壁面に沿って運動している物体から壁へ放出される物質の拡散現象について

On the Diffusion of Material Emitted to a Wall from the Matter Moving along the Wall

教養·基礎教育　多羅尾範郎

【要旨】

壁に沿って物体が運動し、壁と物体の狭い間隙にシート状の流体が流れている場合、物体表面から壁へ放出される物質の拡散過程を計算し、考察した。この計算では物体が壁に対して振動している場合や、物体の表面の形状が非対称な場合も考慮されている。拡散に対する振動の影響は、流れが速くRe数が大きく、拡散物質の分子量が大きい（Sc数が大きい）程、促進されることがわかった。

キーワード：拡散現象、2次元流れ、ニュートン流体

1. はじめに

消化管内に入った水溶性の物体が溶けながら移動する場合、その物体のどのような運動が管壁への吸収に影響するのであろうか。この様な疑問に一つの解答を与える為に、本論文では『物体が壁に沿って運動する状態において、物体から放出される物質が壁に吸収される際の拡散現象』について考察した。

この様な計算をする場合、物体の表面全てからの拡散を計算する必要は無く、壁に面した物体表面からの拡散だけを考えればよい事が次のようにして示される。すなわち、拡散は濃度勾配が急な場合に促進され、したがって、物体と壁の向き合う面で濃度が異なっていても距離が離れている所では拡散量は少なく、距離が近いと濃度勾配が急な為、拡散が著しい。故に、物体から拡散した物質が壁まで到達するのは、物体と壁が近い場合が殆どである。

例えば、腸内を移動する食物の固形塊から腸の壁面へ栄養が吸収される場合も、腸壁の襞等の部分以外では、大雑把に見れば2枚の壁間の拡散現象と見ても良いだろう。また、赤血球が血管壁に沿って動いている時に最も効率良くガス交換がなされるが、それは殆どが血管壁に接触している赤血球膜を通して行われる。この様な人体に関する事ばかりではなく、薬品等を湿した布などで物に塗布する場合にも、このモデルで考察した事は参考になると思われる。この様な拡散を考える上で、物体と壁の間隙が非常に狭ければ、2枚の壁の擦り運動中と考えても拡散量等に大きな違いはないと考えて良いだろう。

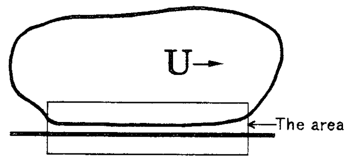

Fig.1 Geometry of the Model

このような理由から、**Fig.1**下部の四角で囲んだ部分のみに着目し、2面間の拡散過程を計算すれば、物体から壁への拡散量の殆どが計算されるものと思われる。ここで、Uは壁に対する物体の移動速度である。

2. モデルと計算方法

計算を簡単化するため、**Fig.2**の様に物体と共に移動する座標系（x', y'）をとり、x'を壁に平行y'を壁に垂直、y'軸を物体の出っ張りに合せた。すると、下の壁は『（壁に対する物体の速度）Uと逆向きの速度－U』で動いている事となる。具体的な物体の形や表面の運動は、下記境界条件で与えられる様に下面に垂直に振動している事とする。（下記境界条件の式で$\delta=0$の場合振動はしていない）

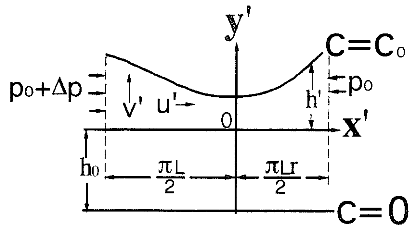

Fig.2 Definition of Variables

3. 流れの境界条件

流体中の任意の場所における座標系に対する速度を(u', v')とすると、Fig.2に示した流れの中で流体の速度の境界条件は以下の式で与えられる。（粒子は上流側から圧力差 ΔPで流されてUで動き、左右の非対称性をGで取り入れ、左の長さ：右の長さ＝r：1で、左右対称な場合RR＝0でG＝1となる。）

$y' = h' = h_0 - A\cos(x'/G')\,[1+\delta\sin(\omega' t')]$　で　$u'=0$、$v' = -A\omega'\cos(x'/G')\,\delta\cos(\omega' t')$

$y' = -h_0$　で　$u' = -U$、$v' = 0$　$[G' = h_0 G,\ x' = h_0 x,\ \ell = \pi L/2]$

ただし、$G = 1+RR\ (x \geqq 0)$, $G = 1-RR\ (x<0)$ ……$RR = \dfrac{1-r}{1+r}$.

物体の速度Uと間隙の幅の基準 h_0を用いて、座標軸と境界条件等を次の様に無次元化する。

$x'/\ell = x$, $y'/h_0 = y$, $A/h_0 = a$, $u'/U = u$、$v'/(\alpha U) = v$、$\omega' t' = t$、

$\ell\omega'/U = \omega$、$Uh_0/\nu = Re$, $h_0/\ell = \alpha$.

境界条件 $y = 1 - a\cos(x/G)\,[1+\delta\sin(t)]$ で$u=0$, $v = a\,\omega\cos(x/G)\,\delta\cos(t)$,

$y=-1$　で　$u=-1$、$v=0$.

4. 流れの場の方程式

2次元のナビア・ストークスの方程式と連続の方程式を上記無次元量を使い整理すると

場の方程式

$$\alpha R_e\left[\omega\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\alpha^3 R_e\left[\omega\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \alpha^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ただし、$\alpha = 2h_0/(\pi L)$

5. 拡散物質濃度の境界条件

上記流速の流体中の任意の場所における濃度は下記の境界条件で無次元化する。

B.C.（Concentration Field）

$y = 1 + a\cos(x/G)\,[1+\delta\sin(t)]$ で$C=1$, $y=-1$で$C=0$.

6. 拡散物質の濃度場の方程式

流れのある流体場における濃度の変化は拡散の方程式をラグランジュ的取り扱いをし、

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + u'\frac{\partial C'}{\partial x'} + v'\frac{\partial C'}{\partial y'} = D_m\left(\frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y'^2}\right)$$

となり、これを無次元化して

$$\alpha Re Sc\left(\omega\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$$

〔ただし $= Sc = \nu/(\boldsymbol{Dm})$〕

となる。

7. 摂動展開と計算結果

全ての物理量を $\alpha = h_0/\ell$（$\ell = \pi L/2$は物体の接触面長さの約半分）で展開。例えば、
$u=u_0+\alpha u_1+\alpha^2 u_2+\cdots$, $v=v_0+\alpha v_1+\alpha^2 v_2+\cdots$, $P=P_0+\alpha P_1+\alpha^2 P_2+\cdots$,
$C=C_0+\alpha C_1+\alpha^2 C_2+\cdots$, 等 を上記式に代入整理し、計算する。まず、流速を求めるのに、流れの場の方程式、境界条件に u, vを代入し、αの次数ごとに整理し、$u_0, u_1, u_2\cdots, v_0, v_1, v_2\cdots$を求める。次に、それらを濃度場の方程式、境界条件に代入し、C_0, C_1, C_2, と求めていくと、(r＝1とし)

$$D_{ef} \cong 1+0.32+0.125a^2+\alpha^2\,[F(Sc,Re,a)]+0.000119\,\alpha^2 a^2 \delta^2 Re^2 Sc^2 \omega^2 + \text{高次の微小量}.$$

となる。実際の計算では、（株）フォーブズシステム社製の数式処理ソフトREDUCE3.6を使用した。
今、$\alpha \cong 0.3$、$a \cong 0.3$、$\delta \cong 0.3$、$Re \cong 10$、$\omega \cong 10$とすると、$Sc \gtrsim 20$で第５項は0.4以上となり、十分影響がある。

8. 考察

A. Einsteinの理論によれば、半径λの球が粘性係数ηの流体中を拡散する場合、拡散係数D_mは、

$$D_m = \frac{k_B T}{6\pi\eta\lambda}$$

であたえられる[1]。　従って、常温で$k_B T \cong 4\times10^{-13}\,gcm^2/s^2$,　水の粘性　$\eta \cong 10^{-2}\,g/(cm\,s)$

とすると、分子量数百以上の高分子で、 数が数十程度以上であれば、数サイクル以上の振動では、十分拡散の効果があり、振動数の２乗に比例して攪拌が促進される。

ここで、誤解のない様、説明を要する。拡散現象そのものは、大きな粒子では拡散し難くなるが、拡散し難いながら、振動の効果で、粒子が大きい場合は振動がない場合より拡散が促進されると言う事である。また、このような振動に基づく攪拌は、壁や物体の表面の湾曲や凸凹により、飛躍的に促進される事が、第5項がa^2に比例する事から確認された。しかしながら、微小循環中の赤血球膜と血管壁の様な、 数が0.003以下[2]の場合は、この効果があるのは、分子量が数千以上の拡散物質のみである。これに該当するものとしては、細菌や分子量の大きい酵素等が考えられる。逆に 数の大きい場合、壁の表面に液体を擦り付けている場合等では、ほんの少しの振動でも、道具に付いた塵等が撹拌されることがわかる。

本論文で計算されているのは、一方の壁（図では下）が固定された場合であって、２枚とも振動し、したがって全体が振動している場合は、全く違った機構が働く。この振動液体中に懸濁している微粒子の運動では、多羅尾ら[3]によると、$\omega \gg (9/2)\,\eta/(\rho_P \lambda^2)$の場合には、粒子が媒質とは独立して動くため、攪拌される事により拡散する。

次に、本計算の適応範囲について言及すると、以下の場合の様な適応外の条件が考えられる
① 流れや壁の表面への摩擦等で物体表面の崩壊や一部の脱落が有る場合。（腸の中の食物等）
② 流れの非定常性が支配的な場合。（渦などの発生や物体表面の境界条件が満たせない場合）
③ 物体と壁が離れている場合。（$\alpha = h_0/\ell$で展開している為と左右での境界条件が満たせない為）
本計算はこの様な場合を除き、どの様な事が撹拌に影響するかを見る目安として役立つものと考えられる。

9. 結語

壁に沿って運動する物体表面から壁への拡散過程が計算され、壁や物体の表面が曲がっていたり凸凹している場合、振動が激しい場合、飛躍的に促進され、振動の影響は流れが速い数が大きく分子量が数百以上の大きい 数の場合、特に促進されることがわかった。

10. 文献

(1) 小林謙二「熱統計物理学Ⅰ」『物理学ライブラリー5』P112（朝倉書店）1983.
(2) 岡小天「バイオレオロジー」『物理科学選書7』P35（裳華房）1984.
(3) 多羅尾範郎、落合清子、原田千代子：振動液体中に懸濁液している微粒子の運動
聖隷学園浜松衛生短期大学紀要22号、P15～P21、1999.

11. 謝辞

本論文の原稿を読み、細かく間違いや不適切な表現を指摘して下さった聖隷クリストファー大学 看護学部の安孫子誠也教授に謹んで謝意を表したい。