# ¿QUÉ ES LA LÓGICA HOY?

David Mercado Pérez[1]

No hay nada más natural en la interacción humana que la conversación. En toda conversación argumentamos siempre que intentamos convencer a nuestro interlocutor de nuestro punto de vista o de que tenemos la razón. Argumentamos encadenando juicios que básicamente todos o la inmensa mayoría aceptan, de modo tal que unos se siguen de otros, anteriores a los primeros y, de todos, concluimos algo.

Sin embargo, muchas veces lo que se tiene como un argumento en la conversación puede resultar "extraño", como cuando alguien dice: *"La propiedad es un robo. Todo lo que robe es de mi propiedad. Luego, estas gemas (que robé) son mías"*. Es obvio que esta argumentación es "chocante", una tontería; es menester garantizar que cada argumento preserva la "Verdad" de las afirmaciones que se hacen. Eso es la Lógica: el estudio de los argumentos que preservan o se cuidan de ser ciertos, es decir, verdaderos.

Fue Aristóteles (384 a 322 A. E. C.) el primero en darnos un Órganon o Instrumento para argumentar de modo convincente. Este estudio necesariamente debía basarse en el Lenguaje, ya que solo interactuamos con los demás hablando, por lo que comprendía tres aspectos: La Gramática, la Retórica y una *Teoría de la Interpretación*. A ese compendio lo llamó Lógica[2] y está basado en los silogismos. Empero, el estagirita olvidó los enunciados condicionales de más de un predicado**.**

En el siglo siguiente, Crisipo de Soli (hacia 280 y 206 A. E. C.) planteará una lógica de enunciados complejos y no simples como la de Aristóteles, como cuando decimos: *"Zenón es un hombre y Sócrates es un hombre"*, donde priman las conectivas *y, o, si, entonces*. Según lo definió Crisipo[3], esto nos permite unir diversos enunciados en los que la verdad del todo dependerá de la verdad de cada una de las partes, ya que las conectivas poseen un único modo de combinar la verdad de las partes en la verdad del todo. Por ejemplo, la conectiva *o* y solo ella, puede usarse del siguiente modo: *"O Juan va a la montaña o la montaña irá a Juan. Juan no fue a la montaña, luego la montaña fue donde Juan"*[4].

---

1 Abogado de la Universidad de Cartagena, especialista en Derecho Público de la Universidad Externado. Email: davidmercadoperez@yahoo.com

2 Todo esto fue estudiado en el curso de Interpretación Constitucional.

3 En su época, los griegos dijeron de CRISIPO que *"si los dioses en el Olimpo, argumentaban, usarían la lógica de Crisipo"*.

4 Pero, al menos durante 1.500 años, CRISIPO de Soli careció de importancia porque sus escritos se perdieron, conociéndose sus ideas solo por referencias indirectas. Ante esto Aristóteles fue convertido en el predilecto de la Escolástica por medio de su uso y abuso.

Sólo hasta el siglo XVII E. C., unos 2000 años después de Crisipo, Gottfried Leibniz (1646 a 1716) introdujo un método para superar el desconcierto provocado por los desvaríos de la lógica de la Escolástica, que construía silogismos donde al menos una de las premisas no era "verdad lógica" sino "verdad revelada". Este método se basa en tratar los enunciados lógicos como enunciados de ecuaciones algebraicas, que usan el signo = para decir que los dos miembros de la misma tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo: A + B = C o bien, A = B.

Luego, si A = B, podemos sustituir el símbolo A en cualquier enunciado por su igual, el símbolo B, preservando su valor de verdad de A. Por ejemplo: *Pedro es un hombre no casado, un hombre no casado es un soltero, luego Pedro es un soltero.*

Leibniz logra así manejar el valor de verdad de un número potencialmente infinito de oraciones usando siempre un número manejable de principios, o si se quiere leyes, que fijó en cuatro:

1.- A = A. Julia es Julia.
2.- Sí A es B y B es C, entonces B es C. Todos los humanos son mortales. Diego es humano. Diego es mortal. Es decir, un silogismo aristotélico.
3.- A = no (no A). Si Diego es mortal, entonces Diego no es inmortal.
4.- A es B = No B es No A. Julia es humana significa que si no es humana no es Julia.

A partir de estas cuatro simples leyes, es factible probar cualquier silogismo sin recurrir al cuadrado de oposiciones aristotélico con lo que Leibniz construye la primera teoría auténtica de la Verdad ya que las conclusiones se deducen a partir de principios preestablecidos por la mera sustitución de símbolos idénticos (Sinónimos)[5].

La obra donde expuso su lógica la titula *Nuevo Órganon* en razón a que se trataba de un modo nuevo de pensar la lógica que no buscaba, a la manera del estagirita, elaborar argumentos convincentes sino pensar conforme a reglas de pensamiento. Es más, allí Leibniz afirma que **"hasta el pensamiento de Dios es necesariamente lógico, porque no puede crear un mundo en el cual las contradicciones fuesen verdaderas".** La Iglesia lo llamó hereje[6] pero su idea de las reglas necesarias para el correcto pensar influirían muchísimo en Kant, Hegel, Marx y Russell, entre otros[7].

## EL CONCEPTO DE NÚMERO

El logos humano no puede racionalizar si no es capaz de medir y, por ende, de contar. Sin

5 El método de demostración preferido de LEIBNIZ fue el de la "Reducción al Absurdo", muy apreciado por la Geometría de Euclides. La "Reductio" parte de suponer que un enunciado es verdad por lo que verificamos que conclusiones podemos sacar de él; si estas son contradictorias, entonces el enunciado inicial es falso ya que toda contradicción es falsa. Su inmensa ventaja es esa, ya que *aunque no podamos elaborar una demostración de dicho enunciado, sí podemos decir que es Verdad al evidenciar que su negación es una contradicción.*

6 En su carta al Duque de Hanover, en 1679, LEIBNIZ, manifiesta: "Pues mi invención emplea la razón en su integridad y es, además, un juez en las controversias, un balance de posibilidades, una brújula que nos guiará por el océano de las experiencias, un inventario de cosas, una tabla de pensamientos, un microscopio para escrudiñar las cosas, un telescopio para predecir lo distante, un cálculo general, una magia inocente, una cábala no quimérica, *una escritura que todos leerán en su propio idioma y que mostrará el camino para la religión verdadera*".

7 KANT dijo al respecto: "El Sistema de Leibniz no tiene nada de Órganon (Instrumento), es en sí un canon o código de leyes que se origina en el pensamiento pero que se aplica necesariamente al Mundo".

esa habilidad, por ejemplo, no hubiera existido la agricultura. La Aritmética nació con las marcas que los primeros hombres hicieron en los troncos de los árboles para "medir" el tiempo y con las "cabezas" de animales poseídos. Con la necesidad de construir poblados sin los cuales el sedentarismo carece de sentido, nace la Geometría, primera forma del número como abstracción. Siglos después nace el Álgebra, donde el número en sí se representa como una abstracción escrita mediante un símbolo. Por ello, con el Álgebra el concepto de cantidad es mucho más amplio; no se refiere a algo concreto, por lo que las cantidades son letras que pueden tener cualquier valor.

La Aritmética solo usa los números hoy llamados naturales, que son insuficientes para hacer cálculos de validez general aplicables a cualquier categoría de número. Esto se debe a que nació con la necesidad de medir magnitudes como la longitud, el peso y el volumen. Mucho antes de que Eudoxio, Euclides, Apolonio, y otros, sistematizasen los conocimientos matemáticos de su época, los babilonios, hacia el 2000 A. E. C., y los egipcios, conocían las fracciones y en el papiro de Rhind (1650 A. E. C.) se presentan soluciones a ecuaciones de primero y segundo grado.

Sin embargo, fueron los griegos los que desarrollaron los hoy llamados números irracionales. Pitágoras de Samos (hacia el 540 A. E. C.) fue su descubridor al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal. Luego, Teodoro de Cirene, de la escuela de Pitágoras, demostrará geométricamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc., son irracionales. Hacia el 300 A. E. C., Euclides, en el libro X de sus *Elementos* habla de magnitudes que al ser medidas no las podemos representar por un número entero o fraccionario y por ello las llamó "inconmensurables"[8]. Al lado de la relación hallada por Pitágoras encuentra la que se expresa por la relación de la circunferencia y su diámetro, expresado por la letra $\pi$, que vale 3,141592...*ad infinitum*.

Será François Viete (1540 a 1603), matemático pero también político y militar consejero privado de Enrique IV, el inventor de la moderna notación algebraica y quien la separe de la Aritmética, con lo que adquiría así un carácter puramente simbólico no compatible con el lenguaje conceptual nacido en el Renacimiento.

En el siglo XIX, la teoría matemática, basada en el cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz, hace muchos progresos, que paradójicamente revelan la insuficiencia del concepto de "número". Karl W. T. Weierstrass crea el *"Análisis matemático moderno"*, abordando el estudio de los números irracionales y el de las funciones de variables complejas y variables reales. Junto a su inseparable alumna Sonia Kowaleswki y el genial Nikolay Lobatchewski (1793 a 1856), basado en

8 EUCLIDES llamó a estos números **Asymmetros –Sin medida–** y a los que hoy llamamos racionales **Symmetros –Con medida–** A los primeros los describió como Alogos y a los segundos como Logos, es decir, *NO aprehensibles por la palabra* y *SI aprehensibles por la palabra.* Será GERARDO di CREMONA, del siglo XII al traducir un comentario árabe sobre EUCLIDES quien cometerá el error de traducir Logos y Alogos, como Rationalis e Irrationalis. El error del Cremonense se difundió durante los siglos XV y XVI y así llegó a nuestra época, nada podemos hacer ya al respecto.

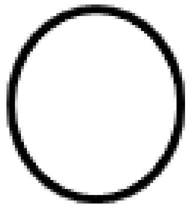
que la noción de espacio es relativa porque depende, según las ecuaciones de Newton, de la posición del observador que lo mide y de la velocidad, rechaza la Geometría de Euclides y propone, en su obra *Pangeometría*, una geometría no Euclidiana tridimensional basada en líneas curvas, ya que las paralelas eran simples rectas coplanarias.

Este enfoque lo proseguirá Riemann (1826 a 1866) en su tesis doctoral *Sobre los fundamentos que sirven de base a la Geometría*. En ella propone un espacio curvo con geodésicas que desempeñan el mismo papel que las rectas poseen en el plano en la Geometría Euclidiana, en el entendido de que el tipo de curvatura siempre modificará dicha geometría (Espacio de Morphé fluida), proponiendo que tales geodésicas fuesen curvas cóncavas a diferencia de las convexas del ruso, dado que se basaba en la esfera como forma básica espacial. Estos dos últimos crearon la matemática básica que haría posible la noción de espacio-tiempo único de la Teoría de la Relatividad.

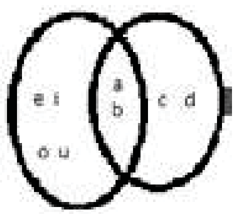
Este proceso desemboca en la "Teoría de Conjuntos" desarrollada por Georg Cantor (1845 a 1918). Según ésta, los Conjuntos son los entes matemáticos más básicos que podemos imaginar. Estos son grupos que tienen un número específico de elementos que pueden no tener nada en común; cada número específico de estos elementos puede compararse con el número específico de elementos de cualquier otro conjunto. Así, podemos hablar de los elementos comunes de los Conjuntos A *y* B, lo que nos indica cómo usamos a "Y"; podemos hablar de cualquier elemento que es miembro de A *o* B, lo que nos indica cómo usamos "O" y, por último, podemos hablar de todo lo que *no* es miembro de A, lo que nos indica cómo usamos "NO".

Los conceptos básicos de la teoría de conjuntos se representan así:

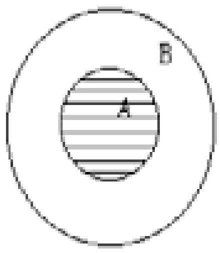
- **Conjunto vacío:**



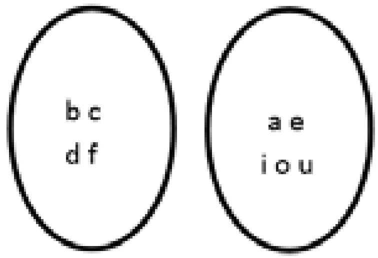
- **Intersección:**




- **Inclusión** : un conjunto comprendido dentro de otro



- **Conjuntos ajenos o conjuntos disjuntos**




Se llama *unión* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A o de B, es decir: A È B:= {x | x Î A Ú x Î B}.

Se llama *intersección* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B, es decir: A Ç B:= {x | x Î A Ù x Î B}.

Si A y B son subconjuntos de un cierto conjunto universal U, entonces es fácil ver que A - B = A Ç B′.

En este caso, las llamadas *operaciones booleanas* (unión e intersección) verifican las siguientes *propiedades*:

| PROPIEDADES | UNIÓN | INTERSECCIÓN |
|---|---|---|
| **1.- Idempotencia** | A È A = A | A Ç A = A |
| **2.- Conmutativa** | A È B = B È A | A Ç B = B Ç A |
| **3.- Asociativa** | A È ( B È C ) = ( A È B ) È C | A Ç ( B Ç C ) = ( A Ç B ) Ç C |
| **4.- Absorción** | A È ( A Ç B ) = A | A Ç ( A È B ) = A |
| **5.- Distributiva** | A È ( B Ç C ) = ( A È B ) Ç ( A È C ) | A Ç ( B È C ) = ( A Ç B ) È ( A Ç C ) |
| **6.- Complementariedad** | A È A' = U | A Ç A' = Æ |

Estas propiedades hacen que partes de U con las operaciones unión e intersección tengan una estructura de álgebra de Boole.

Además de éstas, se verifican también las siguientes propiedades:

- A È Æ = A, A Ç Æ = Æ (*elemento nulo*).
- A È U = U, A Ç U = A (*elemento universal*).
- (A È B)′ = A′ Ç B′, (A Ç B)′ = A′ È B′ (leyes *de Morgan*).

**¿DE LA LÓGICA, QUÉ?**

En 1879 nace la lógica llamada moderna cuando Gottlob Frege (1848 a 1925) publica su obra *Begriffsschrift*[8], en la que propone un *Cálculo Proposicional* que combina los principios de Leibniz con las conectivas lógicas, es decir con Crisipo y no con Aristóteles. Esta combinación es posible por medio de cuantificadores tales como *todos/as, algunos/as, muchos/as y, la mayoría de***.** La época de Frege fue de un gran desarrollo científico acom-

8 El título completo es: "Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen denkens". Publicada en la Ciudad de Halle.

pañado de un desarrollo de la matemática como no se veía desde el tiempo de Newton. Entre la disparidad de las nuevas ramas de la matemática, empero, surgían patrones. Esto llevó al esfuerzo de basarla en un conjunto de reglas a partir de las cuales fuese factible derivar cualquier enunciado. Frege pensó que su cálculo proposicional (Semántico) serviría para este fin. Sin embargo, no tenía un instrumento para expresar dicho cálculo en números, sin los cuales es imposible hacer formulaciones matemáticas ya que los solos cuantificadores no pueden cumplir con esta misión. Por ello se apoyará en la "Teoría de Conjuntos" de Cantor. Al unir lo proposicional (como Crisipo lo señaló) y los Conjuntos, Frege estuvo convencido de haber obtenido la primera lógica de carácter matemático, válida tanto para las matemáticas como para razonar lingüísticamente.

Así, podremos decir muchas cosas sobre grupos de objetos (por ejemplo: *"Algunos hombres son cojos"*), mientras que el estagirita había demarcado que a cada sujeto le correspondía un predicado, cuestión que lleva a absurdos como el que Lewis Carroll nos muestra en *Alicia en el país de las maravillas*:

> *-A nadie veo en el camino, dijo Alicia. -Ojalá tuviera unos ojos así, se lamentó el Rey, ¡Ser de ver a Nadie! Y, ¡Además a esa distancia! ¡Vaya! Bastante hago con ver gente real..."*

Frege evita este problema dando a los cuantificadores un carácter de entes lógicamente independientes y frente al texto de Carroll usa dos: *Todos/as* y *Hay al menos un/a*, con lo que interpreta el texto así:

> "A nadie veo en el camino". O bien,
> "No puedo ver en el camino a todas las personas". O,
> "No existe al menos una persona tal que pueda verla en el camino".

Así, se evidencia que "A nadie veo en el camino" es muy distinto de "Veo un mensajero en el camino", es decir, que la palabra "Nadie" no tiene que referirse a un objeto. Esta solución nos permite evitar los disparates lógicos al estilo de Alicia.

La base de la lógica Fregiana es el formalismo o "Ideografía", es decir, los conceptos o "Begriffe**"**, donde aparecen los cuantificadores y las variables unidas en lo que se tiene como la primera teoría coherente de la cuantificación. En ésta se diferencias nombres de predicados y estos, a su vez, se clasifican en predicados de primer orden y de segundo orden. Vale decir que en una sola obra figuran los análisis, conceptos y métodos de la lógica actual. Por lo tanto, *los números no se dicen de las cosas sino de los conceptos*, y es así que para cualquier concepto P el concepto de segundo orden es el de "equivalente a P", con lo que el número de P es la extensión del

Concepto que siempre será el "equivalente de P". Por ejemplo, afirmar que Y es un número natural, es cierto si y solo si existe un concepto P tal que Y es el número de P.

Con base en lo expuesto, Frege introduce el "Principio del Contexto" que dice que la unidad mínima con la que puede operar la lógica es un enunciado con sujeto y predicado, es decir, una proposición. Como toda proposición es un todo, el significado de las palabras que contiene o que la componen depende siempre del contexto en el cual se enuncia. Por ejemplo, la oración "Tengo frío", que expresa por lo menos dos cosas distintas: una, cuando lo dice Sócrates después de beber la cicuta, y otra, cuando lo dice alguien en el invierno de Dinamarca o de Finlandia.

Con base en este principio, a la lógica de Frege se le conoce como "Cálculo Proposicional" y permite evaluar la verdad de proposiciones complejas que usen conectivas, ya que, a su vez, guardan relación con la verdad. Así, una proposición con la conectiva *"si…entonces"* puede cambiarse a otra que tenga las conectivas "y" y "o", sin modificar la verdad del enunciado complejo original. Por ejemplo, la oración "Si eres un ave entonces tienes alas" puede replantearse por "No puedes ser un ave y no tener alas"[9].

Luego, el cálculo basado en Conjuntos funciona partiendo solo de conectivas y a su vez los conjuntos solo permiten hablar de números, por lo que Frege estaba convencido de que su Cálculo Proposicional era una base sólida para las matemáticas. No obstante, la llamada *"Paradoja de Russell",* invalidaría el optimismo Fregeano.

Cuando Frege estaba a punto de completar la publicación de su teoría, a la que, dicho sea de paso, había consagrado gran parte de su vida, el entonces joven prometedor Bertrand Russell (1872 a 1970) encontró que el uso Fregeano de la teoría de Conjuntos nos lleva a una desastrosa contradicción. Mostrémoslo con este diálogo imaginario:

*Russell*: ¿Es posible que un Conjunto pertenezca a otro?

*Frege*: Sí, así es. El Conjunto de los números 1 y 2 está contenido en el formado por los números 1, 2, 3. Luego, todos los elementos del primero son miembros del segundo.

*R*: Es decir, ¿usted afirma que los conjuntos pueden pertenecer a sí mismos?

*F*: Sí, claro. Por lo que le dije antes, todo miembro del Conjunto A es miembro del Conjunto B, por lo que en sí el primero y segundo conjunto son él mismo; más o menos como la Ley de Leibniz.

*R*: Uuummm, a ver, ¿Podemos tener así el Conjunto de los Conjuntos como el Conjunto de los conjuntos de más de tres miembros?

*F*: Ahh, supongo que sí.

*R*: Entonces, ¿qué podemos decir del Conjun-

9 Obsérvese que la Lógica Fregeana combina las ventajas de Crisipo (Analizar las oraciones en términos de otras simples conectadas lógicamente) con las Leibniz (Demostrar un enunciado a partir de otro por medio de la sustitución de sinónimos), mientras abre una vía para el desarrollo de estas ideas incluyendo diversas conectivas. Pero, en sí, el sueño de Frege fue su intento de deducir las matemáticas desde la lógica.

to de todos los Conjuntos que no son miembros de sí mismos?
*F:* Uumm, Pues, ¡no sé!

Lo que Russell hace ver estriba en que si el Conjunto es miembro de sí mismo, viola el concepto que por definición damos a "Conjunto", pero, *si no es miembro de sí mismo entonces es miembro de sí mismo.* Por lo que al mismo tiempo Es y No es miembro de sí mismo, lo que es una contradicción que viola el principio de *No contradicción*. Este error craso dejó muy abatido y apesadumbrado a Frege, quien se retiró prácticamente de su vida pública para refutar la objeción de Russell, lo que era imposible; murió solitario y muy triste.

Russell, a partir de lo expuesto, llega así a lo que denominará "Gramática Superficial", no sin antes rendirle un homenaje a Frege mientras aseguraba *que el problema estaba en el propio Lenguaje, dado que todas las gramáticas ocultan la auténtica forma lógica de este*. Tal enfoque revolucionaría la filosofía ya que una simple gramática de sustantivos, verbos y adjetivos enmascara los procesos lógicos del pensamiento humano. Con esto el reto consistía en dotar al Lenguaje como una estructura lógica perfecta en sí, lo que conllevaría a que desaparecieran los mayores problemas filosóficos. Junto con Alfred N. Whitehead, Russell escribe la obra *Principia Mathematica*, que se enfoca en *una matemática que sea al mismo tiempo Teoría de Conjuntos y Lógica,* usando un enfoque diferente al de Frege[10]. Así, el cálculo basado en Conjuntos (que funciona partiendo solo de conectivas y donde los conjuntos solo permiten hablar de números) y la Lógica era su Cálculo Proposicional como base sólida para las matemáticas se convirtió en una quimera.

El sistema Russelliano reintroduce los predicados en el cálculo, basándose, al igual que Frege, en los cuantificadores. Según esto se debe distinguirse solo entre "Todos/as" de "Algunos/as", eliminando la necesidad de analizar la existencia del predicado, lo que siempre causa muchos problemas. Por ello, reformuló el cuadrado de oposición de las proposiciones de Aristóteles, planteando la relación A, E, I, O, solo entre cuantificadores. Cuando afirmamos que *"Todos los mamíferos lactan"* y que *"No existe un solo mamífero que no lacte",* en sí, decimos lo mismo y "Todos/as" y "Hay al menos un/a" son intercambiables ya que pueden sustituirse entre sí con símbolos de negación en los lugares respectivos[11].

## Wittgenstein. ¿Cómo aprehendemos al Mundo?

> *"Se ha dicho antes que Dios podría crearlo todo a excepción de cuanto fuera contrario a las leyes lógicas. De un mundo 'Ilógico' no podríamos, en rigor, decir que aspecto tendría".*
>
> ***Tractatus,* 3.031.**

10 Escribir su obra maestra les llevó muchísimo tiempo ya que debían estar muy atentos a no incurrir en contradicciones como la de Frege, por lo que se decidieron a fundamentar que 1 + 1 = 2 *es algo más que evidente porque no depende de la gramática superficial.*

11 El sistema de Russell—Whitehead es *el primero en el que puede argumentarse de un modo más certero que en cualquier otro sistema lógico que le precediera.*

Russell dominó todo el panorama de la filosofía de su tiempo durante algo más de una década, hasta que un pensador atormentado, Ludwig Wittgenstein (1889 a 1951), renunciando a una prometedora carrera de Ingeniería apoyada en la gran fortuna paterna, se convirtió en alumno suyo en el año de 1912. Cuando estalla la Primera Guerra Mundial, en su calidad de nacional del imperio Austro-Húngaro Wittgenstein debe regresar a luchar en la misma, ya que su país hace de detonante de dicho conflicto por el "Asesinato de Sarajevo", y el imperio británico, por su alianza con Francia, es enemigo del austríaco. En medio de las trincheras de las montañas dolomitas en los Alpes centrales, es decir en medio del barro, la sangre y las inmundicias que templarán su carácter y harán de él un místico, escribe la que será la primera de su par de obras fundamentales: *Tractatus Lógico-Filosófico*, obra miliar del pensamiento humano en que su genio brilla excelsamente. El interés esencial de Wittgenstein en el *Tractatus* es *comprender la relación entre Lenguaje, Lógica y Mundo, en cuya base radica lo que es en sí el filosofar, es decir, la búsqueda de las estructuras lógicas subyacentes u ocultas*, mientras ataca a Frege y a Russell por desinteresarse de la misma. Parte de un dato básico que aprendió al leer que en los tribunales de Francia, para dictar sentencia en procesos de accidentes de tráfico vial, se usaban maquetas del escenario y de los carros en la posición que ocupaban en el momento del accidente en ese escenario. Pues bien, dedujo algo que a nadie se le había ocurrido: que lo que hacían esos tribunales solo era posible porque *el Lenguaje es una figura del mundo, es decir, una representación del mismo*.

*Lo que le permite a cualquier lenguaje tener algo en común con la realidad para poder representarla es la forma lógica que la representa*. Todo lenguaje lógico es una forma de la realidad en nuestra mente y ello hace que la Lógica sea común con el lenguaje (el Logos es pensamiento y lenguaje) y con el mundo que las palabras (Conceptos) representan. Nuestras oraciones solo tienen significado gracias a la Lógica; lo verificamos en la célebre pintura de René Magritte en que se ve una pipa debajo de la cual está la oración: "Çeci n'est pas une pipe"[12]. En efecto, *no es* una pipa, pero es la representación lógica de una. *Una figura sin forma lógica no representa nada* como lo sería una pintura abstracta. Una de Pollock, por ejemplo, carece de forma, solo vemos manchas[13].

Hemos visto que, desde Frege, la Lógica ha ido unida al problema de la fundamentación de las matemáticas y la resolución de problemas lingüísticos. Será Rudolf Carnap (1891 a 1970), alumno de Frege y enteramente influido por el *Tractatus* quien dé el paso de poner el énfasis de la lógica en lo que es la Ciencia. Él fue la estrella del Círculo de Viena, un grupo de filósofos y científicos que se propusieron "purgar" a la

13 "Esto NO es una Pipa".

12 Debe precisarse que "Mundo" no significa en el *Tractatus* "experiencia sensible", sino algo más definitivo: *"interpretación del significado de lo que lógicamente captamos según su forma"*.

filosofía de todo lo que no fuese científicamente verificable o, bien, expresable como una Ley lógica[14]. En esta perspectiva, Carnap desplegará su habilidad intentando desarrollar una interpretación rigurosa de cualquier lenguaje formal posible, ya que el único modo legítimo de investigación filosófica es el "Análisis Lógico" y lo que se resista a ello es simple metafísica.

Empero este enfoque era radical y en la práctica restringía el lenguaje, a tal punto que le resultaba imposible expresar todas sus concepciones. Dado que Carnap entendió el concepto de "Mundo" de Wittgenstein como "Experiencia Sensible", el resultado fue que la pretensión de derivar todas las oraciones significativas de la Lógica y de la Experiencia sensible puso en serio peligro su enfoque de subordinar la validez de la lógica a la de la ciencia. Entonces se vio obligado a moderar su concepción expuesta en *The Logical Syntax of Languaje* para plantear lo que llamó "El Principio de Tolerancia". Éste afirma que *"no existe una sola lógica sino muchas lógicas"*. De ahí se deriva que *cualquier expresión lingüística es aceptable en tanto existan suficientes reglas que rijan su aplicación lógica*. Hoy estamos en eso.

**David Hilbert. ¿Qué es demostrar?**

*"¡Wir müssen wissen, wir werden wissen! In der mathematik gibt es kein ignorabimus"*[15].

David Hilbert,
Congreso Internacional de Matemáticas, Berlín, 1900.

Visto el gran esfuerzo de darle a las matemáticas sólidas bases lógicas, y los problemas generados por las propuestas de Frege, Russell y Carnap, David Hilbert (1862 a 1943) propondrá una "Teoría de la Demostración", llamada por él "Metamatemática". Su punto de partida es el que las distintas ramas de la matemática tienen puntos en común y el principal de ellos es el *de que parten de axiomas o enunciados cuya verdad se da por supuesta, al ser muy evidentes y son ellos los que nos permiten demostrar todos los demás enunciados de cada rama*[16]. En la medida en que los axiomas no se contradigan entre sí pueden usarse para construir una posible rama de la matemática, de allí que se *propusiera hallar el "modo de demostrar" la consistencia de cualquier listado de axiomas*. Si una cualquiera de esas ramas superara las condiciones de Hilbert demostraría que sus bases son sólidas.

El sustento del método de la Metamatemática está en la idea de que es posible establecer incuestionablemente la consistencia de, por ejemplo, el cálculo, si podemos mostrar que sus axiomas NO derivan de algo así como que 1 = 0, ya que es un disparate que viola la reducción al absurdo de Leibniz, instrumento muy apreciado por Hilbert.

**Kurt Gödel. El "Enfant Terrible"**

Los esfuerzos de Hilbert, y de muchos más que compartían su enfoque, para encontrar

14 "La filosofía debe ser reemplazada por la lógica de la Ciencia y la lógica de la Ciencia es la sintaxis lógica del Lenguaje científico". Carnap, *The Logical Syntax of Languaje*, 1934.
15 "Nosotros debemos saber, nosotros sabremos, en matemática no hay ignorabimus". Hoy se tiene esta expresión como una desmesura de la razón, ya que *la matemática demuestra que siempre habrá "ignorabimus".*
16 Estas son, entre otras, la Aritmética, la Geometría, la Trigonometría y el Cálculo.

el mecanismo o la fórmula que condensase la "Metamatemática" solo llevaron a resultados muy preliminares, como si se estrellasen contra un muro infranqueable. Pero el entonces joven Kurt Gödel (1906 a 1978) a sus 23 años y solo con un pregrado mientras estudiaba su doctorado, se sintió atraído por eso de que en "Matemática NO hay Ignorabimus", y demostró que todas las proposiciones del Cálculo de Predicados de Russell son verdaderas pero que, igualmente, todo enunciado verdadero es demostrable en dicha lógica, por lo que el sistema Russelliano es "simultáneamente consistente y complejo" (1929). Los siguientes diez años, a pesar de la crisis de la bolsa de Nueva York y la parálisis de la producción en Occidente, mientras los fascismos ascendían, fueron de intensas publicaciones que influyeron en los ejes temáticos para el desarrollo de la lógica y, lo más importante, para fundamentar lógicamente la matemática.

En 1930, con 24 años, Gödel trató de extrapolar los resultados obtenidos con el "Cálculo de Predicados" de Russell a la Aritmética y descubrió que *cualquier sistema complejo y consistente que se pretendiese que fuese la fundamentación de la Aritmética siempre sería incompleto*. Si eso era para la sencilla Aritmética ¿qué se dejaba para la fantástica complejidad del Cálculo?

El sueño de Hilbert de que las matemáticas se basasen en un número finito de axiomas era de imposible concreción *ya que no toda proposición verdadera es demostrable*. El mundo de la matemática quedó estupefacto: un matemático, Gödel, acabó con la ilusión de que se podía resolver ese tipo de contradicciones al formular sus dos famosos "Teoremas de la Incompletud", frente a los cuales, todos coinciden en que son uno de los más grandes hechos del pensamiento humano en el siglo XX. Allí se demuestra que *no existe un procedimiento general que haga de las matemáticas algo coherente*. Concretamente, lo que él prueba es que *la propia matemática, apelando a su lenguaje matemático, no puede probar su coherencia, precisamente por eso, por ser un lenguaje, y por serlo su semántica crea paradojas*[17].

Los teoremas de Gödel[18] demuestran que *ningún sistema matemático puede probar todas sus afirmaciones como verdaderas*[19], lo que equivale a afirmar que e*xisten ciertas cosas que nosotros los humanos sabemos ciertas pero que nunca podremos probar*. Es como si el Cosmos nos dijese: "Les he ocultado una porción de la verdad, podrán conocer una muy amplia porción de ella pero nunca su totalidad". Esas verdades ocultas serían como unos *a prioris* en el sentido Kantiano.

17 La "Incompletud", al poner lo dicho en evidencia, expone una sutileza que hasta ese momento ignorábamos, que es intrínseca a la arquitectura del Cosmos: *Cualquier sistema es de base matemática y, por serlo, NO PUEDE probar los supuestos de que parte para auto erigirse como un todo coherente, es decir, no puede probar todas sus afirmaciones.*

18 Sus Teoremas de la Incompletud señalan el inicio cierto de la *Lógica Matemática* como tal. La fama de "Chico Genio" que le sobreviene, la anexión de Austria por la Alemania de Hitler en marzo de 1938, su convocatoria para presentarse como recluta en la nueva Wehrmacht hacen que huya, como muchísimos más, a EE.UU., lo que le dispara su larvada hipocondría; siempre será un ser atormentado, empero, junto con Einstein y Oskar Morgenstein trabajará, hasta su dolorosa muerte, en la Universidad de Princeton. Los tres dieron origen al Departamento de Matemáticas más brillante no solo de EE.UU. sino de todo el Planeta: el mejor lógico-matemático y el padre de la Teoría de la Relatividad, juntos, dando clases de doctorado, ni más ni menos.

19 Gödel publicó el artículo que contenía la demostración de la Incompletud bajo el título *Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (*Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica*), en la entonces ya prestigiosa *Monatshefte Für Mathematik Und Physik* (*Revista mensual de Matemática y Física*).

Dado que, según Einstein, "la naturaleza nos oculta su secreto en razón de su esencia majestuosa pero nunca por malicia", el *Principio de Incertidumbre, los sistemas caóticos y los teoremas de la Incompletud nos ponen de presente una suerte de significación profunda de lo que denominamos "Creación", al revelarnos las tres "sutilezas que ocultan el secreto que la soporta", mientras que, por otro lado, nos ponen en evidencia que todo el Cosmos reposa en la Matemática.*

Ahora bien, ¿cómo se conectan esos tres proyectos, a saber, los de la Lógica Matemática, la Lógica Simbólica y la Lógica Filosófica?

La Lógica Simbólica, tal como Frege la concibió, es la "investigación pura de la manipulación de símbolos, dichos símbolos no tienen que corresponderse con nada, son entes abstractos cuyas interacciones se expresan por medio de acciones".

La Lógica Matemática, tal como Russell la pensó, es la "continuación del proyecto de unir las matemáticas con la Teoría de Conjuntos, con el fin de unificar diversos campos matemáticos descubriendo sus propiedades comunes".

La Lógica Filosófica, según Wittgenstein la expuso, es la "que trata de aplicar la Lógica a conceptos concretos, en lugar de símbolos puros; se ocupa de la interacción de conceptos reales como probabilidad y creencia".

El elemento que las conecta es que están subordinadas a una "Teoría de la Demostración", vale decir, la que permite decir si un enunciado se sigue de otro o no.


La Teoría de la Demostración desarrolla varios métodos para mostrar lo que se sigue o se desprende "lógicamente" de una "fórmula"; esta última no es más que una serie de elementos de sintaxis lógica que atribuyen definiciones rígidas a los elementos de sintaxis lógica. Frente a esto Frege, por ejemplo, teniendo en cuenta que la sintaxis lógica afectará la "Verdad" de los enunciados, "definió" los elementos de dicha sintaxis en términos de "Verdad" y "Falsedad". Así, la conectiva lógica "^" en la oración: "El cielo está gris ^ llueve" es "Verdadera" solo si las oraciones simples *"El cielo está gris"* y *"Llueve"* son a la vez verdaderas.

Este enfoque Fregeano de definir las conectivas en términos de Verdad y Falsedad triunfó entre todos los lógicos a tal punto que nadie ha estimado modificarlo. De allí que cuando Frege habla de la "Verdad de ^", lo que signifique la oración es irrelevante; lo importante frente a todo lo demás es si la oración es verdadera o falsa, ya que la conectiva nunca se ve afectada por lo que dice la oración. Esto último explica el porqué de su uso de símbolos simples como *p* o *q* para sustituir por cada uno de ellos expresiones completas, idea esta que terminaría poniéndose de moda entre los lógicos.

**Wittgenstein y sus tablas de conectivas lógicas**

Estas tablas son en sí un método de representar las conectivas ahorrándonos el recargado mecanismo de Frege, abundante en verbosidad. Supongamos que representamos "El Cielo está gris" por *p* y "Llueve" por *q*; cada de ellas puede ser verdadera o falsa, o las dos verdaderas o las dos falsas, por lo que se puede representar todo esto así:

| P | Q | P | Q | P ^ Q |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | F |
| F | F | F | F | F |

De estas tablas se desprenden dos cosas, una es de importancia para los lógicos y la otra para la electrónica moderna. Los primeros usan las tablas anteriores para representar la verdad de cualquier serie lógicamente conectada de oraciones. Para entenderlo debemos considerar otras dos conectivas: "v" y "¬". Se leen: "Y", "Entonces" o "Luego", la primera, y "No", la segunda. La tabla de verdad con "v" es la siguiente:

| **p** | **q** | **p v q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La Tabla de Verdad con "¬" es:

| **p** | **¬p** |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

**Las Tautologías**[20]

Nos permiten una base sólida para probar que un argumento lógico es necesariamente válido. Las tablas de verdad de Wittgenstein permiten muy fácilmente descubrir todas las tautologías por medio de simples símbolos que pueden combinarse.

Dicha combinación nos ayuda a calcular las condiciones de verdad de cualquiera oración de estructura lógica compleja; **p v ¬p** origina la siguiente tabla:

| **p** | **¬p** | **p v ¬p** |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

20 Una tautología es aquella en la cual una verdad se sigue de otra por necesidad, tan solo en virtud de la sintaxis lógica; por ello, cualquier oración con la misma sintaxis lógica será siempre verdadera.

**Nota**: Cuando una fórmula solo tiene V significa que toda la oración es verdadera en todas las situaciones. Por ejemplo, "O llueve o no llueve" nunca puede ser falsa  por ser una Tautología.