2017): Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz. In: Ulrich Kortenkamp, Ana Kuzle (Hrsg.): *BzMU 2017 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der Jahrestagung der GDM 2017 in Potsdam*, Bd. 2, S. 461-464. WTM-Verlag, Münster.
- [40] Horn, Martin Erik (2018): Solutions of Two Problems about Systems of Simultaneous Linear Equations from Old Babylonia and from the Han Period with GAALOP as a Pocket Calculator Substitute. Erweiterte und ins Englische übersetzte Fassung des GDM-Beitrags „Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz“ [39]. Zur Veröffentlichung vorgesehen als Anhang des Beitrags [41].
- [41] Horn, Martin Erik (2018): *Die Geometrische Algebra mit GAALOP im Schnelldurchgang*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg 2018*, Beitrag 02.03.
- [42] Horn, Martin Erik (2018): GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner. In: Christian Maurer (Hrsg.): *Qualitätvoller Chemie- und Physikunterricht – normative und empirische Dimensionen*. Tagungsband der Jahrestagung der GDGP in Regensburg 2017, Band 38, S. 703-706, Universität Regensburg.
- [43] GAALOP-Entwicklerteam – Pitt, Joachim; Hildenbrand, Dietmar; Schwinn, Christian; Charrier, Patrick; Steinmetz, Christian (2017): Homepage des Programm-Tools Geometric Algebra Algorithms Optimizer – GAALOP website. Url: <http://www.gaalop.de> (25.02.2017).
- [44] Hildenbrand, Dietmar; Pitt, Joachim; Koch, Andreas (2010): Gaalop – High Performance Parallel Computing Based on Conformal Geometric Algebra. In: Eduardo Bayro-Corrochano, Geric Scheuermann (Hrsg.): *Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science*, S. 477-494. Springer-Verlag, London.
- [45] Schwinn, Christian; Hildenbrand, Dietmar; Stock, Florian; Koch, Andreas (2010): Gaalop 2.0 – A Geometric Algebra Algorithm Compiler. In: Vaclav Skala, Eckhard Hitzer (Hrsg.): *GraVisMa 2010 Workshop Proceedings. Second International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics*, S. 1-8. Union Agency, Plzen.
- [46] Steinmetz, Christian (2011): *Optimizing a Geometric Algebra Compiler for Parallel Architectures using a Table-Based Approach*. Bachelor-Thesis, eingereicht am Fachbereich Informatik der Technischen Universität Darmstadt.
- [47] Hildenbrand, Dietmar (2013): *Foundations of Geometric Algebra Computing*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [48] Toth, Imre (1979): Spekulationen über die Möglichkeit eines nicht euklidischen Raumes vor Einstein. In: H. Nelkowski, H. Poser, A. Hermann, R. Schrader, R. Seiler (Hrsg.): *Einstein Symposium Berlin aus Anlaß der 100. Wiederkehr seines Geburtstages*, S. 46-83. Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

- [49] Horn, Martin Erik (2018): Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: Dieter Schuch, Michael Ramek (Hrsg.): Symmetries in Science XVII, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2017. Journal of Physics Conference Series, IOP Science, Bristol.
- [50] Horn, Martin Erik (2018): Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation mit und ohne GAALOP. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: BzMU 2018 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der Jahrestagung der GDM 2018 in Paderborn. WTM-Verlag, Münster.
- [51] Baumgarten, Christian (2017): The Simplest Form of the Lorentz Transformations. arXiv:physics.gen-ph/1801.01840v1, Url: <http://arxiv.org/abs/1801.01840> (07.05.2018).

Dem Beitrag beigefügte Dateien

- [52] Horn, Martin Erik (2017): Poster P 57 „GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner-Ersatz“ vom 19. Sept. 2017, vorgestellt auf der GDCP-Jahrestagung an der Universität Regensburg.
- [53] Horn, Martin Erik (2018): The yet really very simplest representation of the Lorentz transformation with and without GAALOP. Erweiterte und ins Englische übersetzte Fassung des GDM-Beitrags „Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation mit und ohne GAALOP“ [50].