ISSN 2312-119Х. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ. Том 21. 2017

УДК 519.254

О. Г. Байбуз, О. С. Хамхотько, Л. В. Мащенко, М. О. Бегарь

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

АПРОКСИМАЦІЯ ЗГОРТКИ РОЗПОДІЛІВ ВЕЙБУЛЛА ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙН-ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ РОЗПОДІЛІВ

Запропоновано обчислювальну технологію апроксимації згортки розподілів Вейбулла за допомогою сплайн-експоненційних розподілів. Проведено порівняльний аналіз результатів апроксимаційних методів з результатами побудови аналітичної функції розподілу згортки.

Ключові слова: *апроксимація; обчислювальна технологія; згортка; розподіл Вейбулла.*

Предложена вычислительная технология аппроксимации свёртки распределений Вейбулла с помощью сплайн-экспоненциальных распределений. Проведён сравнительный анализ результатов методов аппроксимации с результатами построения аналитической функции распределения свёртки.

Ключевые слова: *аппроксимация; вычислительная технология; свёртка; распределение Вейбулла.*

Calculable technology of spline-exponential approximation to Weibull renewal has proposed. The comparative analysis of results of methods of approximation is conducted with the results of construction of analytical renewal function for the Weibull distribution.

Keywords: *approximation; calculable technology; Weibull distribution.*

Вступ. Для розвитку прогресивних інформаційних систем, технологій моделювання структур та методів моніторінгу є актуальною розробка нових обчислювальних процедур обробки даних. Задачі, пов'язані з оцінкою ефективності технічних систем та процесів накопичення порушень у системах екологічного моніторінгу належать до задач теорії відновлення, основною метою якої є знаходження згортки випадкових величин.

Розв'язок задачі побудови згортки знайдено для ряду розподілів: експоненційного, нормального, рівномірного. Застосування більш адекватних та достовірних розподілів, таких як Вейбулла та інших, не дозволяє знаходити розподіл згортки в кінцевому вигляді. Оскільки точного розв'язку цієї задачі досі не отримано, актуальною є побудова різноманітних варіантів апроксимацій.

Найвідомішим аналітичним наближенням є запропоноване в [1] знаходження згортки розподілів Вейбулла у вигляді ряду. Цей метод є громіздким і не може бути використаним у багатьох видах практичних задач, тому найчастіше будуються апроксимації розподілу Вейбулла, засновані на експоненційному розподілі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найвідомішими дослідженнями проблеми знаходження згортки розподілів Вейбулла є роботи вчених: Барлоу / Прошан (1965, 1975), Бакстер / Шойер / Блишке / МакКоналог (1981, 1982), Феллер (1966, том. II), Гнеденко / Беляев / Соловйов (1968), Росс (1970), Смітт (1958).

Існуючі дослідження в галузі апроксимацій згортки розподілів Вейбулла можна розділити на дві категорії: чисельні та аналітичні наближення.

Аналітичні наближення мають такі види*:*

- побудова згорток за допомогою степеневих рядів t^c, яку представив Уайт (1964а) [2];
- перехід до нескінченного ряду відповідних пуассонівських функцій t^c, введених Ломіскі (1966).

Дослідження в області чисельних методів приймають один з таких двох підходів:

- розробка алгоритмів для явного обчислення згорток, що лежать в основі розподілу;
- обчислення функції відновлення, звертаючись до перетворення Лапласа – Стільтьєса.

В роботі запропоновано технологію побудови згортки розподілів Вейбулла шляхом апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом [3], методами середнього та середньоквадратичного наближення функції інтенсивності, та проведенно порівняння з апроксимацією сумішшю експоненційних розподілів [4].

Постановка задачі. Провести апроксимацію згортки розподілів Вейбулла для n=2 шляхом апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом. Зробити висновки про точність апроксимаційних моделей для різних параметрів форми β ($\alpha = 1$).

Основний матеріал. ***Згортка розподілів.*** В теорії надійності простим (звичайним) процесом відновлення називається послідовність невід'ємних взаємно незалежних випадкових величин x_n, що мають одну й ту саму функцію розподілу $F(t)$. Якщо функція розподілу випадкової першої величини x_1 має розподіл, відмінний від $F(t)$, то маємо загальний (реверсований) процес відновлення. Випадкові величини x_n – напрацювання елемента від n-1-ї до n-ї відмови [5].

Важливу роль у теорії та прикладках теорії надійності має функція відновлення H (t) – математичне очікування числа відмов за час від 0 до t

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t), \tag{1}$$

де $F^{(n)}(t)$ – n-кратна згортка функцій розподілів $F_1, F_2, ..., F_n$.

$$F^{(1)}(t) = F_1(t), F^{(2)}(t) = (F_1 * F_2)(t) = \int_0^t F_1(t-x)dF_2(x),... \tag{2}$$

$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t)$$

Явний вигляд функції згортки розподілів є лише для деяких функцій розподілу [5]. Наприклад, для експоненційного, Ерланга, рівномірного. Нормальний розподіл, Вейбулла – Гнеденко, Гамма-розподіл потребують побудови різноманітних апроксимацій.

Апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом. Пропонується технологія обчислення згортки розподілів Вейбулла на базі на апроксимації функції інтенсивності розподілу Вейбулла кусково-сталими функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом з наступною функцією щільності:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, 0 < t \le t_1 \\ \lambda_2 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t_1 - \lambda_2 t}, t_1 < t < \infty \end{cases} \tag{3}$$

Задача аппроксимації неперервної функції інтенсивності переходів у середньому представляє собою задачу найкращого наближення розподілу функції λ(x) з вагою p(x) ступінчастою функцією $c(x)$. На заданному розбитті $a=x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le x_{n+1} = b$ $c(x) = c_i(x) = c_i$, при $x_{i-1} \le x < x_{i-1}$.

Міра близькості $f(x)$ і $c(x)$ на $(a$,b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(|\lambda - c|\right) = \int_a^b p(x)\left|\lambda(x) - c(x)\right| dx \tag{4}$$

Задача наближення складається в найкращому виборі вузлів x_1, x_2, …x_n,, які знаходять у результаті вирішення задачі мінімізації:

$$\min_{a \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le b} \delta_a^b\left(|\lambda - c|\right), \tag{5}$$

при цьому функція $c_i(x)$ залежить від x_{i-1} та x_i Якщо x_{i-1} і x_i фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x)\in R_i} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}(|\lambda - c|). \tag{6}$$

Параметри сплайн-експоненційного розподілу визначаються формулами:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{b}{A};\ \lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta} = A^{1-\beta}\lambda; \\ \lambda_1 &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta}\left(2^{\beta}-1\right) = \left(2^{\beta}-1\right)A^{1-\beta}\lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

$$b = '[-\alpha \ln \lambda]^{1/\beta},$$

де $\lambda(t) = \dfrac{\beta}{\alpha} t^{\beta-1}$ – функція інтенсивності двопараметричного розподілу Вейбулла.

Задача наближення у средньоквадратичному формулюється таким чином. Нехай на деякому інтервалі (a,b) з ваговою функцією $p(x)$ визначена функція $\lambda(x)$, яка апроксимується ступінчастою функцією $c(x)$, $a=x_0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots x_n\leq x_{n+1}= b$, $c(x)= c_i(x)=c_i$, при $x_{i-1}\leq x<x_i$.

Міра близькості $\lambda(x)$ і $c(x)$ на (a,b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(\left[\lambda - c\right]^2\right) = \int_a^b p(x)\left[\lambda(x) - c(x)\right]^2 dx \tag{8}$$

Задача наближення визначається в найкращому виборі вузлів x_1, x_2, $\ldots x_n$, які знаходяться з рішення задачі мінімізації

$$\min_{a\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq b} \delta_a^b\left(\left[\lambda - c\right]^2\right), \tag{9}$$

при цьому функція $c_i(x)$ залежить від x_{i-1}.та x_i. Якщо x_{i-1}.та x_i фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x)\in R} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}\left([\lambda - c]^2\right). \tag{10}$$

Нехай:

$$2\lambda(y) + \frac{\ln(1-F(y))}{y} - \frac{\dfrac{\ln(1-F(y))}{\ln(1-F(z))}}{z-y} = 0 \tag{11}$$

представимо у вигляді $y = r_2^0(z)$, тоді вузол склеювання кусочно-постійної функції t_1 визначається як

$$t_1 = r_2^0(b), \tag{12}$$

а значення λ_1, λ_2

$$\lambda_1 = c_1 = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_1} \lambda(t)dt = \frac{1}{r_2^0(b)}\int_0^{r_2^0(b)} \lambda(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{r_2^0(b)}\ln\left(1 - F\left(r_2^0(b)\right)\right), \quad \textit{при} \quad t \le t_1$$

$$\lambda_1 = c_1 = \frac{1}{t_1}\int_{t_1}^{b} \lambda(t)dt = \frac{1}{b - r_2^0(b)}\int_{r_2^0(b)}^{b} \lambda(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{b - r_2^0(b)}\ln\frac{1 - F\left(r_2^0(b)\right)}{1 - F(b)}, \qquad \textit{при} \quad t > t_1$$

Функція розподілу та щільності згортки 2-х сплайн-експоненційних розподілів з однаковими параметрами:

$$G_2(t) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda t)\exp(-\lambda t) & 0 < t \le t_1 \\ 1 - (1 + \lambda t_1)\exp(-\lambda t) + & t_1 < t < 2t_1 \\ + \dfrac{1}{\lambda - \mu}\exp(-\lambda(t + t_1) - \mu t)\times & \\ \times(-2\lambda\exp(\lambda t + \mu t_1) + & \\ +(\lambda - \mu)(1 + \lambda t_1)\exp((\lambda + \mu)t) + & \\ +(\mu + \lambda^2(t - 2t_1) + \lambda(1 - \mu t + 2\mu t_1))\times & \\ \times\exp(\mu t + \lambda t_1)) & \\ \dfrac{-2\lambda t_1 - \mu t}{\lambda - \mu}\times & 2t_1 < t < \infty \\ \times(-2\lambda\exp((\lambda + \mu)t_1) + & \\ +(\lambda - \mu)\exp(2\lambda t_1 + \mu t) + & \\ +(\lambda + \mu + \mu(-\lambda + \mu)t + & \\ +2\lambda\mu t_1 - 2\mu^2 t_1)\exp(2\mu t_1)) & \end{cases} \tag{13}$$

$$g_2(t)=\begin{cases} \lambda^2 t\exp(-\lambda t) & 0<t\le t_1 \\ \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\exp(-(\lambda-\mu)t_1-\mu t)+ & t_1<t<2t_1 \\ +\left(\lambda^2(2t_1-t)-\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)\exp(-\lambda t) & \\ \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\exp(-(\lambda-\mu)t_1-\mu t)+ & 2t_1<t<\infty \\ +\left(\mu^2(t-2t_1)-\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)\times & \\ \times\exp(-2(\lambda-\mu)t_1-\mu t) & \end{cases} \quad (14)$$

Обидва методи апроксимації згортки розподілів Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом дають адекватні результати.

З табл. 1 видно, що метод апроксимації згортки згорткою сплайн-розподілів, на відміну від апроксимації згорткою сумішей [4], доцільно використовувати не тільки для розподілів Вейбулла з параметрами форми β ≤ 1, але й для розподілів з β >1.

Таблиця 1 – Похибки апроксимації

β	Похибка апроксимації, % (метод середньоквадратичного наближення)	Похибка апроксимації, % (метод наближення середнім)
0,4	2,7	2,9
0,5	3,2	3,6
0,6	5,7	5,3
0,7	3,9	3,6
0,8	4,4	4,1
1,8	7,5	8
1,9	24	24
2	12	12
2,1	32	32

Висновки. Розглянуто технологію знаходження апроксимації згортки розподілів Вейбулла за допомогою сплайн-експоненційного розподілу. Така апроксимація є універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β.

Бібліографічні посилання

1. Smith L., Leadbetter M. R. On the renewal function for the Weibull distribution. Technometrics 5 (3), 1963. P. 393–396.

2. White Johns. Weibull reneval analysis. 3rd Annual Aerospace Reliable and Maintainatil Conf. Washington D. C. New York, 1964.

3. Байбуз О. Г., Приставка А. Ф. Сплайны в надежности. Днепропетровск, 2003. 256 с.

4. Швацька Ю. І., Байбуз О. Г. Оцінка згортки за допомогою сумішей та сплайн-експоненційних розподілів. // Науковий журнал «Математичне моделювання». 2012. Т. 26. С. 7–11.

5. Байхельт Ф., Франкен П. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход. Москва: Радио и связь, 1988. 392 с.

Надійшла до редколегії 22.06.2017