国際政経論集（二松學舍大学）第 16 号，2010 年 3 月

（論文）

(S, s) 在庫動学とマクロ経済変動の複雑性

八　木　直　人

1　はじめに

景気循環のメカニズムを探ることは経済学の誕生とともに古い問題である。一見周期的なように見えて完全に規則的というわけでもなく、また時間とともに発散するわけでもないこの変動のメカニズムを、ときの経済学者たちは、それぞれの手法で解き明かそうと試みてきた。そしてその試みは、今日においても経済学の中心的課題である。

かつての景気循環に対する考え方は、Business Cycle という言葉が表すように、さまざまな要因によって作り出されるサイクルがいくつも重なり合って生じているというものであった[1]。しかしいまではそのような考え方はとられていない。近年の景気循環理論のコンセンサスは、景気循環を経済システムに加わる衝撃 shock, impluse と伝播 propagation のメカニズムとして理解しようとするものである[2]。とくに 1980 年代以降、多くの研究がこの問いに動機付けられ、さまざまな理論にこの研究プログラムを適用することで経済メカニズムの解明を計っている。

だが現在の研究の多くは、その分析と結論を代表的主体の仮定や線形性の仮定に依存している。1990 年代の後半からこれらの仮定をゆるめる研究が進んでいるものの、成果はまだ一部の分野に限られている。とくにマクロ経済のような大自由度系においては、主体の異質性やミクロレベルの非線形性、あるいは主体間の相互作用がもたらす伝播のメカニズムこそが、マクロレベルの挙動を規定する最も重要な要因である。

近年、複雑系 complex system というキーワードの下でもたらされた認識は、この研究プログラムに大きな影響を与えるものである。複雑系の下では、外生的な衝撃は非常に複雑な伝播のプロセスを生み出し、またシステムの内部構造自体がシステム全体の変動の要因を生み出すことによって、代表的主体や線形性の仮定基づいたマクロ経済モデルとは大きく異なったマクロ経済変動の特性を示すことになる。

本論文では、ミクロレベルでの在庫調整メカニズムとマクロレベルにおけるの経済変動の間に生じる複雑系としての特性が、景気循環においてどのような重要性を持つかを検討する。

2　在庫政策のミクロ理論

"business cycle are, to a surprisingly large degree, inventory cycle." Blinder (1990, p.viii)
"(Inventories) seem to amplify, rather than mute movement in production." Ramey and West (1999, p.874)

在庫の変動と1～3年程度の周期の短期的な景気循環の間に、密接な関係があることは古くから知られてきた。GDPの構成要素としての在庫投資は、GDPの1%未満と極めて小さなシェアしかもっていないにもかかわらず、その変化率に目を転じると在庫投資がGDPの変化率の30%以上を占めている[3]。Blinder and Maccini (1991) は、とくに景気後退期における在庫変動の重要性を強調し「在庫投資の落ち込みはGDPの落ち込みの87%を説明する」と報告している。

本節では、このような在庫調整と景気循環の関係を考察する出発点として、ミクロレベルにおける在庫調整の理論を検討する。

2.1　費用関数の凸性と生産平準化モデル

企業は、生産における規模の経済が存在しない場合、在庫を保有する動機を持たない。したがって企業レベル（ミクロレベル）における在庫調整の理論は、生産に関する規模の経済、すなわち費用関数の凸性を出発点としている。この点に着目したのが、生産平準化モデルProduction Smoothing Modelである。

凸関数とは、

$$\forall x, y,\ f(ax + (1-a)y) < af(x) + (1-a)f(y),\ 0 < a < 1 \tag{1}$$

となる関数のことである。あるいは、fが微分可能であるとき

$$f(x+a) - f(x) - af'(x) \geq 0, \quad \forall a > 0, \quad \forall x \tag{2}$$

と満たすことである。たとえば図1のような費用関数を想定しよう。

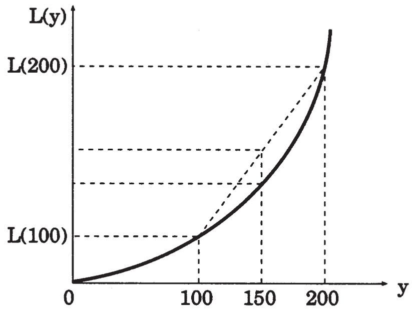

図1：凸関数と生産平準化

外生的な需要が100と200の間で変動する場合を考えると、費用関数の定義から

$$L\left(\frac{100+200}{2}\right) < \frac{L(100)+L(200)}{2}$$

が成り立つから、各販売量に応じて生産をおこなうよりも、生産量を平準化して定常的な生産をおこなった方がコストを低く抑えることができる。販売量は毎期変動するのに対して、企業は生産の平準化をおこない余剰生産分を在庫として保有することとなり、生産の緩衝在庫としての在庫保有が生じる。このような性質から、二つの実証的な予測が成り立つ。一つは、販売量の分散は生産量の分散より大きいだろうということであり、もう一つは、在庫投資と産出量は反対方向 countercyclical に変動するだろうというものである。

費用関数の凸性に基づく生産平準化は、その理論的な明快さと数学的な取り扱いやすさから多くの研究を生み、データとの整合性が期待されたが、残念ながら多くの実証研究の結果はこの予測と整合的なものではなかった。戦後のアメリカのデータを用いて分析した Fitzgerald（1998）によれば、実質 GDP の変動の標準偏差が 1.81 であったのに対し、最終販売の変動の標準偏差は 1.44 であった。このことは平準化理論の含意と矛盾するものである。また、在庫投資と産出量の相関係数は 0.57 であり、在庫は同方向 の変動 procyclical であることを示唆している[4]。

2.2 (S, s) モデルと在庫調整過程

生産平準化のモデルは、製造業における製品在庫のような変動の少ない在庫を説明するのが自然であるが、それらは在庫投資の 15% 以下に過ぎず、その他の大部分を占める原材料や棚卸在庫ははるかに変動が激しいことがわかっている。これらの在庫に対して、在庫が生産されるタイミングではなく発注が生じるタイミングに焦点を当て、状態依存型ルール（state-dependent rule）の定型行動にもとづいて分析をおこなうのが（S, s）在庫政策モデルである[5]。

いま企業が在庫保有の下限 s を設定しており、在庫がこの下限に達するかそれを下回った場合には一定のロット $Q=S-s$ だけ生産を行い在庫をロット分だけ回復させ、それ以外のときは既存在庫の取り崩しで発注に答えるというルールを設定しているとしよう。このような企業の定型的在庫調整ルールを（S, s）在庫政策という。在庫水準を x_t、当該期の外生需要を y_t とすると、この調整ルールは次のように記述できる。

$$x_{t+1} = x_t - y_t + m_t Q$$
$$m_t = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x_t - y_t \in (s, S] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

（S, s）ルールにもとづくときの在庫および生産量の変動は、生産平準化の場合と対照的な振る舞いを示す。いちばんわかりやすい例として、$(S, s) = (3, 0)$ のケースにおいて需要量＝販売量が毎期 1 単位で時間を通じて一定の場合を見てみると、次の図 2 のようになる。生産平準化では販売量の変動よりも生産量の変動の方が小さくなったが、（S, s）ルールによる在庫調整では、販売量が一定であるにもかかわらず、飛び飛びの時点でまとめて 3 の生産が行われることになる。このように、（S, s）ルールによる在庫調整の過程は不連続性 discontinuity と一塊性 lumpiness として特徴付けられる。

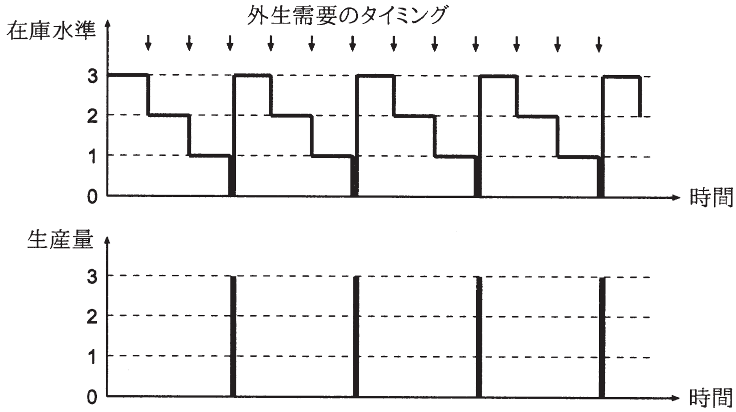

図２：（S, s）在庫政策のもとでの在庫変動および生産量の変動

2.3　非凸性と（S, s）ルールの最適性

（S, s）ルールのような定型的調整ルールの存在はよく知られていたものであったが、それが実際に在庫調整として最適なルールとなっているかという問題があった。この最適性の問題は Arrow, Harris and Marshak（1951）によって最初に分析され、Scarf（1959）によって証明された。Scarf は、凸性の概念を拡張した K-凸性（K-convexity）という概念を導入し、企業の再帰的な費用関数が K-凸であることと（S, s）ルールが最適となることが同値であることを証明している。ここで微分可能性を仮定する場合の K-凸性の定義は、以下のようなものである。

［定義 1］ $K \geq 0$ かつ $f(x)$ が微分可能であるとき、区間内のすべての x に対して

$$K + f(x+a) - f(x) - af'(x) \geq 0, \quad \forall a > 0 \tag{5}$$

を満たす関数 f を K-凸（K-convex）であるという。

$K=0$ のときは凸性（0-凸）の定義と等しくなる。また K-凸であれば $K' \geq K$ をみたすすべての K' に対して K'-凸である。凸性（$K=0$）の定義は、$f(x+a)$ を x で線形近似したとき、すべての $a>0$ で過小近似になるという意味にであるが、K-凸性の定義は凸性に K だけのゆとりを持たせた線形近似であると考えればよい。微分可能性を仮定しない場合には次の定義が用いられる[6]。

［定義 2］ $K \geq 0$ のとき、区間内のすべての x に対して

$$\frac{K + f(x+a) - f(x)}{a} \geq \frac{f(x) - f(x-b)}{b}, \quad \forall a, b > 0 \tag{6}$$

を満たす関数 f を K-凸（K-convex）であるという。

K-凸性をみたす関数の例は図 3 のような関数である。生産平準化における凸の費用関数と比較したとき、費用関数が K-凸になるのは生産を行うそのたびごとに、それぞれ固定費用 K がかかるようなケースである。

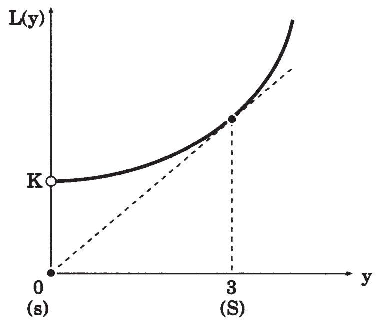

図3：(S, s）モデルと K- 凸関数

このような例として配達費用 delivery costs や発送費用 shipment cost のようなものが考えられる。例えばコンビニエンス・ストアの各店舗に陳列する商品を配達するには毎回トラック輸送の費用がかかるような場合である。この場合、トラックを運用しなければ運用費用はゼロであるが、トラックを運用した場合満載の荷物を運んでも弁当を一つだけ運んでも同じだけのトラックの運用費用がかかる。このような固定費用があると、凸の費用関数を原点を除いて上に K だけ平行移動したものになり、費用関数が K- 凸な関数となる[7]。図3のケースでは、企業は平均費用を最小にするように行動し、(S, 0）の2点で平均費用が最小となる。在庫ストックが切れた場合にだけS単位の生産を行い、あとは生産をおこなわない（S, s）ルールが最適な在庫調整ルールとなる。

3　(S, s）ルールの集計化とマクロ経済変動

> "If firms have a technology that makes S, s rule optimal, aggregation across firms is inherently difficult. Indeed it is precisely this difficulty which has prevented the S, s model from being used in empirical work to date." Blinder（1981, p.495）

3.1　非凸性、非同質性と非線型性

K- 凸な関数は非凸な関数 nonconvex function である。Scarf の（S, s）ルールに関する議論の要点は、非凸な経済環境を持つ経済主体の調整過程は、不連続的 discontinuous で一塊 lumpy に行われるということである。費用関数の非凸性 nonconvexity という非線型性が、(S, s）モデルにおけるこのようなふるまいのもととなっているのである。

近年、ミクロレベルの環境の非凸性と、そこから生じる調整過程の不連続性 discontinuity、一塊性 lumpiness が景気循環の要因として重要であるという認識が広まっている。にもかかわらず、これまで非凸環境のマクロ集計的特性の研究はあまり行われてこなかった。それは Blinder が述べるような「集計化 aggregation」の困難が理論・実証の両面から妨げになっていたからである。1990年代後半以降、ミクロレベルの離散性、一塊性を検証する実証研究が盛んにおこなわれるようになったが、それらも非凸環境のマクロ集計化の問題を十分解決しているとは言い難い。

非凸環境において、仮に同質性を仮定した場合には、非凸環境が生み出す特徴である調整の不連続性、一塊性が個々の主体ごとに異なっている場合に、マクロ的な意味でどのような

含意をもたらすのかが明確にならなず、マクロ理論としての魅力を大きく失ってしまうだろう。したがって非凸環境の集計化とは非同質性をもった大自由度系の集計化問題となる[8]。しかし非凸環境ではそれぞれの要素が不連続性と一塊性といった非線型性をもっているため、このような非線型要素の相互作用をもった大自由度系のふるまいは自明ではない。

3.2 Caplin（1985）モデル

上述の問題について非同質性についてのみ考慮し、最初に（S, s）モデルのマクロ集計的な含意を考察したのがCaplin（1985）である。Caplinは、それぞれが異なった（S^i, s^i）ルールに従うn個の非同質な企業からなる経済を「(S, s）経済」と呼び、その動学的な性質について分析している。

Caplinによる（S, s）経済の構造をわかりやすくするために、Caplinが用いている簡単な例を見てみよう。いま経済が二つの企業からなり、ともに（S^i, s^i）= (3, 0), i=1, 2とする。在庫配列（x^1, x^2）が動く空間の個数は3×3=9個である。単純化のため各期に生じる外生需要は常に1で、企業1に外生需要がある確率をp、企業2に外生需要がある確率を$1-p$とする[9]。毎期1単位の需要がどちらかの企業に生じるから、どちらかの企業の在庫が1単位減少し、それにつれて在庫配列（x^1, x^2）は遷移図上を左もしくは下に移動する。どちらかの企業が在庫の下限に達したときには3単位の生産を行い在庫水準を回復し、右もしくは上に移動する。在庫配列の動く状態空間と遷移図は図4のようになる。

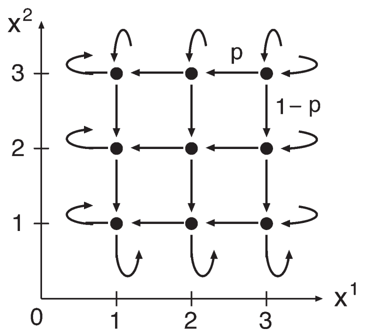

図4：Caplinモデルの状態空間の遷移図

このような過程による在庫配列（x^1, x^2）の遷移は、9個の要素をもつ状態空間上を外生需要によって確率的に遷移するマルコフ過程として記述できる。状態空間の各要素はそれぞれ対称であるからエルゴード性が成り立ち、在庫配列は各状態の上をまんべんなく移動し、在庫配列が各状態の上にいる確率は長期的には1/9に収束する。

この例はそのまま一般化することができる。非同質な企業がn個存在し、それぞれ異なる（S^i, s^i）にしたがう場合には、各企業の在庫は必ず$Q^i=S^i-s^i$の中に入っているから、各企業が在庫配列が動きうる在庫配列の個数は、$\prod_{i=1}^{n} Q^i$となる。これがマルコフ連鎖の状態空間の要素の個数となる。状態空間はエルゴード的であり、在庫配列の分布は確率測度

$$\pi(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} Q^i},\ \forall x$$

の一様な定常分布に収束する。

Caplinモデルは、販売量の変動よりも生産量の変動のほうが大きいとする実証データと整

合的である。また、Caplin モデルは（S, s）モデルであるから、生産は在庫水準の回復であり、生産量と在庫変動は同方向に動く（在庫投資は procyclical である)。このように（S, s）モデルにもとづく Caplin モデルは実証データと整合的なモデルであるといえる。

しかし Caplin のモデルは、1 次元の（S, s）ルールに従うミクロの要素をいわば「足し算」することで、n 次元超立方体 Hypercube 上のランダムウォークとしてのマクロの状態に拡張したものにすぎない。企業間の相互作用を捨象し、個々の企業が独立にふるまい他の企業に影響を与えないと仮定しており、ミクロレベルでの離散性や一塊性といった特性はそれぞれ独立に生成し、マクロなふるまいはミクロの統計的な「足し算」となっている[10]。つまり、ミクロレベルに生じる衝撃がマクロレベルに伝播し、その効果を増幅 amplify しながら永続的 persistent な効果をもつというような経路は一切存在しない。それどころか、それぞれ独立に生じるミクロレベルの衝撃から生じる調整の不連続性や一塊性といった特徴は、大自由度の系の中では、中心極限定理によって統計的平均のかなたへ消え去ってしまうのである。その意味では（S, s）ルールの「マクロ的特性」を十分に明らかにしたモデルとは言い難い。

3.3 BCSW モデル

"Thus neither local interaction nor non-convexty poses in itself a serious objection to conventional result. We will show, however, that those two factors *in conjunction with one another* can yield very different results." Bak et al (1993) p.10

前節でみた Caplin モデルの問題点を解消するためには、集計化のもう一つの困難である相互作用の問題を取り扱わなければならない。すなわち（S, s）経済に企業間の産業連関構造を導入することである。この観点から Caplin（1985）の拡張モデルとみなせるのが Bak, Chen, Scheinkman and Woodford（1993）によるモデル（以下 BCSW モデル）である[11]。

BCSW モデルでは、企業が図 3 に示されるような非凸な費用関数をもち在庫政策が（S, s）ルールに従うときに、2 次元格子上の特殊な産業連関モデルについての（S, s）経済のマクロ的特性を分析している。

BCSW モデルの設定は以下の通りである。経済には多数の企業が存在し、同一の費用関数をもち（S, s) = (2, 0）というルールに従っているとする。この点については同質性を仮定している。ただし企業は最終財企業と中間財企業に分かれており、それぞれの生産に際しては中間投入を必要とし、特定の 2 つの中間財企業からそれぞれ 1 単位ずつ財を購入する。この特定企業との投入産出の結びつきが各企業の非同質性となっている。これらの企業は図 5 に表されるように空間的に並んでおり、最終財企業は空間の一番上に 1 列で並んでいるとする。2 列目には、それぞれの最終財企業と関係する中間財企業が一列に並んでいる。3 列目には、2 列目の中間財企業と関係を持つ別の中間財企業が一列に並んでいる。このようにして中間財企業が何列も下に向かって並んでいるとする。このような特殊な 2 次元格子上に配置された企業間の投入産出がミクロレベルの相互作用を形成する。

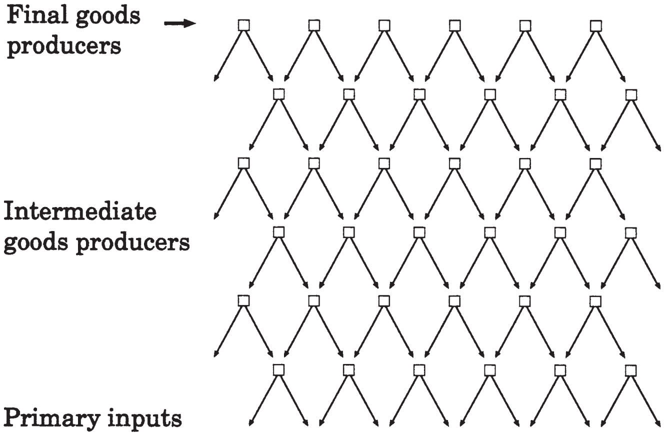

図 5：BCSW モデルにおける産業連関構造

経済システムに対する外生的な衝撃は、最終財需要として空間の一番上の最終財企業にのみ生じる。外生需要を受けた企業の在庫が 2 単位ある場合には、需要に対して在庫の取り崩しで応じるため生産をおこなわれず、衝撃の伝播は生じずに経済はそこで安定化する。しかし初期在庫が 1 単位であった場合には、外生需要によって在庫が 0 になり、2 単位の生産を行うので、すぐ下の二つの企業に 1 単位ずつ派生需要が生じる。2 列目の企業は、1 列目の企業からの派生需要によって在庫が 0 となった場合には生産を行い 3 列目の企業に派生需要を生じる。3 列目の企業も同様にして、派生需要が収束するまでこの連鎖は続いていく（図 6）。

このようにして、相互作用のある（S, s）経済には Keynes の乗数過程に類する派生需要の連鎖としての、衝撃に対する伝播のメカニズムを内包することになる。多くの企業が在庫に余裕を持っているときには、この伝播のプロセスは既存在庫の取り崩しによって早くに収束するが、逆に多くの企業の在庫の状態が在庫保有の下限に近い状態にある場合には、派生需要が次々に企業の在庫をストックアウトさせ伝播は非常に長い連鎖を生む。

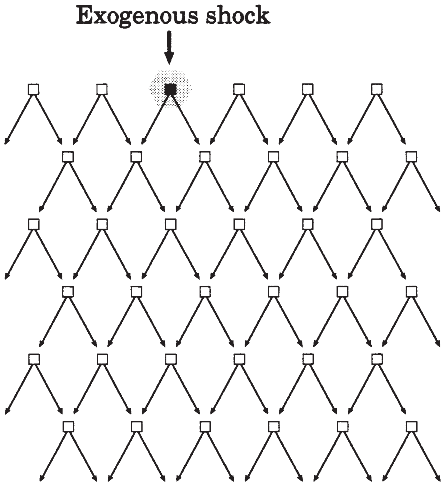

図 6-1：派生需要が生じないケース

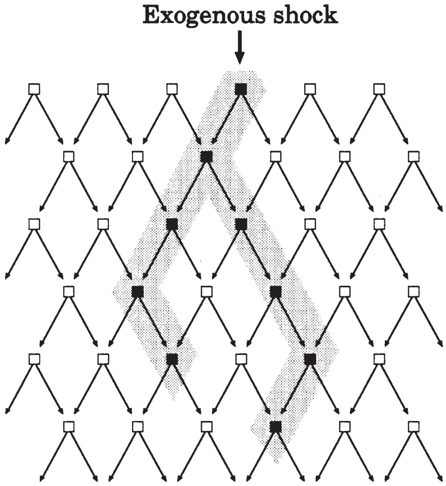

図 6-2：大規模な派生需要が生じるケース

いま j 番目の最終財企業に 1 単位の外生的な需要が生じたとしよう。このときこの外生需要による衝撃からの伝播のプロセスで生産される財の総量を $Y_j = \sum_{i,j} y_{i,j}$ とする。またこの伝播プロセスが届いた中間投入の列の数を T_j とする。Dhar and Ramaswamy（1989）は、この 2 次元パーコレーションを特殊ケースとして含む d 次元のモデルを考察し、このシステムにおいて Y_j と T_j の値の理論的な厳密解を求めている。2 次元の場合には、Y_j が値 y より大きくなる確率と T_j が値 t より大きくなる確率は、十分大きな y と t に対して、それぞれ

$$\Pr(Y_j > y) \sim y^{-\frac{1}{3}}, \quad \Pr(T_j > t) \sim t^{-\frac{1}{2}}$$

にしたがう。Bak et al.（1993）は、Dhar and Ramaswamy の理論にもとづいてシミュレーションを行い、BCSW モデルにおいてじっさいに Y_j が図 7 に示されるような対数線型な分布にしたがっていることを示した。

Caplin モデルでは、すべての企業に同時に需要が生じるケースでも、生産量は高々 $\sum_i Q^i$ でしかなかった。しかし産業連関による相互作用を含む BCSW モデルでは、ミクロレベルの非凸性＝非線型性がもたらす調整の一塊性 Lumpiness とそれをつなぐ企業間の局所的な相互作用が、1 単位という小さな衝撃を非常に大きな伝播に増幅 amplify する可能性があることを示している。

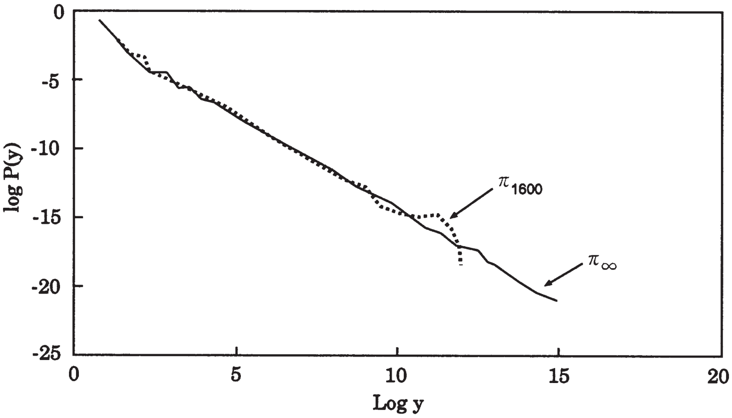

図 7：BCSW モデルにおける生産および中間投入の変動

3.4　八木（2008）モデル

BCSW モデルは、ミクロレベルにおける（S, s）ルールがマクロレベルの変動に与える影響を示した点で大変興味深いモデルであるが、そのモデルの構造は 2 次元格子上に企業が配置されているというきわめて特殊なものであった。また、それぞれの企業は最終財を生産する企業と中間財を生産する企業とに分けられており、時間発展の要素も含まれていなかった。

八木（2008）および八木（2009）では、BCSW モデルの問題点をふまえて、BCSW モデルと Caplin の「(S, s）経済」モデルをともに含むような一般化された「(S, s）経済」モデルを構築し、n 個の企業が一般的な投入産出構造のもとで時間的に相互作用するモデルについて理論およびシミュレーションの両面から分析を行っている。いま、企業 i が生産を行うロットサイズを $Q^{ii} = S^i - s^i$、企業 i が生産を行う際に投入する企業 j の生産物を $-Q^{ij}$, $i \neq j$ とすると、この一般化された「(S, s）経済」モデルは、投入産出行列 Q によって特徴付けられる。

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{21} & Q^{31} & \cdots & Q^{n1} \\ Q^{12} & Q^{22} & Q^{32} & \cdots & Q^{n2} \\ Q^{13} & Q^{23} & Q^{33} & \cdots & Q^{n3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ Q^{1n} & Q^{2n} & Q^{3n} & \cdots & Q^{nn} \end{pmatrix}$$

（S, s）経済モデルの投入産出行列

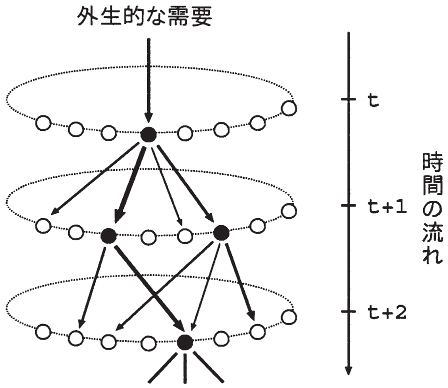

図 8：（S, s）経済モデルの模式図

この経済において、各企業は任意の複数の企業と投入産出の関係を持ち、それぞれの投入産出の数量もまた任意であるとする。互いの企業が時間を通じて投入産出の相互作用をしながら、在庫の調整と生産によるマクロ経済変動を生み出していく。モデルの模式図は図 8 のような形となる。

八木（2008）では、企業 i の生産物が企業 $i-1$ と企業 $i-2$ の投入物となり、また企業 i が生産を行うには企業 $i+1$ と企業 $i+2$ の生産物を投入として必要とするケースについてシミュレーションを行った。図 9 は、生産量および総付加価値について、そのサイズと出現頻度を両側対数グラフにプロットした結果である。

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$$

シミュレーションにおける投入産出行列

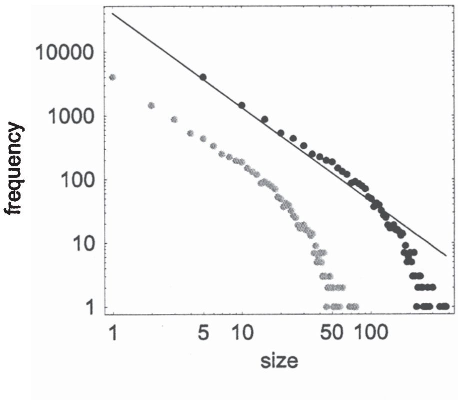

図 9：サイズと頻度

（●：生産量、●：総付加価値）

3.5　べき乗則とスケール不変性

BCSW モデルおよび八木（2008）モデルの集計量の変動はともに両側対数グラフ上の直線に近似される。ある確率変数 s の分布が、s とは無関係の定数を A として、べき乗関数 $P(s) = As^{a}$（もしくは対数変形された $\log P(s) = \log A + a \log s$）で近似されることをべき乗則 Power law に従うという。このような関数形では、s のスケールを $1/\lambda$ 倍に拡大すると $P(s) = A(\lambda s)$

となり、この比をとると s に依存しない定数となる。

$$\frac{P(\lambda s)}{P(s)} = \frac{A(\lambda s)^a}{As^a} = \lambda^a$$

したがって、スケール変換を施した二つの関数 $P(s)$ と $P(\lambda s)$ の間に

$$P(s) \propto P(\lambda s)$$

という関係が成り立つ。このことは、べき乗則を満たす関数では固有のスケールをもたず、スケールの縮小拡大によって $P(s)$ の特性は変化しないということを意味している。この性質をスケール不変性という[12]。スケール不変性を持つ系とは、系の部分を取り出しても全体と同じ構造をしていることであり、構造を拡大縮小してもまた同じ構造が見出せることである。したがって、スケール不変性を持つ確率変量では、小さな規模で生じることは、どのような規模でも正の確率で生じることになるのである。このような事態が生じることを臨界現象という。

3.6　自己組織臨界性とマクロ経済の安定性

BCSW モデルおよび八木（2008）モデルでは、マクロ経済の変動が臨界現象で近似されるような大規模な変動を起こすことを見た。ではこの系の挙動を特徴付けている特性はどのようなものであろうか。

この系において重要なポイントは3つある。第一に、ミクロレベルの企業は（S, s）ルールという局所的な遷移ルールによって振舞っているということ、第二に、企業というミクロレベルの要素同士は投入産出関係によって近傍において相互作用をしており、それによって在庫のストックアウトという過剰な「エネルギー」がシステム間を伝達されて行くということ、第三に在庫のストックアウトの過剰な「エネルギー」が最終的にはシステムの外部へ放出される開放系であるということ、である。

このミクロ的な在庫の変動の過程で、どのようにマクロ的な臨界現象が生じているかを見てみよう。まず各企業の在庫保有量が平均的に高い水準にあったとすると、外生需要による派生需要の連鎖は平均的に高い在庫水準からの在庫の取り崩しに吸収されてしまい、短いステップで収束してしまうだろう。よってマクロ集計量の変動も小さい。このようにシステムに過剰なエネルギーを吸収する余裕のある状態を亜臨界 subcritical な状態という。マクロ経済の在庫状態が亜臨界にある場合は、大規模な派生需要による生産は生じにくく在庫水準を大幅に回復する変動は起きにくいが、外生需要が重ねて生じるうちに平均的な在庫保有の水準も減少して徐々に安定性は崩されていき、臨界状態に近づいていく。

反対に、マクロ経済の在庫保有水準がほとんどの企業で在庫の下限ギリギリであり、かついくつかの企業で在庫の下限を下回っているとしよう。このときは派生需要の連鎖が在庫の取り崩しで吸収できず、大規模な派生需要の連鎖が生じる。このように臨界を超えて不安定な状態を過臨界 supercritical な状態という。しかしこの状態も大規模な派生需要の連鎖によって平均的な在庫保有の水準を回復させていき、臨界状態へ近づいていく。

このようにしてシステムは、亜臨界と過臨界からの復元力によって安定でも不安定でもない領域、すなわち臨界状態に自発的に進化（自己組織化）する。そして在庫保有の状態が臨

界にある場合は、わずかな外生需要の揺動でいかなる規模の派生需要も生じることとなる。各要素としての企業はあくまで自己の（S, s）ルールにもとづく局所的なルールによって遷移する自律分散的なシステムである。しかし局所的な相互作用が近傍の企業同士の投入産出の関係を通じてシステムのすみずみまで影響しあうことによって、全体を制御する主体は不在にもかかわらず、相互作用がシステム全体の安定性を保つ協調 cooperation, coordination を実現している。この協調を可能にしているのが、ベキ乗則に表される臨界状態なのである。

臨界状態に自発的に進化する（自己組織化する）性質を、Bak, Tang and Weisenfeld（1987）は自己組織臨界性 self-organized ctiricality, SOC と名づけた。ミクロレベルで（S, s）ルールによる調整過程をもつマクロ経済的変動は、この自己組織臨界性という性質を持っている。このような概念を導入することで、経済システムにおける安定性の概念を見直すことができる。狭義のマクロ経済の安定性とは、揺動から生じた派生需要が有限時間で収束するという意味であった。この狭義の安定性の概念から見れば、本節で見たマクロ集計量の変動は、極めて不安定な変動ととらえられる。しかしマクロ的な変動が特性として自己組織臨界性をもつとすれば、狭義の安定性とは別の、臨界への自己組織化という広義の安定性概念を内包しているといえる。いっけん不安定に見える集計量の変動は、自己組織臨界性という広義の安定性を、より下位の現象から見た姿に過ぎないということもできるのである。

自己組織臨界性は、ミクロ的な過程の分析からでは見出せない、マクロレベルに固有の創発特性 emergent property である。それは不安定と安定のギリギリのはざまで、あらゆる規模の変動、あらゆる規模の伝播が生じる可能性を絶えず内包しながらゆらいでいる状態である。そこには需要と供給が一致するという意味での「均衡」と呼べるような特徴的な点は存在しない。このような視点に立つとき、マクロ経済学は不均衡動学 dis-equilibrium dynamics ならぬ非均衡動学 non-equilibrium dynamics であるということができるだろう。

4　おわりに

本論文では、在庫投資と景気循環の関係に焦点を当てつつ、非凸性、非同質性、相互作用といった概念がマクロ的な非線型を生じ、どのように衝撃と伝播のプロセスを構成するかを見てきた。そして最後に自己組織臨界性の概念が重要な示唆を与えてくれることを確認した。

近年では経済学の分野でも複雑系の研究成果を取り入れた分析が増えている。とくに企業規模の分析や価格変動に関する研究では、理論・実証の両面から多くの成果が報告されている。しかし本論文で示したような在庫調整と景気循環に関する問題意識の下でマクロ経済の変動をとらえた研究は、本文中に取り上げたBak et al.（1993）以降ほとんど存在しない。DSGE モデルの中に（S, s）調整過程を内蔵し非凸性のマクロ経済的な含意を検討したものや、ミクロ的な（S, s）調整の状態を計量モデルを用いて検証したものなど重要な成果を上げている研究は存在するものの、本論文で示した問題意識とは大きく異なる視点に立っている。

八木（2009）では、本論文で見た八木（2008）のモデルをより一般化し、群論などの代数的な手法を用いることで数理的な構造の分析を行っている。そこでは外生需要によって生じた派生需要の収束性の十分条件や、自己組織臨界性のもとでの安定な状態の集合についての代数的、集合論的証明、および在庫の確率分布が一様分布に収束することの証明など、さまざまな定性的命題の証明を与えている。今後は、DSGE モデルやサーチモデル等の標準モデ

ルとの接続や、実証分析などによって既存研究との融合が進められるべきであろう。

注

1. Kaldor（1940）や Goodwin（1951）によって行われ、近年ふたたび盛んになってきている非線型景気循環理論（内生的景気循環理論）は、この路線に属する研究プログラムである。Goodwin（1951）はマクロ変数間に非線型な関数を設定しリミットサイクルとして景気循環を説明している。また Grandmont（1983）や西村ら（1985）は、代表的消費者の異時点間最適化から得られる誘導系が生じるカオスとして説明している。いずれにしろこれらの研究の要点は、経済が非線型な関数 f による小自由度のシステム $X_{t+1}=f(X_t)$ に要約できるとすることである。
2. 非線型理論との対比で言えば、これらの理論は経済を確率項 e_t を含んだ確率システム $X_{t+1}=g(X_t,\ e_t)$ に要約し、e_t による衝撃と g による波及効果を追跡することである。近年主流をなしているリアル・ビジネス・サイクル理論はこのカテゴリーに入る。そこでは多くの場合 g を線型な写像とみなし、e_t の分布ラグによる波及を分析することになる。
3. 戦後日本の景気循環においては、不況期は好況期の 2 倍の長さを持っている。
4. このような理論と実証データとの不整合性は、生産平準化の理論のさまざまな改良版を登場させ、理論上はこの不整合性を解消するさまざまなモデルが提唱されている。
5. 状態依存型ルールとは、企業に固有の状態変数 x があり、各期の状態変数に依存して各期の政策変数 y を決める写像 $y_t=f(x_t)$ のことである。したがって過去や将来の変数と現在の行動決定が切り離されたマルコフ的な行動様式であるといってよい。
6. この定義に対応する凸性の定義は、区間内のすべての x に対して
$$\frac{f(x+a)-f(x)}{a} \geq \frac{f(x)-f(x-b)}{b}, \quad \forall a, b > 0$$
を満たすことである。この凸性の定義は、f のエピグラフ $eip(f)=\{(x,\ y)|\ y \geq f(x_t)\}$ が凸集合であることと同値である。
7. Scarf（1959）では、生産費用のほかに保有費用、品切れ費用も含めた多期間にわたる異時点間の期待費用に対して K- 凸性が成り立つことを分析している。この場合には生産の固定費用 K が正であれば、限界費用は一定であってもよい。
8. 近年のほとんどの研究がこの問題を回避し、代表的個人を仮定して分析を行っている。Caballero and Engel（1991）この問題を確率分布に加わるショックとその収束として捕らえることで解決しようとしている。
9. Caplin（1985）では、両企業ともに 1 単位ずつの外生需要が生じるような、需要に相関がある場合も考え、$P(1,\ 0)+P(0,\ 1)+P(1,\ 1)=1$ として分析しているが、ここでは（1, 1）の場合は排除した。もちろんこの単純化はここでの論理に影響しない。
10. これはかつて「蚊柱理論」として考えられた統計的なマクロ理論である。このような特徴は、進化ゲームなどのマルコフ連鎖を用いた確率的な安定性を議論するモデルにも共有されている。
11. Bak et al（1993）には Caplin（1985）と（S, s）在庫理論に対する直接の言及はないが、費用関数の非凸性に対して言及している。
12. 関数 $P(s)$ がスケール不変であるとは、“どのような s に対しても”任意の λ について $BP(\mathrm{s})=P(\lambda s)$ となることである。ここで B を λ^a の関数として一般性を失わずに $B=\lambda^a$ とおけば $\lambda^a P(s)=P(\lambda s)$ と書ける。この性質を満たすものを a 次同次関数という。ここで両辺を λ で微分し、λ は任意であるので $\lambda=1$ とおくと、同次関数の Euler の定理 $aP(s)=\frac{dP}{ds}s$ が得られる。この微分方程式を解くと $P(s)=As^a$ を得る。

参考文献

［1］Arrow, K., Harris, T. and Marschak, J., “Optimal inventory policy”, *Econometrica*, 19, 1951.
［2］Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld, K., “Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f noise”, *Phys. Rev. Lett*, 59, 1987.
［3］Bak, P., K Chan., Scheinkman, J. and Woodford, M., “Aggregate fluctuations from independent

sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics", *Ricerche economiche*, 47, 1993.
[4] Blinder, A S., "Retail inventory behavior and business fluctuations", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1981.
[5] Blinder, A S., *Inventory Theory and Consumer Behavior*, University of Michigan Press, 1990.
[6] Blinder, A S. and Maccini, L J., "Taking Stock: A Critical Assessment of Recent Research on Inventories", *Journal of Economic Perspectives*, 5, 1991.
[7] Caballero, R. and Engel, E., "Dynamic (S,s) Economies", *Econometrica*, 59, 1991.
[8] Caplin, A., "The Variability of Aggregate Demand with S,s Inventory Policies", *Econometrica*, 1985.
[9] Dhar, D. and Ramaswamy, R., "Exactly solved model of self-organized critical phenomena", *Phys. Rev. Lett*, 63, 1989.
[10] Fitzgerald, T J., "Inventories and the business cycle: an overview", *Economic Review, Federal Reserve Bank of Cleveland*, 1997.
[11] Grandmont, J M., "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econometrica*, 1985.
[12] Goodwin, R M., The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles", *Econometrica*, 1951.
[13] Kaldor, N., "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal*, 50, 1940.
[14] Keynes, J. M. *The General Theory of Enployment, Interest and Money*, Macmillan, 1936 (塩野谷祐一訳『ケインズ全集第七巻　雇用・利子および貨幣の一般理論』東洋経済新報社 1983).
[15] Meztler, L A., "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economics and Statistics*, 3, 1941.
[16] Ramey, VA. and KD West., "Inventories", *Handbook of Macroeconomics*, Vol1B, 1999.
[17] Scarf, H., "The optimality of (s, S) policies in dynamic inventory method", *Mathematical Method in the Social Science*,1959.
[18] 西村. 増山. 吉田, "経済変動：均衡景気循環理論",『応用ミクロ経済学』, 1989.
[19] 八木直人, "数量調整過程における自己組織臨界性",『桜美林エコノミックス』, 第55号 2008.
[20] 八木直人, "(S, s) 経済分析における代数学的アプローチ",『国際政経論集』, 第15号 2009.