Universidad del Atlántico

MATUA

Revista MATUA Páginas: 73–84

Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. V , Nº 1, (2018)

Hutchinson's Equation with finite delay and Prime Numbers Theorem

La ecuación de Hutchinson con retardo finito y el Teorema de los Números Primos

Miguel Vivas Cortez[a], Dan Solano[b]

mjvivas@puce.edu.ec , dsolano@una.edu.ve

[a]Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito, Ecuador
[b]Universidad Nacional Abierta, Sede Barquisimeto, Venezuela

Abstract

In this article it is studied the dynamic of the solutions of the Hutchinson's equation and from here it is gived a new prooof of the Prime Number Theorem.

Keywords:
Hutchinson's equation, Prime Number Theorem, Differential equation with delay

Resumen

En este artículo se estudia la dinámica de las soluciones de la ecuación de Hutchinson con retardo finito y como consecuencia se presenta una nueva prueba del Teorema de los números primos.

Palabras claves:
Ecuación de Hutchinson, Teorema de los Números Primos, Ecuaciones diferenciales con retardo

1. Introducción

En Ecología son introducidos los modelos con retardo debido a que existen modelos de poblaciones que no satisfacen la ecuación

$$N'(t) = \gamma N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{P}\right), \quad (\, t \geq 0) \tag{1}$$

donde γ es la tasa de crecimiento de la población y P es el nivel de saturación de la especie donde vive , el cual suele determinarse en función de los recursos disponibles. La ecuación (1) tiene los puntos de equilibrio

$N(t) \equiv 0$ y $N(t) \equiv P$, y fuera de estos, es decir, cuando $|N(t) - P| \neq 0$, para todo $t \geq 0$, todas sus soluciones son monótonas. Integrando (1) por fracciones parciales se encuentra que su solución está dada por

$$N(t) = \frac{PN(0)e^{\gamma t}}{P + N(0)(e^{\gamma t} - 1)} \tag{2}$$

y a partir de ésta, se observa que cualquier solución con $N(0) > 0$ es atraída globalmente por el punto P.

Este modelo es conocido como modelo de Verhulst, biólogo matemático holandés, quien la introdujo en 1838 (Ver [8]). En este modelo, el citado autor, considera que la tasa de mortalidad actúa instantáneamente, mientras que en general, existe un cierto retraso debido a la influencia de factores como el período de madurez y el tiempo de gestación. Motivado a estos hechos, Hutchinson propuso en 1948 (Ver [6]) la ecuación logística con retardo, conocida con el nombre de ecuación de Hutchinson o ecuación logística retardada

$$N'(t) = \gamma N(t)\left(1 - \frac{N(t-h)}{P}\right), \ \ (t \geq 0) \tag{3}$$

donde el retardo h, con $h > 0$, representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población. En este caso, la tasa de crecimiento per capita en el instante es una función lineal de la población en el instante $(t - h)$. Si la población $N(t)$ es conocida en el pasado y viene dada por $N(t) = \phi_0(t)$, donde $\phi_0 : [-h, 0] \to \mathbb{R}^+$ es una función continua que representa el tamaño de la población en el pasado, entonces se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} N'(t) = \gamma N(t)\left(1 - \frac{N(t-h)}{P}\right) & t \geq 0 \\ N(t) = \phi_0(t) & -h \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

El sistema (4) puede ser tratado por el método del paso o del intervalo, mediante el cual es reducido a una ecuación diferencial ordinaria. Se probará que si se satisfacen ciertas condiciones el punto de equilibrio $N(t) = P$ es un atractor global para (4), y que la presencia del retardo cambia la dinámica de las soluciones de la ecuación (1), además se deduce el Teorema de los números primos.

Si en (4) hacemos

$$t = hs, \ \ \alpha = \gamma h, \ \ N(t) = N(hs) = P(1 + x(s)) \tag{5}$$

resulta que si $-h \leq t \leq 0$ entonces $-h \leq hs \leq 0$, y en consecuencia $-1 \leq s \leq 0$, y si $t \geq 0$ se tiene que $Px'(s) = hN'(hs) = hN'(t)$, se deduce entonces que $N'(t) = (P/h)x'(s)$, y además que

$$N(t - h) = N(hs - h) = N(h(s - 1)) = P(1 + N(s - 1)).$$

Reemplazando $N(t), N'(t)$ y $N(t - h)$ en la primera ecuación del sistema (4) tenemos

$$\frac{P}{h}x'(s) = \gamma P(1 + x(s))\left[1 - \frac{P}{P}(1 + x(s - 1))\right] = -\gamma P x(s - 1)(1 + x(s)), \quad s \geq 0$$

eliminado P, teniendo en cuenta que $\alpha = \gamma h$ y usando (5), podemos escribir el sistema (4) como

$$\begin{cases} x'(s) = -\alpha x(s - 1)(1 + x(s)), & s \geq 0 \\ x(s) = \phi_0(s), & -1 \leq s < 0 \end{cases}$$

cambiando t por s queda que

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t - 1)(1 + x(t)), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi_0(t), & -1 \leq t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

La función constante $x(t) \equiv -1,\, t \in (-\infty, \infty)$, es un punto de equilibrio de (6) con $\phi_0(t) = -1$ si $t \in [-1, 0]$, también $x(t) \equiv 0,\, t \in (-\infty, \infty)$ es un punto de equilibrio con $\phi_0(t) = 0$ si $t \in [-1, 0]$.

Definition 1.1. *Una solución del sistema (6) es una función* $x(t) = x(t, \phi_0)$ *donde* $\phi_0 : [-1, 0] \to \mathbb{R}^+$ *es una función continua y*

$$x(t, \phi_0) = \begin{cases} x(t) & si\ t \geq 0 \\ \phi_0(t) & si\ -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

donde $x(t)$ *es solución de (6) para todo* $t \geq 0$ *y* $x'(0) = x'_+(0)$ *es la derivada por la derecha en cero.*

Lema 1.2. *La función* $x(t) = x(t, \phi_0)$ *es solución de (6) si y solo si* $x(t)$ *es solución de la ecuación integral*

$$x(t) = x(0) - \alpha \int_0^t x(s-1)(1 + x(s))ds, \quad t \geq 0$$

y

$$x(t) = \phi_0(t)\ \ si\ \ -1 \leq t \leq 0.$$

Prueba. Como $x(s-1)(1 + x(s))$ es una función continua, entonces, por el Teorema fundamental, derivando, se tiene que

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)(1 + x(t)) \text{ si } t \geq 0$$

y si $-1 \leq t \leq 0$ entonces $x(t) = \phi_0(t)$, luego, $x(t, \phi_0)$ es solución de (6).

Recíprocamente, supongamos que $x(t, \phi_0)$ es solución de (6) entonces $x(t) = \phi_0(t)$ si $-1 \leq t \leq 0$, y para $t \geq 0$, cambiando t por s e integrando sobre $[0, t]$ resulta

$$x(t) = x(0) - \alpha \int_0^t x(s-1)(1 + x(s))ds.$$

La prueba ha sido completada. ■

2. Existencia de las soluciones

En el próximo Teorema mostraremos que el sistema (6) tiene solución.

Teorema 2.1. *Si* ϕ_0 *es una función continua definida sobre* $[-1, 0]$, *entonces existe una función* $x(t) = x(t, \phi_0)$ *definida en* $[-1, \infty)$ *que coincide con* ϕ_0 *en* $[-1, 0]$ *y satisface el sistema (6)* .

Prueba. Si $x(t)$ es solución de (6) que coincide con ϕ_0 entonces $x(t) = \phi_0(t)$ si $-1 \leq t \leq 0$ y del Lema 1.2 tenemos que

$$x(t) = \phi_0(0) - \alpha \int_0^t x(s-1)(1 + x(s))ds.$$

Recíprocamente, si $x(t)$ satisface la ecuación integral entonces debe satisfacer (6) , este es el Lema 1.2. Por lo tanto solo es necesario probar que el sistema (6) tien una solución única, esto se consigue explícitamente por el método del paso. Busquemos una solución en $[0, 1]$: si $0 \leq t \leq 1$ entonces $-1 \leq t - 1 \leq 0$, de aquí que $x(t-1) = \phi_0(t-1)$, y el sistema (6) se convierte en

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha\phi_0(t-1)(1 + x(t)) & \text{si } t \geq 0 \\ x(0) = \phi_0(0) \end{cases}$$

Como $x(t)$ y $\phi_0(t-1)$ son continuas, el sistema anterior tiene solución, y por el Lema 1.2 viene dada por

$$x(t) = \phi_0(0) - \alpha \int_0^t \phi_0(t-1)(1 + x(s))ds. = \phi_1(t),$$

donde hemos llamado $\phi_1(t)$ a la solución en $[0, 1]$.

Ahora usamos la ecuación $\phi_1(t)$ para obtener la solución en el intervalo $[1, 2]$. Tenemos que si $1 \leq t \leq 2$ entonces sigue que $k-2 \leq t-1 \leq 1$, por tanto $x(t-1) = \phi_1(t-1)$, de esta manera, consideramos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha\phi_1(t-1)(1 + x(t)) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ x(1) = \phi_1(1) \end{cases}.$$

Así, como $x(t)$ y $\phi_1(t-1)$ son continuas, el sistema anterior tiene solución, y por el Lema 1.2 viene dada por

$$x(t) = \phi_1(0) - \alpha \int_0^t \phi_0(t-1)(1 + x(s))ds. = \phi_2(t), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

En general, asumiendo que $\phi_{k-1}(t)$ esta definida en $[k-2, k-1]$, con $k \in \mathbb{Z}^+$ y $k \geq 2$, buscamos una solución en $[k-1, k]$. Tenemos entonces que $k-1 \leq t \leq k \Leftrightarrow k-2 \leq t-1 \leq k-1$, y asi $x(t-1) = \phi_{k-1}(t-1)$, con lo cual consideramos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha\phi_{k-1}(t-1)(1 + x(t)) & \text{si } k-1 \leq t \leq k \\ x(k-1) = \phi_{k-1}(k-1) \end{cases}$$

Como $x(t)$ y $\phi_1(t-1)$ son continuas, el sistema anterior tiene solución, y por el Lema 1.2 viene dada por

$$x(t) = \phi_{k-1}(0) - \alpha \int_0^t \phi_{k-1}(t-1)(1 + x(s))ds. = \phi_k(t), \quad k-1 \leq t \leq k..$$

Una solución del sistema (6) definida por la función inicial $\phi_0(t)$ es dada por las relaciones $x(t) = \phi_k(t)$ para $t \in [k-1, k]$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$ Es claro que la función $x(t) = \phi_k(t)$ es continua como consecuencia de su construcción y es continuamente diferenciable en $[k-1, k]$ para todo $k \geq 1$, y en el punto $t = 0$ solo tiene derivada por la derecha $x'(0) = x'_+(0)$. Como la solución

$$x(t) = \phi_{k-1}(0) - \alpha \int_0^t \phi_{k-1}(t-1)(1 + x(s))ds. = \phi_k(t)$$

coincide con $\phi_0(t)$ en $[-1, 0]$ y como las funciones $\phi_k(t)$ están univocamente determinadas y coinciden con $x(t)$ en $[k-1, k]$ para $k = 0, 1, 2, 3, ...$, entonces existe una solución única.

Busquemos ahora la forma explícita de la solución. Por el Lema 1.2 tenemos que $x(t)$ es solución de (6) si y solo si

$$x(t) = x(0) - \alpha \int_0^t \phi_0(s-1)(1 + x(s))ds. = \phi_0(0) - \alpha \int_0^t \phi_0(s-1)(1 + x(s))ds, \ \ t \geq 0$$

y $x(t) = \phi_0(t)$ si $t \in [-1, 0]$. De (6) se deduce que $x'(t) + \alpha\phi_0(t-1)x(t) = -\alpha\phi_0(t-1)$; $x(0) = \phi_0(0)$; usando la técnica del factor integrante tenemos que

$$\begin{aligned} \left[x(t)e^{\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds}\right]' &= \left(x'(t) + \alpha\phi_0(t-1)x(t)\right) e^{\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} \\ &= -\alpha\phi_0(t-1)e^{\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} \end{aligned}$$

cambiando t por s e integrando sobre $[0,t]$ con $0 \leq s \leq u \leq t$, obtenemos

$$x(t)e^{\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} = \phi_0(0) - \alpha \int_0^t \phi_0(u-1)\left(e^{\int_0^u \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)du,$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_0(0)e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} - \left(e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)\alpha\int_0^t \phi_0(u-1)\left(e^{\int_0^u \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)du \\ &= \phi_0(0)e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} - \alpha\int_0^t \phi_0(u-1)\left(e^{\int_0^u \alpha\phi_0(s-1)ds - \int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)du \\ &= \phi_0(0)e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} - \alpha\int_0^t \phi_0(u-1)\left(e^{\int_t^u \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)du \end{aligned} \tag{7}$$

para $0 \leq t \leq u$. Hagamos $z = z(u) = e^{\int_t^u \alpha\phi_0(s-1)ds}$, entonces

$$z(0) = e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} \quad \text{y} \quad z(t) = 1,$$

además

$$dz = \alpha\phi_0(u-1)e^{\int_t^u \alpha\phi_0(s-1)ds},$$

entonces podemos escribir

$$\alpha\int_0^t \phi_0(u-1)\left(e^{\int_0^u \alpha\phi_0(s-1)ds}\right)du = \int_0^t dz = z(t) - z(0) = 1 - e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} \tag{8}$$

Reemplazando (8) en (7) resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_0(0)e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} - \left(1 - e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds}\right) \\ &= (\phi_0(0)+1)\,e^{-\int_0^t \alpha\phi_0(s-1)ds} - 1 \end{aligned}$$

para $t \geq 0$ y $x(t) = \phi(t)$ si $t \in [-1,0]$.

La prueba está completa ■

3. Oscilación de las soluciones

Definition 3.1. *Decimos que una función $x : [0,\infty] \to \mathbb{R}^+$ es oscilatoria $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ con $t_m \to \infty$,$m \to \infty$ tal que $x(t_m) = 0$ para $m = 1,2,3,...$ y x no es oscilatoria si existe $T \in [0,\infty]$ tal que $|x(t)| > 0$ para todo $t > T$.*

Lema 3.2. *Si $x(t) = x(t,\phi)$ es solución no oscilatoria de (6), entonces $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ en forma monótona, además $x'(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $x(t)$ es acotada inferiormente por -1 y superiormente por* $\text{máx}\{\phi(0), \overline{m}, \phi_m\}$.

Prueba. Como $x(t)$ es solución no oscilatoria de (6) existe $T \in [0,\infty]$ tal que $|x(t)| > 0$ para todo $t > T$., luego, existen dos posibilidades:

1. $x(t) > 0$ para todo $t > T$
2. $x(t) < 0$ para todo $t > T$

en cualquiera de los casos $x(t)$ es de signo constante si $t > T$. Si ocurre 1.) , de (6) se deduce que

$$x(t) + 1 = (\phi(0) + 1)\, e^{-\int_0^t \alpha\phi(s-1)ds} > 0, \text{ si } \phi(0) > -1$$

entonces $x(t) > -1$ para todo $t \geq 0$, y si ocurre 2.) entonces $-1 < x(t) < 0$ para todo $t > T$. Si ocurre 1) entonces

$$x(t) = (\phi(0) + 1)\, e^{-\int_0^t \alpha\phi(s-1)ds} - 1 \leq (\phi(0) + 1)\, e^0 - 1 = \phi(0).$$

Sea $\overline{m} = \text{máx}\,\{x(t) : t \in [0, T]\}$, entonces tenemos que $-1 \leq x(t) \leq M = \text{máx}\,\{\phi, \varphi, \overline{m}\}$, luego, $x(t)$ es acotada. Ahora, como $x(t)$ es de signo constante si $t > T$ y $x(t) > -1$ para todo $t \geq 0$, en particular, $x(t-1) > -1$ para todo $t > T - 1$, multiplicando la primera ecuación de (6) por $x(t-1)$ resulta que

$$x'(t)x(t-1) = -\alpha x^2(t-1)\,(1 + x(t)) < 0$$

por ser $\alpha\,(1 + x(t)) > 0$ y $x^2(t-1) > 0$. Veamos que lo anterior implica que $x(t)$ y $x(t-1)$ tienen el mismo signo si $t > T - 1$. Supongamos lo contrario, entonces existe un $t^* > T - 1$ tal que $x(t^*)$ y $x(t^* - 1)$ tienen signos opuestos, lo que indica, por continuidad que existe $\bar{t} \in (t^* - 1, t^*)$ tal que $x(\bar{t}) = 0$ con $\bar{t} > T$, contradiciendo el hecho que $|x(t)| > 0$ para todo $t > T$. Entonces, debe ser que $x(t)$ y $x(t-1)$ tienen el mismo signo si $t > T - 1$. Esto implica, a su vez, que $x'(t)$ y $x(t)$ tienen signos constantes pero opuestos si $t > T$. De esta manera se presentan dos posibilidades:

a) $x(t) > 0$ y $x'(t) < 0$: entonces $x(t)$ es acotada superiormente por 0 y decreciente con $\text{lím}\, x(t) > 0$ cuando $t \to \infty$

b) $x(t) < 0$ y $x'(t) > 0$: entonces $x(t)$ es acotada superiormente por 0 y creciente, entonces converge en forma creciente.

en cualquiera de los dos casos converge en forma monótona y debe hacerlo a uno de los puntos críticos de (6), es decir, debe converger a 0 o a -1. En el caso 2), como $x(t) > -1$ para $t > T$, y además, es creciente, no puede converger a -1, luego, debe converger a 0. Si ocurre 1), como $x(t)$ es decreciente y $x(t) > 0$ para todo $t > 0$, entonces no puede converger a -1, por lo tanto, su convergencia es a 0. En cualquiera de los dos casos $\text{lím}_{t\to\infty} x(t) = 0$.

De (6) se deduce que $\text{lím}_{t\to\infty} x'(t) = 0$, dado que

$$\frac{x'(t)}{1 + x(t)} = -\alpha x(t-1), \quad \lim_{t\to\infty} x(t-1) = 0 \text{ y } 1 + x(t) > 0.$$

La prueba está completa. ■

Lema 3.3. *La estabilidad asintótica de $x'(t) = -\alpha x(t-1)\,(1 + x(t))$ es equivalente a la estabilidad asintótica de la ecuación diferencial con retrado $x'(t) = -\alpha x(t-1)$.*

Prueba. Como $\text{lím}_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\text{lím}_{t\to\infty} x(t-1) = 0$ entonces $\text{lím}_{t\to\infty} x(t)x(t-1) = 0$. Para $x(t)$ próximo a 0 podemos despreciar el término $-\alpha x(t-1)x(t)$ y la estabilidad asintótica de

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)\,(1 + x(t)) = -\alpha x(t-1) - \alpha x(t-1)x(t) \tag{9}$$

es la misma estabilidad asintótica de la ecuación retardada

$$x'(t) = -\alpha x(t-1) \tag{10}$$

.

Recíprocamente, si $\lim_{t\to\infty} x(t-1) \neq 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0$ lo que a su vez implica que $\lim_{t\to\infty} x(t)x(t-1) \neq 0$, y entonces $\lim_{t\to\infty} -\alpha x(t-1)(1+x(t)) \neq 0$ ya que $\lim_{t\to\infty} x(t) > -1$.

La prueba está completa. ■

A continuación estudiamos la estabilidad asintótica de (10), para esto determinemos la ecuación característica asociada.

Sea $y = \alpha e^{\lambda t}$, tendremos

$$\alpha y(t-1) = \alpha\left(\alpha e^{\lambda(t-1)}\right) = \alpha^2 e^{\lambda t} e^{-\lambda}; y'(t) = \alpha\lambda e^{\lambda t}$$

entonces

$$y' = -\alpha y(t-1) \Leftrightarrow \alpha\lambda e^{\lambda t} = -\alpha^2 e^{\lambda t} e^{-\lambda}$$

y de aquí resulta que

$$\lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0, \tag{11}$$

esta ecuación se conoce como la ecuación característica de (10) y se tiene que $y = \alpha e^{\lambda t}$ es solución de (10) si y solo si $\lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0$.

La prueba del siguiente Lema puede encontrarse en ([5], pag. 37).

Lema 3.4. *Todas las soluciones de (10) son oscilatorias si y solo si la ecuación característica asociada* $\lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0$ *no tiene raices reales.*

Lema 3.5. *Si* $\alpha \in (0,\infty)$, *una condición necesaria y suficiente para que todas las raices de* (11) *tengan parte real negativa es que* $0 < \alpha < \pi/2$

Prueba. Veamos primero si $\lambda = a+bi$ con $b \in [0,\infty)$ es solución de (11) . Entonces $a = -\alpha e^{-\alpha}\cos(b); b = -\alpha e^{-\alpha}\sin(b)$.

Por ser λ raiz de (11) tenemos

$$\begin{aligned} 0 + 0i &= 0 = \lambda + \alpha e^{-\lambda} \\ &= (a+bi) + \alpha e^{-(a+bi)} \\ &= (a+bi) + \alpha e^{-a}(\cos(-b) + i\sin(-b)) \\ &= (a+ib) + \alpha e^{-a}\cos(b) - i\alpha e^{-a}\sin(b) \\ &= (a + \alpha e^{-a}\cos(b)) + i(b - \alpha e^{-a}\sin(b)) \end{aligned}$$

lo que implica que $a = -\alpha e^{-a}\cos(b)$ y $b = \alpha e^{-a}\sin(b)$.

Veamos que si $0 < \alpha < \pi/2$ entonces todas las raices de (11) tienen parte real negativa. Supongamos que (11) tiene una raiz $\lambda = a + ib$ con $a \geq 0$, tenemos de (11) que $\lambda = -\alpha e^{-\lambda} \leq 0$, pero $\lambda = 0$ no es raiz de (11) por ser $\alpha > 0$, entonces debemos tener que $\lambda < 0$. Por la paridad de la función coseno podemos suponer que $b > 0$ lo que implica que $0 < b = \alpha e^{-a}\sin(b) < \alpha e^{-a} < \alpha < \pi/2$ lo que implica que $0 < b < \pi/2$, entonces $a = -\alpha e^{-a}\cos(b) < 0$ ya que por ser $0 < b < \pi/2$ se tiene que $\cos(b) > 0$ eto contradice que $a \geq 0$. Esto prueba la suficiencia.

Para probar la necesidad veamos que cuando $\alpha = \pm\pi/2$, (10) tiene un par de raices imaginarias $\lambda = \pm\pi/2i = \pm\alpha i$.

Tenemos que para cada

$$\begin{aligned} \lambda + \alpha e^{-\lambda} &= \frac{\pi}{2}i + \alpha e^{\frac{\pi}{2}-i} = \frac{\pi}{2}i + \alpha\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2}i = 0 \end{aligned}$$

entonces $\frac{\pi}{2}i$ es raiz de (11) . Análogamente se prueba que $-\pi/2i$ es también raiz de (11). Esto prueba la necesidad. ■

Lema 3.6. *Sea $\alpha \in (0, \infty)$ entonces todas las soluciones de $x'(t) = \alpha x(t-1)$ son oscilatorias si $a > e^{-1}$ y tiene una solución no oscilatoria si $a \leq e^{-1}$*

Prueba. Supongamos que la ecuación $x'(t) = \alpha x(t-1)$ tiene un solución oscilatoria con

$$a > e^{-1} \tag{12}$$

, entonces, por el Lema 3.4 la solución característica asociada $\lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0$ tiene una raiz real $\lambda = -u$ con $u > 0$ porque ésta no puede tener raices positivas o nulas por ser $\alpha e^{-\alpha} > 0$, entonces

$$-u + e^{-(-u)} = -u + e^{u} = 0 \Leftrightarrow u = e^{u},$$

como $u > 0$

$$1 = \alpha \frac{e^{u}}{u} \tag{13}$$

Consideremos la función $g(u) = e^{u}/u$ con $u \in (0, \infty)$. Difrenciando esta función tenemos que

$$g'(u) = \frac{ue^{u} - e^{u}}{u^2} = \frac{e^{u}(u-1)}{u^2}.$$

Se puede observar que $u = 1$ es un prunto crítico, además como $g'(u)$ es negativa para $u \in (0, 1)$ y positiva para $u \in (1, \infty)$ entonces la función g posee un mínimo absoluto en $u = 1$, en consecuencia, $g(u) \geq g(1) = e$. De (13) , tenemos

$$1 = \alpha \frac{e^{u}}{u} > \alpha e$$

y de aquí $\alpha < e^{-1}$. Esto contradice (12) , entonces si $a > e^{-1}$ todas las soluciones de $x'(t) = \alpha x(t-1)$ son oscilatorias.

Supongamos ahora que $a \leq e^{-1} \Leftrightarrow \alpha e \leq 1$. Definamos $F(\lambda) = \lambda + \alpha e^{-\lambda}$ entonces $F(0) = \alpha > 0$ y $F(-1) = -1 + \alpha e \leq 0$ por ser $\alpha e \leq 1$. Por continuidad, existe una raiz real en $[-1, 0]$ correspondiente a la cual $x'(t) = \alpha x(t-1)$ tiene una solución no oscilatoria.

Es conocido que si $e^{-1} < \alpha < \pi/2$ con $\alpha = \gamma h$ todas las soluciones de (3) son oscilatorias y convergen en forma oscilante a P. Como la estabilidad asintótica de (6) es equivalente a la estabilidad asintótica de (7) para $t \geq 0$, entonces si $e^{-1} < \alpha < \pi/2$ ambas son oscilatorias, y si $0 < \alpha < e^{-1}$ el número de ceros de las soluciones de (6) es finito por no ser oscilatorio , entonces, por el Lema 3.2 dichas soluciones convergen a 0 en forma monótona y si $e^{-1} < \alpha < \pi/2$ las soluciones de la ecuación de Hutchinson convergen a P en forma oscilante.

Del cambio de variable $N(t) = P(1 + x(s))$ tenemos lo siguiente:

1. Si $0 < \alpha < e^{-1}$ tenemos que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ en forma monótona , es equivalente a que, si $0 < \alpha < e^{-1}$ las soluciones de (3) convergen a P en forma monótona.
2. Si $e^{-1} < \alpha < \pi/2$ las soluciones de la ecuación de Hutchinson (3) convergen a P en forma oscilatoria, es equivalente a , si $e^{-1} < \alpha < \pi/2$ las soluciones de (3) convergen a cero en forma oscilatoria.

En conclusión, si $0 < \alpha < e^{-1}$ las soluciones de (3) y también las de (6) convergen a 0. ■

4. El Teorema de los números primos.

El Teorema de los Números Primos nos proporciona un estimativo sobre la distribución de los números primos en la sucesión natural cuando N es grande.

Definition 4.1. *La función $\pi(n)$ es la que asigna a cada número real n la cantidad de números primos menores o igual a n, por ejemplo, $\pi(1) = 0, \pi(10) = 4, \pi(100) = 25$.*

La afirmación del Teorema fue conjeturada independientemente por Gauss en 1792 y por Legendre en 1798, pero solo en 1896 en forma independiente por J. Hadamard y C. De La Vallé-Poussin demosraron dicho teorema en forma analítica , o sea, mediante el uso de funciones de variable compleja y sus propiedades, pero estas demosraxiones resultaron muy complicadas, por eso otros matemáticos continuaron buscando otras pruebas más simples y transparentes. En 1949 A. Selberg y P. Erdös dieron una demostración más elemental sin usar variable compleja pero la prueba aún es muy complicada. Otra prueba del mismo fué presentada por N.A. Carella (Ver [1]) usando el Teorema del Valor Medio para funciones aritméticas y algunas propiedades de la función Zeta de Riemann.

La sencilla prueba que presentamos aquí está basada en la ecuación de Hutchinson con retardo finito, algunas sugerencias dadas por [3], y en otras, cambios de variable realizados.

El Teorema de los números primos afirma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1. \tag{14}$$

En otras palabras, que para n grande $\pi(n)$ es aproximadamente igual a $n/\ln(n)$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \infty$ ya que en caso contrario los números primos serían finito lo que es contradictorio.

Uno puede derivar procediendo muy heurísticamente el siguiente.

Lema 4.2. *Sea*

$$z(n) = \frac{\pi(n)}{n} = \frac{1}{\ln(n)}.$$

Entonces

$$z'(n) = \frac{-z(n)z(\sqrt{n})}{2n}. \tag{15}$$

Prueba. Veamos que

$$\begin{aligned}
z'(n) &= \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)' = -\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= -\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \frac{1}{\ln(n)} \frac{1}{n} \\
&= -\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \frac{1}{\frac{1}{2}\ln(n)} \frac{1}{2n} \\
&= -\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \frac{1}{\ln(\sqrt{n})} \frac{1}{2n} \\
&= \frac{-z(n)z(\sqrt{n})}{2n}.
\end{aligned}$$

■

Es claro que $z(n) = 1/\ln(z)$ es solución de (15) y que $z(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$., pero surge una pregunta: ¿Todas las soluciones de (15) tienden a cero cuando n tiende a infinito?

Esto es lo que probaremos a continuación y de aquí deduciremos el Teorema de los Números Primos

Teorema 4.3. *El cambio de variable*

$$x(t) = z\left(e^{2^t}\right)2^t - 1$$

transforma la ecuación (15) *en*

$$x(t) = -\ln(2)x(t-1)\left(1 + x(t)\right).$$

Prueba. De (15) se deduce que

$$x(t) + 1 = z\left(e^{2^t}\right)2^t \quad \text{y} \quad x(t-1) = z\left(e^{2^{t-1}}\right)2^{t-1} - 1 \tag{16}$$

Sea $n = e^{2^t}$ entonces $\ln(n) = 2^t$ y

$$t = \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(2)} \tag{17}$$

y

$$t - 1 = \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(2)} - 1 = \frac{\ln\left(\ln(n)\right) - \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{\ln(n)}{2}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\sqrt{\ln(n)}\right)}{\ln(2)} \tag{18}$$

De (16) , (17) y (18) se deduce que

$$x(t) + 1 = x\left(\frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(2)}\right) + 1 = z(n)\ln(n) \Leftrightarrow z(n) = \frac{x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) + 1}{\ln(n)} \tag{19}$$

y

$$x(t-1) = x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right) = z(\sqrt{n})\ln\left(\sqrt{n}\right) - 1 \Leftrightarrow z(\sqrt{n}) = \frac{x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right) + 1}{\ln\left(\sqrt{n}\right)} \tag{20}$$

Derivando la expresión derecha de (19) respecto a n, se tiene

$$z'(n) = \frac{\frac{1}{n\ln(2)}x'\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) - \frac{1}{n}x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) + 1}{\left(\ln(n)\right)^2}$$

reemplazando $z(n), z(\sqrt{n})$ y $z'(n)$ en la ecuación (15) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{n\ln(2)}x'\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) - \frac{1}{n}x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) + 1}{\left(\ln(n)\right)^2} &= \frac{-\frac{x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right)+1}{\ln(n)}\,\frac{x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right)+1}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}}{2n} \\
&= \frac{-\left(x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) + 1\right)\left(x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right) + 1\right)}{\frac{1}{2}\left(\ln(n)\right)^2 2n}
\end{aligned}$$

eliminando en la cuación 2, $1/n$ y $(\ln(n))^2$ y despejando x' resulta

$$\begin{aligned}
x'\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right) &= \ln(2)\left\{-\left(x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right)+1\right)\left(x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right)+1\right)+\left(x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right)+1\right)\right\} \\
&= -\ln(2)\left(x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right)+1\right)\left(x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right)+1-1\right) \\
&= -\ln(2)\left(x\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}\right)+1\right)x\left(\frac{\ln\left(\ln(\sqrt{n})\right)}{\ln(2)}\right)
\end{aligned}$$

De (17) y (18) se deduce que esta última ecuación resultante tiene la forma de la ecuación (6) con $\alpha = \ln(2)$, y como $e^{-1} < \ln(2) < \pi/2$ entonces todas las soluciones $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. ■

A continuación, el Teorema de los números primos.

Teorema 4.4. *Dada la función $\pi(n)$ definida como lacantidad de números primos menores o iguales a $n \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n}\ln(n) = 1.$$

Prueba. De (17) tenemos que $t \to \infty$ cuando $n \to \infty$; ahora,

$$x(t) = z\left(e^{2^t}\right)2^t - 1 = z(n)\ln(n) - 1 = \frac{\pi(n)}{n}\ln(n) - 1.$$

Como $e^{-1} < \ln(2) < \pi/2$ entonces todas las soluciones de (6) tienden a 0 en forma oscilatoria, luego

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{n\to\infty}(z(n)\ln(n) - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}\ln(n) - 1 = 0$$

esto quiere decir que para n grande el orden de crecimiento de $\pi(n)$ es similar al orden de crecimiento de la función $n/\ln(n)$, por tanto

$$\pi(n) \simeq \frac{n}{\ln(n)}$$

y el teorema queda demostrado. ■

Referencias

[1] Carella, N.A. A Simple Proof Of The Prime Number Theorem. *arXiv:1510.03465v1 [math.GM]* . (2015)

[2] Colmenarez, J.E. El Teorema del Número Primo. Trabajo de Grado. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. (2008)

[3] Driver, R.D. Ordinary and delay differential equations. *Springer Verlag*. 1977.

[4] Estrella G., Angel., García A., E.G., Avila V., E.J. Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones. *Miscelánea Matemática*, 51 (2010) 73-92

[5] Gopalsamy, K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic Publisher. 37. 1992

[6] Hutchinson, G.E. Circular Causal System in Ecology. *Ann. New York Academic Sci*. 50 (1948), 221-248

[7] Liz, E. Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de las poblaciones y números primos. *MATerials MATemátics*. Volum 2006, No. 17, 24 pp

[8] Verhulst, Pierre-François. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Corresp. Math. Phys*. 10, 113–121, 1838