Universidad del Atlántico
MATUA
Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. I , Nº 1, (2014)
Revista Del Programa De Matemáticas I (2014) 77–85

Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$

Sobolev Spaces $W^{m,p}(\Omega)$ with $1 \leq p \leq +\infty$

Jaider E. Blanco Gamarra [1]

[1] *Programa de Maestría en Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
E-mail: jaiderbalnco@mail.uniatlantico.edu.co

Cristian Rojas Milla [2]

[2] *Programa de Matemáticas*
Universidad del Atlántico, Colombia
E-mail: cristianrojas@mail.uniatlantico.edu.co

Received / Recibido: 2/11/2013. Accepted / Aceptado: 11/02/2014

Resumen

En este artículo hacemos una breve revisión de los espacios de Sobolev, para lo cual presentamos su estructura vectorial ligada a los espacios L^p. Además, Se muestran que dichos espacios son normados, de Banach, separables y algunos son reflexivos (i,e; es isomorfo a su bidual) y finalmente se demostrarán los teoremas de inmersión y de aproximación por funciones suaves en dichos espacios.

Palabras claves: Espacios de Sobolev, espacio separables, espacios reflexivos, Desigualdad de Sobolev, Teoremas de Inmersión, desigualdad de Poincaré.

Abstract

This article is a brief review of Sobolev spaces, for which we present vector structure linked to L^p spaces. In addition, such spaces are displayed are normed, Banach, and some are separable reflexive (i, e, is isomorphic to its bidual) and finally immersion prove theorems and approximation by smooth functions in such spaces.

Keywords: Sobolev space, space separable reflexive spaces, Sobolev inequality, Immersion theorems, Poincaré inequality.

1. Introducción

La teoría de los espacios de Sobolev se ha originado por el matemático ruso SL Sobolev alrededor de 1938 [SO] . Estos espacios no se introdujeron para algunos propósitos teóricos , sino por la necesidad de la teoría de la ecuaciones diferenciales parciales . Están estrechamente relacionados con la teoría de las distribuciones , ya que los elementos de estos espacios son clases especiales de distribuciones. Con el fin de discutir la teoría de los espacios de Sobolev vamos a empezar con algunos conceptos básicos simples que son necesarios para la introducción y el estudio de estos espacios [2,4,5].

Los espacios de Sobolev, que pueden ser representados brevemente, como las clases de funciones que poseen derivadas débiles en los espacios, ocupan un lugar destacado en el análisis funcional. En las últimas tres décadas se ha producido un gran aporte en la teoría y aplicaciones de estos espacios (Ver [4,6,8]). Por otra parte, dada la importancia de los mismos en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se han transformado en una herramienta imprescindible para el tratamiento de las mismas. Por ello, últimamente se ha producido un creciente interés por el estudio y uso de parte de ingenieros y físicos para la resolución de sus problemas (Ver [3,7,9]).

La teoría de estos espacios es iniciada por matemáticos a principio del siglo XX y en particular por S. I. Sobolev en el *año* 1930. Si bien son varios los científicos que hicieron sus aportes, como es el caso de Beppo Levi, actualmente toda esa teoría se conoce como espacios de Sobolev. Estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteamiento y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Otra gran ventaja de los espacios de Sobolev radica en que permiten caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque muchos de los métodos de aproximación, tales como el método de Ritz o el de los Elementos Finitos, son adecuados y correctamente formulados cuando se lo hace en el ámbito de estos espacios.

2. Preliminares

Definición 2.1. Sean $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Si m es un número entero no negativo, $u \in L^p$ y existe la derivada distribucional $D^\alpha u$ para cualquier α con $|\alpha| \leq m$, tal que

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ;\forall |\alpha| \leq m.$$

Entonces se dice que $u \in W^{m,p}(\Omega)$.
$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado espacio de Sobolev sobre Ω.
Esta clase $W^{m,p}(\Omega)$ de funciones está dotado de la norma: $\| \ u_{m,p} \ \| = (\sum_{0\leq\alpha\leq m} \ \| \ D^\alpha u \ \|_p^p)^{\frac{1}{p}}$ Si $1 \leq p \leq \infty$.
El caso $p = 2$ juega un papel muy importante, estos espacios son denotados por $H^m(\Omega)$, así

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

y para $u \in H^m(\Omega)$, nosotros denotamos por
$\| u \|_{m,p} = \| u \|_{m,2}$.
El espacio $H^m(\Omega)$ tiene un producto interno natural definido por

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)} .$$

Observación 1. El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert lo cual es hereditario debido a que L^2 lo es.

Teorema 2.1. $\| u \|_{m,p}$ es una norma de el espacio de funciones $W^{m,p}(\Omega)$.

Demostración. Es evidente que $\| \ u \ \|_{(m,p)} \geq 0$, además $\| u \|_(\ m, p) = 0 \longleftrightarrow u = 0$. Además, la homogeneidad del funcional se verifica , dado que la derivada y la norma en L^p satisfacen dicha propiedad $\| \beta u \|_{(m,p)} = |\beta| \ \| u \|_{(m,p)}$ para todo $u \in W^{(m,p)}(\Omega)$ y todo $\beta \in \mathbb{R}$. Y para finalizar, la desigualdad de Hölder , nos garantiza que el funcional satisface la desigualdad triangular.$\blacksquare$
En el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^n$, el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ puede ser definido via transformada de Fourier. Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, entonces por definición $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$. La transformada de Fourier de $D^\alpha u$ esta bien definido y tenemos

$$(D^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u},$$

Y también $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$. $\square$

Lema 2.1. Existen constantes positivas γ_1 y γ_2 dependiendo solo de m y n tal que $M_1(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \ | \ \xi^\alpha \ |^2 \leq M_2(1 + |\xi|^2)^m$ para todo $\mathbb{R}^n$.

Por el lema inmediatamente anterior podemos definir el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ como sigue:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = u \in L^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+ \mid \xi \mid^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (1)$$

cuya norma $\| \cdot \|_(m, \mathbb{R}^n)$ sobre $H^m(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la norma: $\| \ u \ \|_H^m \ (\mathbb{R}^n) = (\int_{(\mathbb{R}^n)}(1 + |\xi|^2)^{(\frac{m}{2})} \ \mid \hat{u} \mid^2 \ d\xi)^{(\frac{1}{2})}$. Para toda $m \geq 0$. La función $\Im : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\omega))^{n+1} \ u \longrightarrow \Im(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ es una isometría de $W^{(m,p)}(\Omega)$ sobre $(L^p(\Omega))^{(n+1)}$ si dotamos al espacio con la norma $\| \ u \ \| = \sum_{(i=1)}^{(n+1)} |u_i|_{0,p}$ para $u = (u_i) \in (L^p(\Omega))^{(n+1)}$.

En el siguiente teorema se establecerá una propiedad fundamental de los espacios de Sobolev $W^{(m,p)}(\Omega)$.

Teorema 2.2. $W^{(m,p)}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ una sucesión de Cauchy es $W^{(m,p)}(\Omega)$, entonces por definición $D^\alpha u_n \in L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tal que si $x, y \geq N$ entonces $\| \ u_x - u_y \ \|_{m,p}^p < \epsilon$, entonces

$$\sum_{0\leq\alpha\leq m} \| \ D^\alpha(u_x - u_y) \ \|_p^p = \sum_{0\leq\alpha\leq m} \| \ D^\alpha(u_x) - D^\alpha(u_y) \ \|_p^p < \epsilon \quad (2)$$

De aquí que $(D^\alpha(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ para $\mid \alpha \mid \leq m$. Como $L^p(\Omega)$ es completo existen funciones u_0 y u_α en $L^p(\Omega)$ para $\mid \alpha \mid \leq m$ tal que

$$u_n \longrightarrow u_0 \ y \ D^\alpha(u_n) \longrightarrow u_\alpha, n \longrightarrow \infty$$

La idea es demostrar que $u_0 \in W^{m,p}(\Omega)$.

Además, como $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ y $u_n \in L^p(\Omega)$ para todo n, entonces existe una distribución $T_{u_n} \in D'(\Omega)$ tal que para cualquier $\phi \in D(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} &\mid T_{u_n}(\phi) - T_{u_0}(\phi) \mid = \\ &\mid \int_\Omega u_n(x)\phi(x)dx - \int_\Omega u_0(x)\phi(x)dx \mid \\ &= \mid \int_\Omega (u_n(x) - u_0(x))\phi(x)dx \mid \leq \\ &\int_\Omega \mid u_n(x) - u_0(x) \mid\mid \phi(x) \mid dx \\ &\leq \| \ u_n - u_0 \ \|_p \| \ \Phi \ \|_{p^*} \quad (3) \end{aligned}$$

Por tanto, $T_{u_n}(\phi) \longrightarrow T_{u_0}(\phi)$ para todo $\phi \in D(\Omega)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

De forma similar,

$$\mid T_{D^\alpha_{u_n}}(\phi) - T_{u_\alpha}(\phi) \mid \leq \| \ D^\alpha u_n - u_\alpha \ \|_p \| \ \phi \ \|_{p^*}$$

Por lo tanto $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \longrightarrow T_{(u_\alpha)}(\phi)$ para todo $\phi \in D(\Omega)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Luego , para cada $\phi \in D(\omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{(u_\alpha)}(\phi) &= \lim_{n\longrightarrow\alpha} T_{D^\alpha_{u_n}}(\phi) = \\ &\lim_{n\longrightarrow\infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha(\phi)) = \\ &(-1)^{|\alpha|} T_{u_0}(D^\alpha) \quad (4) \end{aligned}$$

así,

$$\int_\Omega u_\alpha(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_0(x)D^\alpha\phi(x)dx \quad (5)$$

De esta manera $D^\alpha(u_0) = u_\alpha$ en el sentido distribución en Ω para $|\alpha| \leq m$, donde $u_\alpha W^{(m,p)}(\Omega)$. Entonces $\lim_{n\longrightarrow\infty} \| \ u_n - u_0 \ \|_{(m,p)} = 0$, por lo tanto $W^{(m,p)}(\Omega)$es un espacio completo. □

Ejemplo Sea $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ un abierto en $\mathbb{R}^2$, y sea $u(x) = u(x_1, x_2) = x_1^\alpha$, entonces $\int_\Omega u^2 dx = \int_0^1 \int_1^0 x_1^{2\alpha} dx_1 dx_2 =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\alpha+1} \lim_{a\to 0^+}(1 - a^{2\alpha+1}) = \frac{1}{2\alpha+1} & si \quad \alpha > -\frac{1}{2} \\ \lim_{a\to 0^+} \ln 1 - \ln a = \infty & si \quad \alpha = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\alpha+1} \lim_{a\to 0^+}(1 - a^{2\alpha+1}) = \infty & si \quad \alpha < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Así $u \in L^2(\Omega)$ si $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial}{\partial u(x_2)} = 0$, además $\frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$ para todo α. Sin embargo, para

$\alpha \neq 0$,

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 \alpha^2 x_1^{2(\alpha-1)} dx_1 dx_2$$

Procediendo de la misma manera como en la integral anterior , obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$ si $\alpha > -\frac{1}{2}$.
Si $\alpha = 0$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$. Resumiendo, esto significa que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ cuando $\alpha > -\frac{1}{2}$ o $\alpha = 0$.

Proposición 2.1. $W^{(m,p)}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

Proposición 2.2. Sea α un multi-índice, $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})} \in L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ y $\lim_{n\to\infty} D^\alpha_{u_n} = v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ entonces $D^\alpha u = v_\alpha$. El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las cuales el espacio $W^{(m,p)}(\Omega)$ es reflexivo y separable.

Teorema 2.3. Sea Ω un conjunto abierto no vacío, $m \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Se tiene

a. $W^{(m,p)}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.

b. $W^{(m,p)}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.

Demostración. Sea $M = card\{\alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\}$ y consideremos el espacio producto $X = \prod_{|\alpha|\leq m} L^p(\Omega) = L^p(\Omega)^M$ el cual es un espacio de Banach para la norma producto:

$$\| U \| = (\sum_{|\alpha|\leq m} \| u \|^p_{m,p})^{\frac{1}{p}}$$

si $p \in [1, \infty)$, donde $U = (u_\alpha)_{|\alpha|\leq m} \in X$. De hecho, sabemos que X es reflexivo si y solo si $L^p(\Omega)$ es reflexivo y X es separable si y solo si $L^p(\Omega)$ lo es.
Consideremos la aplicación lineal continua

$$\jmath : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow X$$

definida por

$$\jmath(u) = (D^\alpha)_{|\alpha|\leq m} \in X$$

y sea $E = \jmath(W^{m,p}(\Omega)) \subseteq X$. En virtud de la proposición 2.1 es inmediato comprobar que E es un subespacio vectorial cerrado de X.
Así, $(E, \| \cdot \|_X)$ es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de X. Además, J es un isomorfismo isométrico entre $W^{(m,p)}(\Omega)$ y E.
Se concluye que $W^{(m,p)}(\Omega), \| \cdot \|_{m,p}$ es un espacio de Banach y se obtiene (a) y (b). □

Observación 2. Se tienen que $W^{m,1}(\Omega)$ y $W^{m,\infty}(\Omega)$ son espacios no reflexivos. Por otro lado, se tiene que $W^m, \infty(\Omega)$ no es separable. Además, $D(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$.

Definición 2.2. Sean $m \geq 0$ y $p \in [1, \infty)$. Definimos

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|}_{m,p}$$

En caso particular de $p = 2$, usaremos la notación $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,2}}$. De la propia definición deducimos que $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$ y con la norma $\| \cdot \|_{m,p}$ es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de $W^{m,p}(\Omega)$, además $H_0^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $< \cdot, \cdot >_{H^m}$.

Observación 3. Obsérvese que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ es equivalente a decir que existe una sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ tal que $\psi_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, es decir $D^\alpha \psi_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$ para todo $0 < |\alpha| \leq m$, con lo que es interesante encontrar una caracterización manejable del espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Proposición 2.3. Para $k = 0$ y $1 \leq p < \infty$ demuestra que $W_0^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$.

Definición 2.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Para un $\epsilon > 0$, definimos el subconjunto abierto $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{B}(x, \epsilon) \subseteq \Omega\}$. Entonces para todo $u \in L^1(\omega)$ la modificación $u_\epsilon(x) = \int_{B(x,\epsilon)} \jmath_\epsilon(x - y) u(y) dy$ esta bien definida para todo $x \in \Omega_\epsilon$.

Teorema 2.4. Si $1 \leq p < \infty$. Entonces para algún $m \geq 0$ entero tenemos $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Para el caso en el que $m = 1$, tenemos que mostrar que si $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una sucesión $\{\phi_k\}$ en $D(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to u$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Paso 1. Sea $\{\rho_\epsilon\}$ una familia de mollifiers. Entonces si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tenemos $\rho_{\epsilon * u} \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Primero, para todo $\rho_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la convolución esta bien definida. Sea ϕ una función continua con soporte compacto tal que $|\phi - u|_{0,p} < \frac{\delta}{3}$ donde $\delta > 0$ es un número pre-asignado. Elijamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $|\phi * \rho_\epsilon - \phi|_{0,p} < \frac{\delta}{3}$ Así,

$$|u - u * \rho_\epsilon|_{0,p} \leq |u - \phi|_{0,p} + |\phi - \rho_\epsilon * \phi|_{0,p} + |\phi * \rho_\epsilon - u * \rho_\epsilon|_{0,p} < \delta \quad (6)$$

Luego,

$$|(\phi - u) * \rho_\epsilon|_{0,p} \leq |\phi - u|_{0,1} < \frac{\delta}{3}$$

lo que prueba la primera parte del proceso.

Paso 2. Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces $u * \rho_\epsilon$ es una función C^∞ y $D^\alpha(u * \rho_\epsilon) = D^\alpha u * \rho_\epsilon = u * D^\alpha \rho_\epsilon$, para algún multi-índice α. Por el paso 1, $u * \rho_\epsilon \to u$ y $D^\alpha(u * \rho_\epsilon) = D^\alpha u * \rho_\epsilon \to D^\alpha u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $u * \rho_\epsilon u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Paso 3. Sea ς un función en $D(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varsigma \leq 1, \varsigma \equiv 1$ sobre $B(0;1)$ y $supp(\varsigma) \subset B(0,2)$. Consideremos la sucesión ς_k en $D(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\varsigma_k(x) = \varsigma(\frac{x}{k}).$$

Sea $\epsilon_k \downarrow 0$ .Sea $u_k = \rho_{\epsilon_k} * u$. Entonces $u_k \in C^\infty$ y $u_k \to u$ en $W^{(1,p)}(\mathbb{R}^n)$ por el paso 2.

Definamos $\phi_k \in D(\mathbb{R}^n)$ por

$$\phi_k(x) = \varsigma_k(x) u_k(x)$$

Ahora mostraremos que $\phi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, para completar la demostración. Como $\varsigma_k \equiv 1$ sobre $B(0;k)$ tenemos $u_k = \phi_k$ sobre $B(0;k)$. Así,

$$|u_k - \phi_k|_{0,p} = (\int_{|x|>k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2(\int_{|x|>k} |u_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

puesto que $|\phi_k| \leq |u_k|$. Como la integral tiende a cero cuando $k \to \infty$ puesto que $u_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Así,

$$\frac{\partial_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

sobre $B(0;k)$, $\frac{\partial_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ por un argumento análogo. Así, $\phi_k \to u$, en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

3. Aproximación por funciones suaves

Definición 3.1. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Un operador de extensión Ψ para $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado

$$\Phi : W^{1,p}(\omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\Psi \mid u = u$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 3.1. Sean $k \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$ y sea $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Definimos $\tilde{u}$ como la extensión por 0 de u a $\mathbb{R}^n - \Omega$, esto es, $\phi_k \to u$

en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, como

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Entonces,

1. $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$, para todo α con $|\alpha| \leq m$
3. $\| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}} (\mathbb{R}^n) = \| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}(\Omega)}$

Demostración. Por hipótesis $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, así existe $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ de manera que $\psi_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, es decir $D^\alpha \psi_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$ para todo $0 < |\alpha| \leq m$. Consideremos $\widetilde{\psi_n}$ definida por

$$\widetilde{\psi_n}(x) := \begin{cases} \psi_n(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Que evidentemente verifica que $\widetilde{\psi_n} \in D(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha \widetilde{\psi_n} = \widetilde{D^\alpha \psi_n}$ para $0 < |\alpha| \leq m$.

Deducimos que $\widetilde{\psi_n} \to \tilde{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha \widetilde{\psi_n} = \widetilde{D^\alpha \psi_n} \to \widetilde{D^\alpha u}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < |\alpha| \leq m$. Así, en virtud de la proposición se garantiza la existencia de $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha (u)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < |\alpha| \leq m$. Es decir, $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}} (\mathbb{R}^n) = \| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}} (\Omega)$. □

Teorema 3.2. Si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que el operador extensión $\Psi : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ exista, entonces dado $u \in W^{(1,p)}(\Omega)$ existe una sucesión $\{u_m\}$ en $D(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m |_\Omega \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ejemplo Sea Ω es un intervalo abierto, lo llamaremos $(-1, 1)$. Sea u la función definida de la siguiente manera

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces como u es absolutamente continua, la distribución derivada esta dada por

$$u^{'}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sea $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$|\phi^{'} - u^{'}|_{0,\infty)} < \epsilon.$$

Así, si $x < 0$, $|\phi^{'}(x)| < \epsilon$ y si $x > 0$,$|\phi^{'}(x) - 1| < \epsilon$ o $\phi^{'}(x) > 1 - \epsilon$. Luego, por la continuidad $\phi^{'}(0) < \epsilon$ y $\phi^{'}(0) \geq 1 - \epsilon$ lo cual es imposible si $\epsilon < \frac{1}{2}$. Por tanto u no puede ser aproximada en $W^{1,\infty}(\Omega)$ por funciones suaves.

Lema 3.1. Sea $1 \leq p < \infty$. Y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, tal que u se anula fuera de un conjunto compacto contenido en Ω. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Ver [1]. □

Teorema 3.3. Sea G un función Lipschitz de $\mathbb{R}$ en si misma tal que $G(0) = 0$. Entonces si Ω es acotada, $1 < p < \infty$, y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea $u_m \in D(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Definamos $v_m = G \circ u_m$ como u_m tiene soporte compacto y $G(0) = 0$, v_m tiene soporte compacto. También v_m es también una función de Lipschitz; para

$|v_m(x) - v_m(y)| = |G(u_m(x)) - G(u_m(y))| \leq K|u_m(x) - u_m(y)| \leq K_m|x - y|$

como u_m es una función suave con soporte compacto y G es una función Lipschitz. Por tanto $v_m \in L^p(\Omega)$ también se deduce que $|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}| \leq K_m$, $1 \leq i \leq n$. Y como Ω es acotada, $\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$. Así, $v_m \in W^{1,p}(\Omega)$ y tiene soporte compacto. Luego por el lema anterior, $v_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. También a partir de la relación $|v_m(x) - G(u(x))| \leq K|u_m(x) - u(x)|$ se deduce que $v_m \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$. Además, si e_i es el vector base i-ésimo en R^n, tenemos

$$\frac{| v_m(x + he_i) - v_m(x) |}{| h |} \leq \frac{K \mid u_m(x + he_i) - u_m(x) \mid}{| h |} \tag{8}$$

y también

$$\lim_{m\to\infty} \sup | \frac{\partial v_m}{\partial x_i} |_{0,p} \leq K \lim_{m\to\infty} \sup | \frac{\partial u_m}{\partial x_i} |_{0,p} \tag{9}$$

Pero como $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\}$ es una sucesión convergente en $L^p(\Omega)$, se obtiene $\{\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\}$ es acotada para cada $1 \leq i \leq n$. Así, $\{v_m\}$ es convergente en $W^{1,p}(\Omega)$ y $G \circ u \in W_0^{1,p)}(\Omega)$. □

Definición 3.2. Se dice que un espacio normado X esta inmerso en un espacio normado Y, y escribimos $X \to Y$ para designar la inmersión, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. X es un subespacio vectorial de Y.
2. El operador identidad I definido en X sobre Y por $I(x) = x$ para todo x en X es continua.

En esta parte del artículo trabajaremos el espacio dual de $W^{m,p}(\Omega)$. Para ello se dará en un principio algunas definiciones con el fin de profundizar un poco en este tema. Definimos $< u,v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx$, dado p , p' es el exponente conjugado definido por $p' = \begin{cases} \infty & si \quad p=1 \\ \frac{p}{p-1} & si \quad 1<p<\infty \\ 1 & si \quad p=\infty \end{cases}$

Sea $P : W^{m,p}(\Omega) \to L_N^p$ definida por $Pu = (D^\alpha u)_{(0<|\alpha|\in m)}$. P es un isomorfismo isométrico de $W^{m,p}(\Omega)$ sobre $W \subseteq L_N^p$, entonces como $W^{(m,p)}(\Omega)$ es completo, W es un subespacio cerrado de L_N^p, además es separable reflexivo y uniformemente convexo. $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(L_N^p)$.

Lema 3.2. Sea $1 \leq p < \infty$. Para todo $\sigma \in (L_N^p)'$ existe un único $v \in L_N^{p'}$ tal que para todo $u \in L_N^p$,

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{N} < u_j, v_j >$$

Sin embargo,

$$\| \delta \|_{(L_N^{p'})} = \| v \|_{(L_N^{(p')})}$$

Así, $(L_N^p)' \cong L_N^{p'}$.

Demostración. Si $1 \leq j \leq N$ y $\omega \in L^p(\Omega)$, sea $\omega_(j) = (0,...,\omega,...,0) \in L_N^p$ donde la j-esima componente es ω y las demás componentes son 0. Sea $\delta_j(\omega) = \delta(\omega_j)$, observemos que $\delta_j \in (L^p(\Omega))'$, Luego por el Teorema de Representación para $L^p(\Omega)$, existe un único $v_j \in L^{p'}(\Omega)$ tal que para todo $\omega \in L^p(\Omega)$

$$\delta(\omega_{(j)}) = \delta_j(\omega) =< \omega, v_j >$$

Si $u \in L_N^p$, entonces

$$\delta(u) = \delta(\sum_{j=1}^{n} u_{j(i)}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(u_{j(i)}) = \sum_{j=1}^{n} < u_j, v_j >$$

Luego por la desigualdad de Hölder para sumas finitas, tenemos

$|\delta(u)| \leq \sum_{j=1}^{N} \| u_j \|_p \| v_j \|'_p \leq \| u \|_{L_N^p} \| v \|_{L_N^{p'}}$

Así que $\| \delta \|'_{(L_N^p)} \leq \| v \|_L^{p'} (\Omega)$. $\square$

Corolario 3.1. Demostrar $\| \delta \|'_{(L_N^p)} \geq \| v \|_{L^{p'}} (\Omega)$.

Teorema 3.4. Sea $1 \leq p < \infty$, para todo $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ existe un elemento $v \in L^{p'}(\Omega)$ tal que, escribimos el vector v en la forma $(v_\alpha)_{0<|\alpha|\leq m}$, nosotros tenemos para $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$L(u) = \sum_{0<|\alpha|\leq m} < D^\alpha u, v_\alpha >$$

Sin embargo, $\| L \|'_{(W^{m,p}(\Omega))} = \| v \|_{L^{p'}(\Omega)}$

Demostración. Sea L^* el funcional lineal definido sobre el rango W del operador P. $L^*(Pu) = L(u)$, para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$.Como P es un isomorfismo isométrico, $L^* \in W'$. Y $\| L^* \|_{W'} = \| L \|_{(W^{m,p}(\Omega))'}$. Por el teorema de Hahn- Banach existe una extensión de L^* que preserva la norma y por el lema 3.2 existe $v \in L_N^{p'}$ tal que si $u = (u_\alpha)_{(0<|\alpha|\leq m)}$, entonces

$$\tilde{L}(u) = \sum_{0<|\alpha|\leq m} < u_\alpha, v_\alpha >$$

Así para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ obtenemos

$$L(u) = L^*(Pu) = \tilde{L}(Pu) = \sum_{0<|\alpha|\leq m} < D^\alpha u, v_\alpha >$$

Sin embargo,

$$\| L \|_{W^{m,p}(\Omega)'} = \| L^* \|_{W'} = \| L^* \|_{L_N^{p'}} = \| v \|_{L_N^{p'}}$$

$\square$

El siguiente teorema hace referencia a una desigualdad muy importante de este espacio llamada la desigualdad de Poincaré la cual es vital en el estudio de soluciones débiles de problemas elípticos de frontera Dirichlet.

Teorema 3.5. Sea Ω un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ .Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que $|u|_{0,p} \leq C|u|_{1,p}$ para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

4. Teoremas de inmersión

Estudiaremos las inmersiones de espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Se Analizará los diferentes casos cuando $p < n$, $p = n$ y $p > n$. Si $1 \leq p < n$. Entonces definamos el exponente p^* por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

note que $p^* > p$. Esencialmente, se demostrará que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ puede ser inmerso en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.1. Sea $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante $C = C(p,n)$, tal que

$$|u|_{0,p^*} \leq C|u|_{1,p^*}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. En particular tenemos la inclusión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

El anterior teorema es conocido como la desigualdad de Sobolev.

Teorema 4.2. Sea $p > n$. Entonces tenemos la inclusión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to L^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Además, existe una constante $C = C(p,n) > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}|u|_{1,p}$$

en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$, donde $\alpha = 1 - (\frac{n}{p})$

Teorema 4.3. Sea $\Omega = R^n_+$ o un conjunto abierto de clase C^1 con frontera acotada $\partial\omega$.
Entonces tenemos las siguientes inclusiones continuas:

i. Si $1 \leq p < n, W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$.

ii. Si $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ para todo $q \in [n, \infty]$.

iii. Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \to L^{\infty}(\Omega)$.

Y además, u es Hölder-continua de exponente $\alpha = 1 - (\frac{n}{p})$.
En particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),\ p > n$.

Teorema 4.4. Si $p > n$. Entonces el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es un algebra de Banach Conmutativa.

Demostración. Para probar que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es un algebra de Banach, necesitamos mostrar que si $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces el producto $uv \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y que $\| uv \|_{1,p} \leq C \| u \|_{1,p} \| v \|_{1,p}$
Sea $u, v \in D(\mathbb{R}^n)$. Entonces $uv \in D(\mathbb{R}^n)$ y por la regla del producto

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v \in D(\mathbb{R}^n)$$

Sea $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces como $p > n$,$u, v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y por consiguiente , $uv \in L^p(\mathbb{R}^n)$ esta bien definida. También

$$u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ahora mostraremos que esta es la distribución derivada $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)$.
Si $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} uv\frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n u_m} v_m\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= -\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(u_m\frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}v_m)\phi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v)\phi\end{aligned} \tag{10}$$

Por el teorema de la Convergencia Dominada, cuando $u_m \to u$,$v_m \to v$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $u_m, v_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v.$$

También por la continuidad de la inclusión de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n$ sobre $L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$, se sigue que

$$\begin{aligned}&|\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)|_{0,p} \leq \\ &\qquad |\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{0,p}|v|_{0,\infty} + |u|_{0,\infty}|\frac{\partial v}{\partial x_i}|_{0,p} \\ &\qquad \leq C \| u \|_{1,p} \| v \|_{1,p}\ .\end{aligned} \tag{11}$$

Y así queda probado el teorema.
Del mismo modo se puede probar que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ es un algebra de Banach cuando $m > \frac{n}{p}$. □

Teorema 4.5. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y conexo de clase C^1. Sea $P_m(\Omega)$ denota el espacio de todos los polinomios en $x_1, ..., x_n$ sobre Ω y de grado menor o igual a m. Sea $v \in W^{m+1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ y sea **v** las clases de equivalencia de v en el espacio cociente $(W^{m+1,p}(\Omega))\diagup(P_m(\Omega))$. Este espacio esta equipado con la norma usual

$$\| v \|_{m+1,p} = \inf_{\tilde{p} \in P_m(\Omega)} \| v + p \|_{m,p}$$

Corolario 4.1. Sea $\Phi : W^{m+1,p}(\Omega) \to V$ un operador lineal continuo, donde V es un espacio de Banach conteniendo a $W^{m+1,p}(\Omega)$. Supongamos además que

$$\Phi(\tilde{p}) = \tilde{p}$$

para todo $\tilde{p} \in P_m(\Omega)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cada $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$,

$$\| u - \Phi(u) \|_V \leq C|u|_{m+1,p}$$

Demostración. Sea $\tilde{p}$ un polinomio en $P_m(\Omega)$. Entonces para algún $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \| u - \Phi(u) \|_V = & \\ & \| (u + \tilde{p}) - \Phi(u + \tilde{p}) \|_V = \\ & \| (I - \Phi)(u + \tilde{p}) \|_V \leq \\ & \| I - \Phi \| \| u + \tilde{p} \|_{m+1,p} \end{aligned} \quad (12)$$

como $\tilde{p}$ es arbitrario, tomando $C_1 = \| I - \Phi \|$,

$$\begin{aligned} \| u - \Phi(u) \|_V \leq C_1 |u|_{m+1,p} & \\ \inf_{\tilde{p} \in P_m(\Omega)} \| v + \tilde{p} \|_{m+1,p} = & \\ C_1 \| u \|_{m+1,p} & \\ \leq C|u|_{m+1,p} & \end{aligned} \quad (13)$$

por teorema previo. □

Referencias

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces , Academic Press, New York, 1975.

[2] Grisvard, P. (1985), Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman, Boston.

[3] Stein, E.M. (1970), Singular Integrals and Diferentiability Properties of Funcrions. Princeton University Press, Princeton.

[4] V.I Burenkov; Mollifying operators with variable step and their applications to approximation by differentiable funtions, In"Nonlinear analysis, funtion spaces and applications", Teubner-Textezur Mathematik,Leipzig,49 (1982),5-37.

[5] A. Kufner, Weighted Sobolev spaces, John Wiley and Sons 1983.

[6] A.A. Dezin. On embedding theorems and extension problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88(1953-54),741-743(Russian).

[7] L.C. Evans, Partial Differential Equations , AMS, Providence, RI, 1998.

[8] A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[9] A. Friedman, Foundations of Modern Analysis , Dover Publications, Inc., New York,1982.

[10] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order , Springer-Verlag,Berlin, 1983.

[11] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[12] J.T. Marti, Introductionto Sobolev Spaces and Finite Element Solution of Elliptic Boundary Value Problems , Academic Press, London, 1986.

[13] V.G. Maz'ja, Sobolev Spaces , Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[14] C. B. Morrey, Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations , Springer-Verlag, New York, 1966.

[15] J. Nečăs, Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations , Teubner, Leipzig, 1983.

[16] J. Nečăs, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques , Academia, Prague, 1967.

[17] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis , Courant Institute, New York, 1974.

[18] S.L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. 4 (46) 1938, 39-68 (translated into English in 1963).

[19] H. Tanabe, Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations , Dekker, New York, 1997.

[20] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators , VebDeutscher, Berlin, 1978.

Para citar este artículo: Gamarra J. et all, 2014, .Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:
http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA.