

## KREN KİRİŞLERİNİN HAREKETLİ TEKİL YÜKE MARUZ SÖNÜMLÜ EULER-BERNOULLİ KİRİŞİ OLARAK MODELLENMESİ VE DİNAMİK ANALİZİ

<sup>1</sup>C. Oktay AZELOĞLU, <sup>2</sup>Sami KURAL

<sup>1,2</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul

<sup>1</sup>[azeloglu@yildiz.edu.tr](mailto:azeloglu@yildiz.edu.tr), <sup>2</sup>[samikural@gmail.com](mailto:samikural@gmail.com)

(Geliş/Received: 27.03.2018; Kabul/Accepted in Revised Form: 16.05.2018)

**ÖZ:** Hareketli yük problemi pek çok mühendislik alanını etkileyen önemli bir konudur ve krenlerde dinamik etkilere neden olmaktadır. Günümüzde, krenler daha yüksek hızlarla çalıştığından, kren tasarımında hareketli yükten kaynaklanan dinamik etkilerin çok iyi incelenmesi ve analiz edilmesi gerekir. Bu nedenle, bu çalışmada hareketli yüke maruz kren kirişlerinin dinamik davranışları incelenmiştir. Bu amaçla, kren ana kirişini temsil eden basit mesnetli, homojen, izotropik bir Euler-Bernoulli tipi kiriş için hareketli yük problemi matematiksel olarak ifade edilmiştir. Hareketli yük kiriş tekil bir kuvvet şeklinde etki ettirilmiş ve kiriş önceki çalışmalardan farklı olarak sönümsüz değil, hafif sönümlü olarak ele alınmıştır. Bu matematiksel ifadelerin çözümünden kren kirişleri için yer değiştirmeleri, eğilme momentini, kesme kuvvetlerini veren matematik modeller elde edilmiştir. Matematik modeller Matlab programında algoritmalar oluşturularak çözülmüş ve çeşitli çalışma senaryoları için benzetim çalışmaları yapılmıştır. Senaryolar, farklı hızlar ve farklı kütle oranları için belirlenmiş ve her bir senaryo için kirişte sönümlü durumda oluşan yer değiştirmeler, eğilme momenti, kesme kuvveti değerleri grafikler ve çizelgeler halinde verilerek değerlendirilmiştir. Ayrıca, sonuçlar statik durumla da karşılaştırılmıştır. Çalışmanın sonuçları, yüksek hızlarda çalışan krenler için statik hesapların yetersiz kaldığını göstermektedir. Krenlerde, hareketli yükten kaynaklanan dinamik etkilerin çalışma senaryolarına göre analiz edilmesi ve tasarımın buna göre yapılması uygun olacaktır.

**Anahtar Kelimeler:** Dinamik davranış, Hareketli yük, Kren kirişleri, Sönümlü matematik model

### Modeling and Dynamic Analysis Of Crane Beams As Euler-Bernoulli Beam with Damped Subject to Moving Singular Load

**ABSTRACT:** The moving load problem is an important issue that affects many engineering fields and causes dynamic effects in the cranes. Nowadays, as the cranes are operated with higher speeds, in the design of the cranes, the dynamic behaviors arising from the moving loads should be investigated and analysed accurately. Therefore, dynamic behaviors of the crane beams under the moving load were investigated in this study. For that purpose, the moving load problem was mathematically stated for a simply supported, homogeneous, an isotropic Euler-Bernoulli type beam representing the main beam of the crane. The moving load is acted as a concentrated, singular load on the beam and the crane beam was obtained as damped, not undamped unlike the previous studies. Thus, from the solution of these mathematical expressions, the mathematical models which gives the deflections, bending moment, shear forces were obtained for the crane beams. Then, the algorithms were created in the Matlab program and the simulation studies were carried out for various working scenarios. The scenarios were determined for different speeds and different mass ratios and every scenario was evaluated by the diagrams and tables the deflections, bending moment, shear force that occurred on the beam in the damped situation. Besides, the results were also compared with the static situation. As a result, the studies show that static calculations are inadequate for cranes working in high speed. So, it will be appropriate both to analyze

dynamic behaviors arising from the moving load according to the working scenarios and to design according to obtained results for the cranes.

**Keywords:** Crane beams, Dynamic behavior, Mathematical model with damped, Moving load

## GİRİŞ (INTRODUCTION)

Hareketli yük altındaki kiriş benzeri yapıların titreşim analizi, yapı dinamiğinde ve üzerinde hareket eden yükler bulunan demir yolu, karayolu köprülerinde, viyadüklerde ve buna benzer birçok mühendislik alanında önemli bir konudur (Di Lorenzo ve diğ., 2017). Hareketli yükler transport sistemlerinde özellikle krenlerde de önemli dinamik etkilere neden olurlar. Son yıllarda hareketli yüklerin daha hızlı hareket ettirilmesi beklenirken aynı zamanda daha ince ve hafif yapıların tasarlanması istenmesi hareketli yük probleminin neden olduğu dinamik etkileri arttırmaktadır (Di Lorenzo ve diğ., 2017).

Hareketli yük problemi günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından teorik ve deneysel çalışmalarla incelenmiştir. (Fryba, 1999), kiriş üzerinde hareket eden yüklerin etkilerini geniş bir yelpazede incelemiştir. Çalışması hareketli yük altındaki kirişlerin dinamik davranışları için temel kaynak niteliğindedir. (Azeloğlu ve diğ., 2015), hareketli yük altında çalışan kren kirişlerinin deformasyon analizlerini deneysel ve teorik olarak incelemiştir. Bu amaçla bir sonlu eleman modeli oluşturulmuş ve nümerik modelin sonuçlarının geçerliliğini doğrulamak için deneyler yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. (Esen, 2009,2010), doktora tezinde hareketli yüke maruz köprülü kren kirişlerinin sönümsüz dinamik davranışlarını Newmark metodu ve basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişi için çıkarılan hareket denklemlerinden elde edilen matematik modellerle incelemiştir. Bu çalışmadan farklı olarak kiriş sönümsüz olarak ele alınmış ve analizlerde sonlu elemanlar yöntemine göre çözüm yapan SAP 2000 paket programı kullanılmıştır. (Yang ve diğ., 2000), hareketli osilatör problemi olarak adlandırılan 1 boyutlu elastik sistemi incelemiştir. Problem, bağlı yer değiştirme modeli kullanılarak formüle edilmiştir. Birleşik hareket denklemleri, doğrudan sayısal yöntem ile çözülebilmesi için integral denklemlere dönüştürülmüştür. Yay ve basit mesnetli kiriş için sayısal sonuçlar sunulmuştur ve hareketli kuvvet sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. (Pesterev ve diğ., 2003), bu çalışmada hareketli bir kuvvete maruz bir kirişin titreşim problemini incelemiştir. Çalışmanın amacı, hareketli bir kuvvetin herhangi bir hız değerinde kirişin maksimum sehimini bulmak için basit bir araç geliştirmektir. Maksimum davranış fonksiyonunu her iki ucu sabit mesnetli kiriş için sayısal olarak ve basit mesnetli kiriş için ise analitik olarak hesaplamışlardır. Daha yüksek titreşim modlarının maksimum sehim üzerindeki etkisini de incelemiştir. (Low, 1997), bu çalışmada, çoklu kütleleri taşıyan değişik kirişler için öz fonksiyonların kullanılmasıyla bir titreşim analizi yapmıştır. Analitik sonuçlar, deneysel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Mod şekillerini içeren bir karşılaştırma çalışması yapılmış ve polinom yaklaşımlarıyla incelemiştir. (Foda ve diğ., 1998), basit mesnetli üzerinde hareketli kütle olan Bernoulli-Euler kirişinin davranışını saptamak için bir dinamik Green fonksiyonu yaklaşımı kullanmışlardır. Önerilen metod kirişin sehimini için basit matris açıklamalarını ihtiva etmektedir. Çeşitli hız ve kütle oranları için kirişin dinamik davranışlarını incelemiştir. (Azeloğlu ve Kural, 2017), yaptıkları çalışmada kren kirişlerini tekil kuvvete maruz sönümsüz durumdaki bir Euler-Bernoulli kirişi olarak ele almışlar ve yer değiştirmeleri veren matematik modeli elde ederek farklı senaryolara göre benzetim çalışmaları gerçekleştirmişlerdir. Ancak bu çalışmada kiriş sönümsüz olarak ele alınmış ve eğilme momentlerini ve kesme kuvvetini veren matematik modeller elde edilmemiştir. Hareketli yük probleminin çözümüne ilişkin çalışmalar literatürde devam etmektedir.

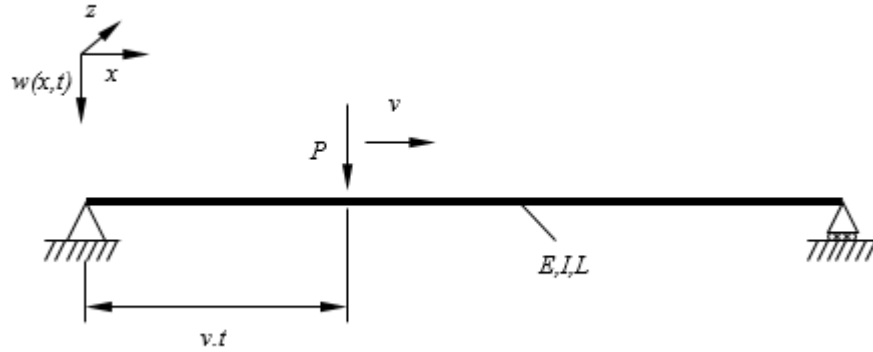
Bu çalışmada hareketli yüke maruz kren kirişlerinin dinamik davranışları incelenmiştir. Literatür incelemesinde yer verilen diğer araştırmacıların ve yazarların çalışmalarında kren kirişlerinin sönümsüz olarak incelendiği görülmektedir. Bu çalışmada, literatürden farklı olarak kren kirişi hafif sönümlü olarak ele alınmış ve incelenmiştir. Bu amaçla, kren ana kirişini temsil eden basit mesnetli, homojen,

izotropik bir Euler-Bernoulli tipi kirişinin hareket denklemleri sınır ve başlangıç koşullarından elde edilerek hareketli yük için çözülmüş ve hafif sönümlü durum için sistemin dinamiğini yansıtan matematik modeller elde edilmiştir. Bu matematik modeller Matlab programında algoritma oluşturularak çözülmüş ve kren kirişi üzerinde farklı hız ve yük değerleri için belirlenen çalışma senaryolarına göre benzetim çalışmaları yapılmış ve sonuçlar grafikler ve çizelgeler halinde verilmiştir. Ayrıca bir değerlendirme yapılabilmesi açısından sonuçlar statik durumdaki değerlerle karşılaştırılmıştır. Sonuç kısmında benzetim çalışmalarından elde edilen tüm sonuçlar değerlendirilmiş ve kren kirişlerinin tasarımı açısından bazı konstrüktif öneriler sunulmuştur.

## MATEMATİK MODEL (MATHEMATICAL MODEL)

### Problemin Formülasyonu (Formulation of The Problem)

Üzerinde hareketli yük bulunan basit mesnetli, homojen, izotropik Euler-Bernoulli tipi kirişin fiziksel modeli Şekil 1'de gösterilmiştir. Yük kirişin sol tarafından sağ tarafına sabit bir hızda hareket etmektedir. Kirişin dönme ataleti ve kayma yer değiştirmesi dikkate alınmamaktadır.



Şekil 1. Tekil kuvvet şeklinde bir hareketli yüke maruz kren kirişi

Figure 1. A crane beam subjected to a moving load in the form of singular force

Basit mesnetli, homojen, izotropik bir Euler-Bernoulli tipi kirişin dinamik düşey yer değiştirmelerinin kısmi diferansiyel denklemi aşağıda gösterilmiştir (Fryba, 1999).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P\delta(x - vt) \quad (1)$$

Burada,  $E$  Young modülü,  $I$  atalet momenti,  $\mu$  kirişin birim ağırlığı,  $x$  kirişin koordinat eksenini,  $t$  zaman,  $w(x, t)$  kirişin düşey yer değiştirmesi,  $\omega_b$  sönümlü dairesel frekansı,  $P$  hareketli tekil yüke eşdeğer kuvveti,  $\delta(x - vt)$  Dirac-delta fonksiyonudur.

Basit mesnetli bir kirişin sınır ve başlangıç şartları ( $x=0$  ve  $x=L$  için), (2) ve (3) eşitliklerindeki gibi ifade edilebilir.

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad , t=0 \text{ için} \quad (3)$$

Mekanikte Dirac-delta fonksiyonu,  $\delta(x)$ ,  $x=0$  noktasında hareket eden birim konsantre kuvvet olarak düşünülebilir. Dirac-delta fonksiyonu (4) eşitliğinde Heaviside fonksiyonunun dağılımsal türevi olarak tanımlanmıştır.  $H(x)$  fonksiyonu, Heaviside birim fonksiyonu olarak eşitlik (5)'deki gibi tanımlanmaktadır (Fryba, 1999), (Mikvsinski ve diğ., 1957).

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx} \quad (4)$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{için } x < 0 \\ 1 & \text{için } x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Kiriş üzerindeki yükü ifade eden genelleştirilmiş bir fonksiyon olan Dirac-delta fonksiyonu (6) ve (7) ifadelerinde gösterilmiştir.

$$p(x,t) = \delta(x)P \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (7)$$

Dirac-delta fonksiyonunun aşağıdaki ilişkileri mevcuttur ( $a, b, \xi$  sabit sayılar ve  $f(x)$ ,  $[a,b]$  aralığında sürekli bir fonksiyondur).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \quad (8)$$

$$\int_a^b \delta(x-\xi)f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{için } \xi < a < b \\ f(\xi) & \text{için } a < \xi < b \\ 0 & \text{için } a < b < \xi \end{cases} \quad (9)$$

Dirac-delta fonksiyonunun  $n$ 'inci dereceden genelleştirilmiş türevi daha genel olarak (10) ifadesindeki gibi düzenlenir.

$$\int_a^b \delta^{(n)}(x-\xi)f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{için } \xi < a < b \\ (-1)^n f^{(n)}(\xi) & \text{için } a < \xi < b \\ 0 & \text{için } a < b < \xi \end{cases} \quad (10)$$

Sınır ve başlangıç koşulları olan denklem (2) ve (3), denklem (1) ile birlikte integral dönüşüm metodu yardımıyla çözülmüştür. İlk olarak denklem (1)'in her bir terimi  $\sin(j\pi x/L)$  ile çarpılmış ardından 0 ve L aralığında  $x$ 'e bağlı olarak integrali alınmıştır. Denklem (1)'i çözmek için ek açıklamalarda verilen Fourier sinüs sonlu integral dönüşümü yardımıyla denklem (11) elde edilmiştir.

$$V(j,t) = \int_0^L w(x,t) \sin \frac{j\pi x}{L} dx$$

$$, j=1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

$$w(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} V(j,t) \sin \frac{j\pi x}{L}$$

Denklem (11), orijinal  $w(x,t)$ 'nin dönüşümünün  $V(j,t)$  olduğunu göstermektedir. Verilen yöntemler ile sınır koşulları (2) ve Dirac fonksiyonun, (8) eşitliğindeki özelliklerini kullanarak ek açıklamalarda verilen Fourier sinüs sonlu integral dönüşüm metodu yardımıyla (12) eşitliği elde edilmiştir.

$$\frac{j^4 \pi^4}{L^4} EIV(j,t) + \mu \ddot{V}(j,t) + 2\mu\omega_b \dot{V}(j,t) = P \sin \frac{j\pi vt}{L} \quad (12)$$

Basit mesnetli bir kirişin  $j$ 'inci mod titreşimindeki doğal dairesel frekansı denklem (13)'de gösterilmiştir.

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4}{L^4} \frac{EI}{\mu} \quad (13)$$

Doğal frekans ise denklem (14)'de verilmiştir.

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} = \frac{j^2 \pi}{2L^2} \left( \frac{EI}{\mu} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Hareketli yükün kirişi etkileyen dairesel frekansı ise denklem (15)'de ifade edilmektedir.

$$\omega = \frac{\pi v}{L} \quad (15)$$

(12) eşitliği, denklem (13), (14) ve (15) kullanılarak düzenlendiğinde (16) ifadesi elde edilir.

$$\ddot{V}(j,t) + 2\omega_b \dot{V}(j,t) + \omega_j^2 V(j,t) = \frac{P}{\mu} \sin j\omega t \quad (16)$$

(16) ifadesini çözmek için ek açıklamalarda verilen Laplace-Carson integral dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu amaçla, denklem (16) ilk olarak  $e^{-pt}$  ile çarpılmış ve her bir terimi  $t$ 'ye bağlı olarak 0 ve  $\infty$  aralığında integrali alınmış ardından  $p$  ile çarpılmıştır. Burada,  $p$  kompleks düzlemdeki bir değişkendir. Laplace-Carson integral dönüşüm metodu ve yukarıdaki işlemlerin uygulanmasıyla (17) eşitliği elde edilmiştir.

$$V^*(j, p) = p \int_0^{\infty} V(j, t) e^{-pt} dt \quad (17)$$

$$V(j, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} e^{tp} \frac{V^*(j, p)}{p} dp$$

(17) ifadesinde ikinci eşitlikte yer alan  $a_0$  integralin, kompleks değişken  $e^{tp} V(j, t) / p$ 'nin fonksiyonunun tüm tekil değerlerinin sağında kalan sanal eksene paralel düz bir çizgi boyunca alındığını ifade etmektedir. Bu nedenle bütün tekilliklerin gerçekte argümanı  $a_0$ 'dan küçüktür (Fryba, 1999).

Denklem (16), (17) eşitliği, başlangıç koşulları (3) ve ek açıklamalarda verilen Laplace-Carson integral dönüşüm metoduna göre dönüştürülerek (18) eşitliği elde edilir ve (19) ifadesindeki gibi düzenlenebilir.

$$p^2 V^*(j, p) + 2\omega_b p V^*(j, p) + \omega_j^2 V^*(j, p) = \frac{Pj\omega}{\mu} \frac{p}{p^2 + j^2 \omega^2} \quad (18)$$

$$V^*(j, p) = \frac{Pj\omega}{\mu} \frac{p}{p^2 + j^2 \omega^2} \frac{1}{p^2 + 2\omega_b p + \omega_j^2} \quad (19)$$

Kompleks değişkenli fonksiyon (19) eşitliğinin kutuplarının pozisyonuna bağlı olarak, analizi daha kolay hale getiren birkaç durum arasında ayırım yapılabilmesi için aşağıdaki iki boyutsuz parametre tanımlanmıştır. Burada, hız parametresini (20) ve sönümleme parametresini ifade eden (21) aşağıda verilmiştir (Fryba, 1999).

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_j} = \frac{v}{2f_j L} = \frac{T_j}{2t} = \frac{vL}{\pi} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{(1/2)} = \frac{v}{v_{kr}} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\omega_b}{\omega_j} = \frac{\omega_b L^2}{\pi^2} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{(1/2)} \quad (21)$$

(20) ve (21) eşitliklerinde kullanılan bazı değerler aşağıda verilmiştir. Bunlar: (22) eşitliği,  $j$ 'inci mod serbest titreşim periyodudur. (23) eşitliği, kiriş üzerinde hareket eden yükün hareket süresidir. (24) eşitliği, hareketli yükün kritik hızıdır.

$$T_j = \frac{1}{f_j} \quad (22)$$

$$t = \frac{L}{v} \quad (23)$$

$$v_{kr} = 2f_j L = \frac{\pi}{L} \left( \frac{EI}{\mu} \right)^{1/2} \quad (24)$$

(25) eşitliği,  $x=L/2$  noktasında statik tekil bir kuvvet  $P$  ile yüklü bir kirişin statik yer değişimini ifade etmektedir.

$$v_0 = \frac{PL^3}{48EI} \approx \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \quad (25)$$

Hafif sönümlü ( $\beta \ll 1$ ) bir kirişin dairesel frekansı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\omega'_{(j)}{}^2 = \omega_{(j)}^2 - \omega_b^2 \quad (26)$$

Hafif sönümleme durumunda (19) eşitliğinin dört kutbu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} 1.kutup &= i.j.\omega, & 3.kutup &= -\omega_b + i\omega'_{(j)}, \\ 2.kutup &= -i.j.\omega, & 4.kutup &= -\omega_b - i\omega'_{(j)}. \end{aligned} \quad (27)$$

$p^2 + 2\omega_b p + \omega_{(j)}^2 = (p + \omega_b)^2 + \omega'_{(j)}{}^2$  olduğundan orijinal  $V(j,t)$ , ek açıklamalarda verilen Çizelge A2'de bulunan son eşitlik yardımıyla hesaplanabilir. Denklem (11)'deki birinci eşitlik yine aynı denklemdeki ikinci eşitlikte yerine konulup, ters Fourier dönüşümü yapılp,  $t \leq T$  için bazı düzenlemelerden sonra kirişteki sehimin analitik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir (Fryba, 1999), (Esen, 2009).

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 [j^2 (j^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2]} \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} \\ &\left[ j^2 (j^2 - \alpha^2) \sin j\omega t - \frac{j\alpha [j^2 (j^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(j^4 - \beta^2)^{1/2}} \cdot e^{-\omega_b t} \cdot \sin \omega'_{(j)} t - 2j\alpha\beta (\cos j\omega t - e^{-\omega_b t} \cdot \cos \omega'_{(j)} t) \right] \quad (28) \end{aligned}$$

Eğilme momenti ( $M(x,t)$ ) ve Kesme kuvveti ( $T(x,t)$ ) ifadeleri, eşitlik (28)'in denklem (29) ve (30)'da bulunan eşitliğinde yerine yazılıp gerekli işlemlerin uygulanmasıyla elde edilmiştir.

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (29)$$

$$T(x,t) = -EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \quad (30)$$

$P$ , tekil kuvvetinin statik olarak uygulandığı durumda kiriş orta açıklığındaki statik eğilme momenti ve kesme kuvveti (31) ve (32) eşitliklerinde gösterilmiştir (Fryba, 1999).

$$M_0 = \frac{PL}{4} \quad (31)$$

$$T_0 = P \quad (32)$$

Sonuç olarak hareketli tekil kuvvete maruz kirişte eğilme momenti ve kesme kuvvetini veren genel denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$M(x,t) = M_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8j^2}{\pi^2} \sin \frac{j\pi x}{L} \frac{1}{j^2[j^2(j^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} [j^2(j^2 - \alpha^2) \sin j\omega t - \frac{j\alpha[j^2(j^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(j^4 - \beta^2)^{1/2}} e^{-\omega_b t} \sin \omega_{(j)} t - 2j\alpha\beta(\cos j\omega t - e^{-\omega_b t} \cos \omega_{(j)} t)] \quad (33)$$

$$T(x,t) = T_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j^3}{\pi} \cos \frac{j\pi x}{L} \frac{1}{j^2[j^2(j^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} [j^2(j^2 - \alpha^2) \sin j\omega t - \frac{j\alpha[j^2(j^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(j^4 - \beta^2)^{1/2}} e^{-\omega_b t} \sin \omega_{(j)} t - 2j\alpha\beta(\cos j\omega t - e^{-\omega_b t} \cos \omega_{(j)} t)] \quad (34)$$

### Sönümlü Matematik Model (The Mathematical Model with Damped)

Denklem (28), sırasıyla sınır ve başlangıç koşulları olan denklem (2) ve (3)'e göre tekrar düzenlenir, hafif sönümlü durum  $\alpha \neq j$ ,  $\beta \ll 1$  ve  $x \leq x$ ,  $v.t \leq L$  için düzenlenirse hafif sönümlü durumda kirişin zamana bağlı düşey yer değiştirmelerini veren (35) ifadesi elde edilir (Fryba, 1999).

(Azeloğlu ve diğ., 2013), kren kirişlerinde Rayleigh sönüm prensibine göre hesaplanan sönüm parametresini  $\beta=0,01$  olarak elde etmişlerdir. Bu çalışmada da sönüm parametresi  $\beta=0,01$  olarak alınmıştır.

$$w(x,t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi x}{L} \frac{1}{j^2(j^2 - \alpha^2)} \left( \sin j\omega t - \frac{\alpha}{j} e^{-\omega_b t} \sin \omega_{(j)} t \right) \quad (35)$$

Bu çalışmada (35) ifadesi, kren kirişlerinde hareketli yük altındaki hafif sönümlü dinamik yer değiştirme davranışlarını veren matematik model olarak kullanılacaktır.

Bu durumda, hafif sönümlü haldeki kiriş için eğilme momenti ve kesme kuvvetini veren formülasyonlar ise aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$M(x,t) = M_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \sin \frac{j\pi x}{L} \frac{1}{j^2(j^2 - \alpha^2)} \left( \sin j\omega t - \frac{\alpha}{j} e^{-\omega_b t} \sin \omega_{(j)} t \right)$$

$$(36) T(x,t) = P_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cos \frac{j\pi x}{L} \frac{1}{j(1 - \alpha^2 / j^2)} \left( \sin j\omega t - \frac{\alpha}{j} e^{-\omega_b t} \sin \omega_{(j)} t \right)$$

(37)



## BENZETİM ÇALIŞMALARI (SIMULATION STUDIES)

Bu bölümde, önceki bölümden elde edilen hafif sönümlü durumdaki matematik modeller Matlab programı kullanılarak simüle edilmiştir. Daha sonra çeşitli çalışma senaryoları için benzetim çalışmaları yapılmıştır. Senaryolarda kiriş üzerindeki hareketli yükün hızı ( $v$ ), sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 m/s olarak alınmıştır. Bu durumda yük,  $t=0$  anında kirişin sol ucunda olup ve  $t=L/v$  anında kirişin sağ ucuna ulaşmaktadır. Kirişe ait parametreler ise Çizelge 1'de verilmiştir. Bu çalışmada,  $m$  kiriş üzerindeki hareketli yükün ağırlığı yani tekil kuvveti  $P$ 'yi ifade etmektedir.  $M$  ise kirişin özgül ağırlığını göstermektedir. Senaryolarda kütle oranı sırasıyla ( $m/M$ ), 0,2 ve 0,4 olarak belirlenmiştir. Sonuç olarak kütle oranları ve hızlara bağlı olarak toplam 12 senaryo için benzetim çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

**Çizelge 1.** Bu uygulamada kullanılan kren kirişinin malzeme özellikleri

*Table 1. The material properties of the crane beam used in this study*

Parametreler	Semboller	Değerler
Kiriş kesit alanı	A	$1,25 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Young modülü	E	$2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Kiriş uzunluğu	L	20 m
Atalet momenti	I	$2,7 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
Yer çekimi ivmesi	g	$9,81 \text{ m/s}^2$
Kirişin malzeme yoğunluğu	$\rho$	$7900 \text{ kg/m}^3$
Kirişin kütlesi	$M=\rho AL$	2000 kg
Kirişin uzunluk birimi başına kütlesi	$\mu$	100 kg/m

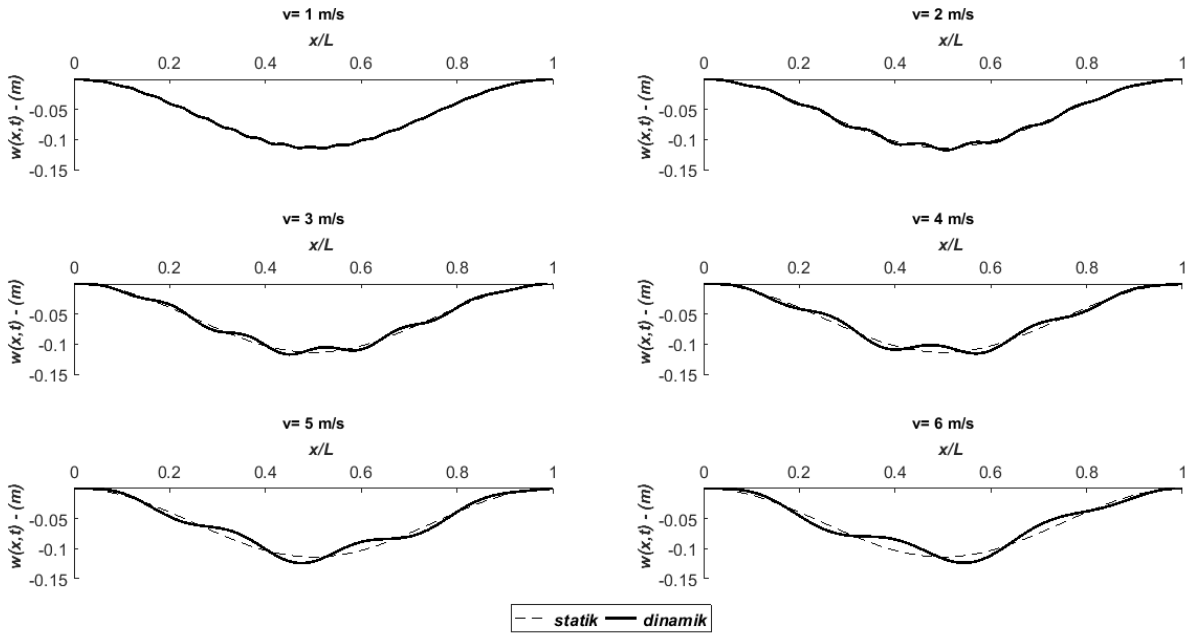
Uygulamalarda, sisteme ait hız parametrelerini ( $\alpha$ ) bulmak için kritik hız değeri ( $v_{kr}$ ) hesaplanmıştır. Bu amaçla denklem (24) ve Çizelge 1'deki değerler kullanılmıştır. Bu sistem için elde edilen kritik hız değeri 37,4 m/s olarak hesaplanır. Buna göre her bir hıza karşılık gelen hız parametresi Çizelge 2'de verilmiştir. Ardından tanımlanan senaryolar için benzetim çalışmalarına başlanmıştır. Tekil yükün hızı, kritik hız değerine yaklaştıkça kiriş üzerinde anormal salınım hareketleri meydana gelmektedir. Kritik hız değerini geçtiğinde ise kirişte rezonans oluşmaktadır. Böyle bir durumda kirişin dinamik davranışlarını saptamak için yapılan benzetim çalışmaları uygun olmayan sonuçlar verecektir.

**Çizelge 2.** Farklı hızlardaki hız parametreleri

*Table 2. Speed parameters at various speeds*

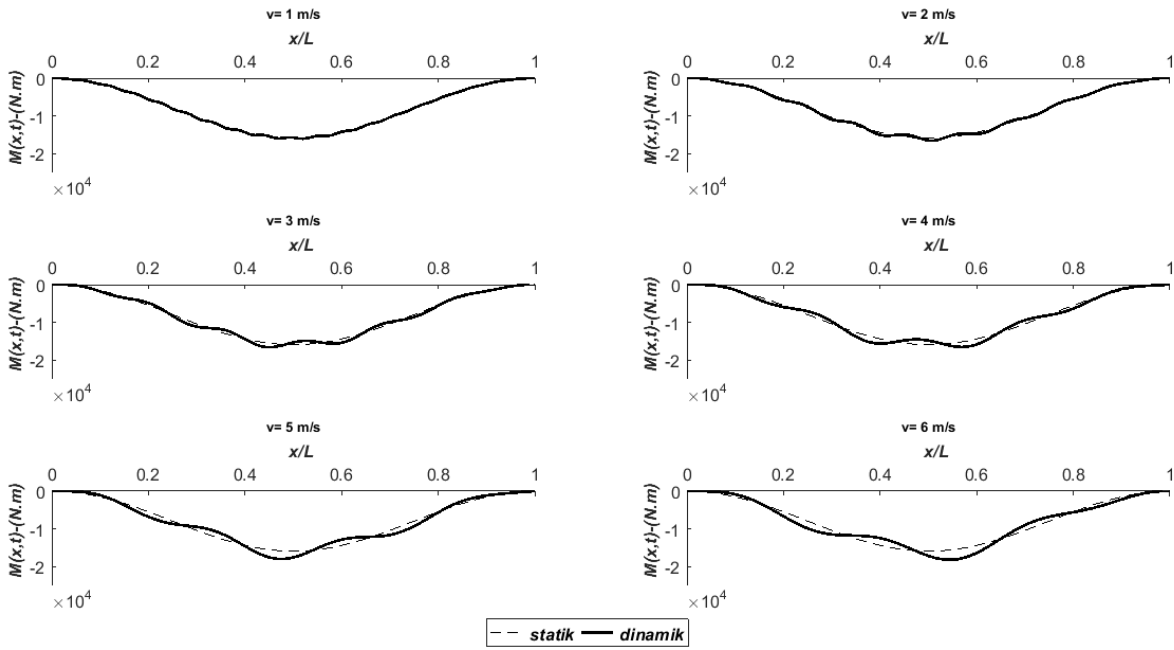
v [m/s]	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	0,0267	0,0535	0,0802	0,1069	0,1337	0,1604

İlk olarak, kütle oranı ( $m/M$ ) 0,2 ve belirlenen hızlara göre benzetim çalışmaları yapılmıştır. Sönümlü kiriş için elde edilen dinamik yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri grafikler ve çizelgeler halinde verilmiştir.



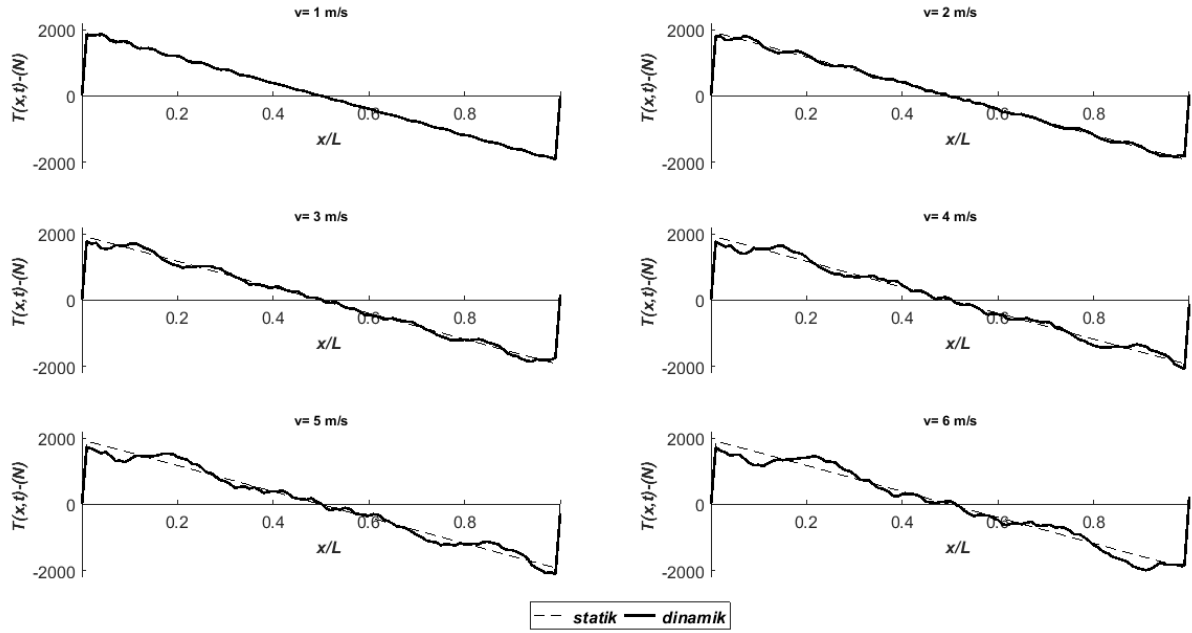
Şekil 2. Kütle oranı ( $m/M=0,2$ ) için değişik hızlardaki kirişin yer değiştirme grafiği

Figure 2. The deflection graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.2



Şekil 3. Kütle oranı ( $m/M=0,2$ ) için değişik hızlardaki kirişin eğilme momenti grafiği

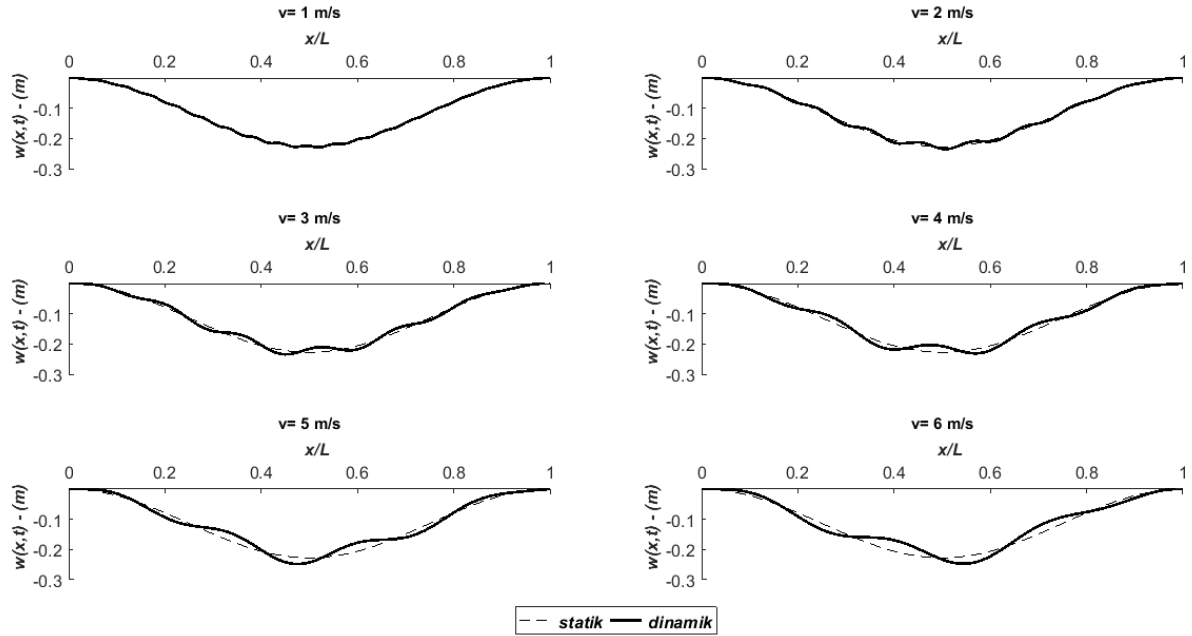
Figure 3. The bending moment graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.2



Şekil 4. Kütle oranı ( $m/M=0,2$ ) için değişik hızlardaki kirişin kesme kuvveti grafiği

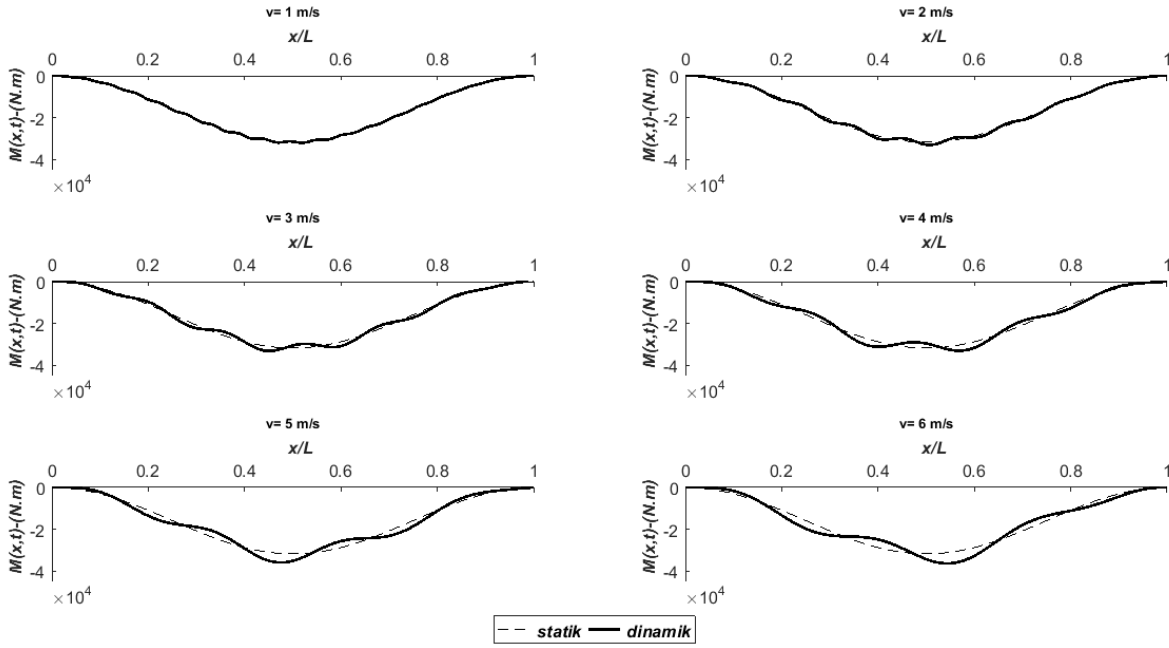
Figure 4. The shear force graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.2

İkinci olarak, kütle oranı ( $m/M$ ) 0,4 ve belirlenen hızlara göre benzetim çalışmaları yapılmıştır. Sönümlü kiriş için elde edilen dinamik yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri grafikler ve çizelgeler halinde verilmiştir.



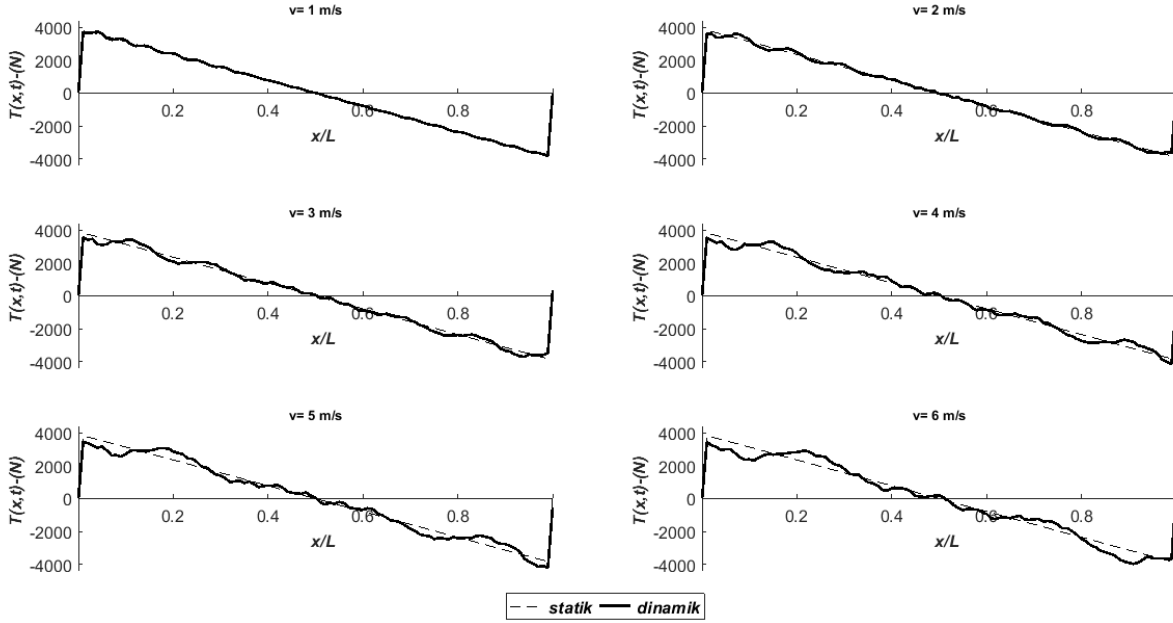
Şekil 5. Kütle oranı ( $m/M=0,4$ ) için değişik hızlardaki kirişin yer değiştirme grafiği

Figure 5. The deflection graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.4



**Şekil 6.** Kütle oranı ( $m/M=0,4$ ) için değişik hızlardaki kirişin eğilme momenti grafiği

*Figure 6.* The bending moment graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.4



**Şekil 7.** Kütle oranı ( $m/M=0,4$ ) için değişik hızlardaki kirişin kesme kuvveti grafiği

*Figure 7.* The shear force graph of the beam at various speeds for mass ratio 0.4

Grafiklerde verilen sonuçlar Çizelge 3, 4 ve 5'de görüldüğü gibi sayısal olarak verilmiştir. Çizelgelerde değerler karşılaştırma açısından sönümlü ve statik olarak sunulmuştur.

**Çizelge 3.** Kütle oranları (0,2 ve 0,4) için kirişin sönümlü ve statik maksimum yer değiştirme değerleri*Table 3. The damped and static maximum deflection values of the beam for mass ratio 0.2 and 0.4*

v, (Yükün hızı) [m/s]	Kütle Oranları, (m/M)			
	m/M= 0,2		m/M = 0,4	
	W <sub>statik</sub> (max) [m]	W <sub>sönümlü</sub> (max) [m]	W <sub>statik</sub> (max) [m]	W <sub>sönümlü</sub> (max) [m]
1	-0,114	-0,114	-0,227	-0,230
2	-0,114	-0,118	-0,227	-0,235
3	-0,114	-0,117	-0,227	-0,234
4	-0,114	-0,116	-0,227	-0,231
5	-0,114	-0,124	-0,227	-0,248
6	-0,114	-0,123	-0,227	-0,247

**Çizelge 4.** Kütle oranları (0,2 ve 0,4) için kirişin sönümlü ve statik maksimum eğilme momenti değerleri*Table 4. The damped and static maximum bending moment values of the beam for mass ratio 0.2 and 0.4*

v, (Yükün hızı) [m/s]	Kütle Oranları, (m/M)			
	m/M= 0,2		m/M = 0,4	
	M <sub>statik</sub> (max) [kNm]	M <sub>sönümlü</sub> (max) [kNm]	M <sub>statik</sub> (max) [kNm]	M <sub>sönümlü</sub> (max) [kNm]
1	-16,00	-16,10	-32,00	-32,20
2	-16,00	-16,60	-32,00	-33,12
3	-16,00	-16,61	-32,00	-33,23
4	-16,00	-16,54	-32,00	-33,10
5	-16,00	-18,00	-32,00	-36,00
6	-16,00	-18,20	-32,00	-36,40

**Çizelge 5.** Kütle oranları (0,2 ve 0,4) için kirişin sönümlü ve statik maksimum kesme kuvveti değerleri*Table 5. The damped and static maximum shear force values of the beam for mass ratio 0.2 and 0.4*

v, (Yükün hızı) [m/s]	Kütle Oranları, (m/M)			
	m/M= 0,2		m/M = 0,4	
	T <sub>statik</sub> (max) [kN]	T <sub>sönümlü</sub> (max) [kN]	T <sub>statik</sub> (max) [kN]	T <sub>sönümlü</sub> (max) [kN]
1	±1,90	-1,91	±3,81	-3,82
2	±1,90	-1,84	±3,81	-3,67
3	±1,90	-1,85	±3,81	-3,70
4	±1,90	-2,08	±3,81	-4,16
5	±1,90	-2,10	±3,81	-4,21
6	±1,90	-2,00	±3,81	-4,00

Grafikler ve çizelgeler incelendiğinde hareketli tekil kuvvetin hızı arttıkça kirişte meydana gelen salınımların arttığı, yer değiştirme ve eğilme momenti grafiklerinden de görüldüğü gibi kiriş orta noktasından sapsmalar meydana geldiği gözlenmiştir. Hız parametresi ( $\alpha$ ) değeri ile doğru orantılı olan tekil yük hızının artışı kirişteki salınım hareketlerini arttırmıştır. Bunun yanı sıra, maksimum yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerini çok az değiştirmiştir. Kütle oranlarındaki artışın kirişin salınımı üzerinde büyük bir etki yaratmadığı ve bunun sadece maksimum yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerini arttırdığı Çizelge 3, 4 ve 5 yardımıyla görülebilmektedir. Şekil 2, 3, 5 ve 6 'da kiriş üzerinde maksimum değerlerin oluştuğu yerler incelendiğinde, bu noktaların hızla bağlı olarak kirişin orta noktasından saptığı görülmektedir. Sonuçları genelleştirerek ele alırsak

çalışma hızına göre orta noktadan sağa veya sola doğru minimum %4 ila maksimum %14 oranında sapmalar gözlenmektedir. Şekil 4, 7 ve Çizelge 5'de de görüldüğü gibi kiriş üzerindeki maksimum kesme kuvveti değerlerinin olduğu yerler hızla bağlı olarak kirişin sağ uç mesnet noktasından minimum %2 ila maksimum %8 oranında sola saptığı görülmektedir. Sönümlü dinamik yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kiriş üzerindeki belirli noktalarda ve hızlarda statik değerleri aşmıştır. Sonuç olarak, kren kirişi tasarımlarında statik davranışların yanı sıra sönümlü dinamik davranışların da göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

## SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, hareketli yüke maruz kren kirişi üzerinde hareketli tekil yük bulunan basit mesnetli, homojen, izotropik bir Euler-Bernoulli tipi sönümlü kiriş olarak ele alınmış ve kirişin yer değiştirmelerini, eğilme momentlerini ve kesme kuvvetlerini veren matematiksel ifadeler elde edilmiştir. Bu çalışmada, literatürden farklı olarak kren kirişi hafif sönümlü olarak ele alınmış ve incelenmiştir. Elde edilen matematik çözümler Matlab programında oluşturulan algoritmalar yardımıyla sayısal olarak simüle edilmiş ve prototip bir kren kirişi üzerinde farklı hız ve farklı kütle oranlarına göre belirlenen senaryolar için sonuçlar elde edilmiştir. Benzetim çalışmalarından elde edilen sonuçlar incelendiğinde dinamik durumdaki yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerinin statik durumdaki değerleri aştığı görülmektedir. Bu durum özellikle yüksek hızlarda çalışan krenlerde sadece statik hesaplar göz önüne alınarak yapılacak olan tasarımın yetersiz olacağını göstermektedir. Bu alanda çalışan konstrüktörlerin kren kirişlerinin tasarımında statik hesapların yanı sıra krenin çalışma senaryolarına göre sönümlü matematik modeli kullanarak dinamik analizleri gerçekleştirmesi ve tasarımın buna göre yapılması daha uygun olacaktır. Ayrıca, bu çalışmada hafif sönümlü durumdaki kiriş için elde edilen sonuçlar, yazarların önceki çalışmalarında sönümsüz durumdaki kiriş için elde ettikleri sonuçlar ile karşılaştırdıklarında sönümsüz ve hafif sönümlü durumdaki kirişin orta noktasından yüzde sapma miktarlarının çok fazla değişmediği sadece hafif sönümlü durumda maksimum dinamik yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti miktarlarının sönümsüz duruma göre daha az olduğu görülmüştür.

## SEMBOLLER (NOMENCLATURE)

$A$	Kirişin kesit alanı
$\rho$	Kiriş malzeme yoğunluğu
$g$	Yer çekimi ivmesi
$E$	Kirişin Young Modülü
$x$	Kiriş koordinat ekseni
$z$	Kiriş koordinat ekseni
$H(x)$	Heaviside fonksiyonu
$a, b, \xi$	Sabit katsayılar
$p$	Laplace-Carson integral dönüşümünde kompleks sayı
$V(j, t)$	$w(x, t)$ fonksiyonun Fourier sinüs sonlu integral dönüşümü
$V^*(j, p)$	$V(j, t)$ fonksiyonun Laplace-Carson integral dönüşümü
$t$	Kiriş üzerindeki yükün hareket süresi
$L$	Kirişin uzunluğu
$m$	Hareketli yükün toplam ağırlığı
$M$	Kirişin ağırlığı
$f_j$	Doğal frekans
$T_j$	$j$ 'inci mod serbest titreşim periyodu
$I$	Kirişin kesitinin atalet momenti
$N$	Newton
$j$	Titreşim mod sayısı

$T$	Zaman
$m$	Metre
$s$	Saniye
$i$	Kompleks sayı
$\alpha$	Hız parametresi
$\beta$	Sönüm parametresi
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
$\mu$	Kirişin birim uzunluk başına kütlesi
$\omega$	Yük hareketini ifade eden dairesel frekans
$\omega_b$	Sönüm dairesel frekansı
$\omega_j$	$j$ 'inci mod titreşimindeki doğal dairesel frekans
$\hat{\omega}_j$	Kirişin $j$ 'inci mod sönümlü dairesel frekansı
$v$	Yükün hızı
$v_0$	Statik kuvvet ile yüklü kirişin orta açıklığındaki sehimi
$v_{kr}$	Kritik hız
$P$	Hareketli tekil yüke eşdeğer kuvvet
$w(x,t)$	$x$ noktasında ve $t$ zamanındaki kirişin dinamik düşey yer değiştirmesi
$M(x,t)$	Kirişin $x$ noktasında ve $t$ zamanındaki dinamik eğilme momenti
$T(x,t)$	Kirişin $x$ noktasında ve $t$ zamanındaki dinamik kesme kuvveti
$m/M$	Kütle oranı
$n$	Tam sayı
$M_0$	Statik eğilme momenti
$T_0$	Statik kesme kuvveti

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Azeloğlu, C.O., Sağırılı, A. ve Edinçliler, A., 2013, "Mathematical modelling of the container cranes under seismic loading and proving by shake table", *Nonlinear Dyn*, Vol. 73, pp. 143-154.
- Azeloğlu, C.O., Hasan, A.G., Özen, S., Çolak Çakır, Ö.Ü. ve Sağırılı, A., 2015, "Theoretical and experimental deformation analysis of crane beams subjected to moving load", *Sigma Journal Engineering and Natural Sciences*, Vol. 33, pp. 653-663.
- Azeloğlu, C.O., Kural, S., "Investigation dynamic behaviors of crane beams under moving load", *3rd Conference on advances in mechanical engineering (ICAME)*, Istanbul, 886-894, 19-21 December 2017.
- Di Lorenzo, S., Di Paola, M., Failla, G. ve Pirota, A., 2017, "On the moving load problem in Euler-Bernoulli uniform beams with viscoelastic supports and joints", *Acta Mech*, Vol. 228, pp. 805-821.
- Esen, İ., 2009, Hareketli yük altındaki köprülü kren kirişinin dinamik analizi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi, İstanbul.
- Esen İ., 2010, "Hareketli yük altındaki köprülü kren kirişinin dinamik analizi", *İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik Dergisi*, pp. 145-156.
- Fryba, L., 1999, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Thomas Telford Ltd., Prague.
- Foda M.D., Abduljabbar Z., 1998, "A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, pp. 295-306.
- Hasan, A.G., 2012, *Hareketli yüke maruz Euler-Bernoulli kirişinin dinamik davranışlarının incelenmesi*, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Koçar, I. ve Ştimac, I., "Dynamic analysis of loads moving over structures", *4th International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Bizovac, Croatia, 1-6, 18-20 September 2003.
- Low, K. H., 1997, "An analytical-experimental comparative study of vibration analysis for loaded beams with variable boundary conditions", *Computers and Structures*, Vol. 65, pp. 97-107.

- Mikvsinski, J. ve Sikorski, R., 1957, "The elementary theory of distributions (I)", *Rozprawy matematyczne*, Vol. 12, pp. 1-54.
- Pesterev, A.V., Yang, B., Bergman, L.A. ve Tan, C.A., 2003, "Revisiting the moving force problem", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, pp. 75-91.
- Xu, X., Xu, W. ve Genin, J., 1997, "A non-linear moving mass problem", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 204, pp. 495-504.
- Yang, B., Tan, C.A. ve Bergman, L.A., 2000, "Direct numerical procedure for solution of moving oscillator problems", *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 462-469.

#### EK AÇIKLAMALAR (APPENDIX)

#### Çizelge A1. Fourier sinüs sonlu integral dönüşümü

Table A1. The Fourier sine finite integral transformation

Orijinal	Dönüşüm
$f(x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} V(j,t) \sin \frac{j\pi x}{L}$	$F(j) = \int_0^L f(x) \frac{2}{L} \sin \frac{j\pi x}{L}$
$\frac{d^4 f(x)}{dx^4}, (f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0)$	$\frac{j^4 \pi^4}{L^4} F(j)$
$af(x)$	$aF(j)$
$\delta(x-a)$	$\sin \frac{j\pi a}{L}$



**Çizelge A2.** Laplace-Carson integral dönüşümü*Table A2. The Laplace-Carson integral transformation*

<b>Dönüşüm</b>	<b>Orijinal</b>
$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$
$a$	$a$
$\sum_j^n a_j F_j(p)$	$\sum_j^n a_j f_j(t)$
$p^n F(p) - p^n f(0_+) - p^{n-1} \frac{df(0_+)}{dt} - \dots - p \frac{d^{n-1} f(0_+)}{dt^{n-1}}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
$\frac{p}{(p^2 + c^2)[(p+a)^2 + b^2]}$	$\frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2 c^2} \left[ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} (1 - \cos ct) + \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2} (1 - e^{-at} \cos bt) - \frac{2a}{c} \sin ct + \frac{a(3b^2 - a^2 - c^2)}{b(a^2 + b^2)} e^{-at} \sin bt \right]$
$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{1}{ab(a^2 - b^2)} (a \sin bt - b \sin at)$