

Recibido: 17 Agosto / Aceptación: 8 Noviembre

# Artículo

**PAIDEIA**  
Surcolombiana 20  
ENERO - DICIEMBRE DE 2015

## Caracterización del pensamiento matemático Characterization of mathematical thinking

Pamela Reyes-Santander

Centro de Investigación Avanzada en Educación CIAE  
Universidad de Chile, CHILE  
pamela.reyes@uv.cl

### Resumen

Esta investigación es experimental de análisis cualitativo y tiene su origen en la pregunta planteada por Wittenberg (1963): ¿Qué es el pensamiento matemático? Tiene como objetivo principal caracterizar el pensamiento matemático, por medio de una retroalimentación de las observaciones empíricas, realizadas con estudiantes de básica, segundo grado y universitarios de la región de Baviera, Alemania. En este proceso se implementaron encuestas, para una muestra de estudiantes de la Universidad de Augsburg, las cuales fueron analizadas con el programa CHIC y en los otros casos, se trabajó con formas libres de expresión como lo son los diarios matemáticos y los ensayos, los cuales fueron analizados de manera cualitativa utilizando la hermenéutica social. Como resultado se obtuvo una caracterización del pensamiento matemático, la cual considera cinco dimensiones, donde cuatro de ellas son: la dimensión de la percepción, de las estrategias y de los procedimientos, del pensamiento relacionado con los contenidos y de las capacidades no racionales. Una quinta dimensión está dada por los estilos de pensamiento y por los medios de comunicación, que incluye las representaciones, las nociones básicas y las metáforas conceptuales.

**Palabras clave:** Pensamiento matemático, percepción, capacidades, medios de comunicación.

### Abstract

This research is experimental, and qualitative analysis has its origin in the question posed by Wittenberg (1963): What is the mathematical thinking? Its main objective is to characterize mathematical thinking through feedback of empirical observation carried out with elementary students, second graders and undergraduate students from the region of Baviera, Germany. In this process surveys were implemented for a sample of students from the University of Augsburg, which were analyzed with the CHIC program and in other cases, worked with free forms of expression such as mathematical journals and essays, these were analyzed qualitatively using social hermeneutics. As a result a characterization of mathematical thinking was obtained, which considers five dimensions, four of them are: the dimension of perception, strategies and procedures, related to the content and not rational thinking capabilities. A fifth dimension is given by the thinking styles and media, including representations, basic notions and conceptual metaphors.

**Keywords:** mathematical thinking, perception, skills, media.

## Introducción

Para potenciar el desarrollo de la educación, es necesario tener en cuenta, que uno de los objetivos de los educadores, es fomentar el pensar de los educandos. Aprendizaje y pensamiento están, por medio de esta intención, estrechamente relacionados. El aprendizaje de un determinado concepto, involucra un proceso que está relacionado con el pensamiento de los individuos sobre este concepto y de las experiencias que ellos tengan en este proceso.

Si se considera que un estudiante está en el proceso de aprender matemática y que se transita de un pensamiento matemático, entonces es de interés responder a las preguntas: ¿Cuáles son estos pensamientos matemáticos por los cuales transita el alumno? ¿Se pueden caracterizar o diferenciar de alguna forma general? ¿Cuál es el pensamiento matemático que se desarrolló, luego de un determinado proceso de aprendizaje? ¿De qué forma expresan los alumnos sus pensamientos e ideas? Son algunas de las preguntas que surgieron al inicio de este trabajo. La pregunta que hace una diferencia, con respecto a la forma de mirar todo el contexto de preguntas anteriores, es la planteada por Wittenberg (1963, pág. 53): ¿Qué es en realidad matemática y el pensamiento matemático? Así, este trabajo tiene como objetivo responder a esta pregunta<sup>1</sup> y a través de una investigación experimental de análisis cualitativo (Bortz y Döring, 2006), se pretendió identificar conceptos y variables que complementaron la caracterización del pensamiento matemático.

En la caracterización del pensamiento matemático (PM), que aquí se presenta, juegan un rol fundamental los recursos cognitivos y las actividades que realiza el sujeto en el medio, esto es, "el pensamiento matemático se basa en el contexto de las actividades mentales y en actividades culturales" (Tall, 1991). Esto quiere decir que la caracterización del PM, debe considerar al medio y las herramientas personales que los individuos tienen para comunicar sus conocimientos en el medio.

## Nociones básicas para el pensamiento matemático

La concepción de matemática utilizada en este trabajo, fue formulada en base a diferentes investigadores

por mencionar algunos Biehler, Scholz, Sträßer y Winkelmann (1994), Davis y Hersh (1981), Freudenthal (1979) y Schoenfeld (1994), en resumen, se puede decir que: matemática es un dominio conceptual, es la ciencia de los patrones, es la ciencia de la cantidad y del espacio, liderada por el orden y una estructura. Matemática se ocupa de la simbología, en relación a la cantidad y al espacio, por medio de un constructo lógico-formal. Por sobretodo, matemática es una construcción del hombre, una elaboración cultural que valora los entes ideales y donde los conceptos abstractos son su objeto de estudio, utiliza metodologías hipotético - deductivas y un lenguaje universal para designar las representaciones (internas y externas) y organizarlas como sistema axiomático, con todo esto, la matemática es parte de toda actividad humana.

Otra noción a considerar es la del pensamiento humano, se entiende que el proceso de pensar (Asanger y Wenninger, 1999; Brusting-Müller, 1997; Funke, 2006; Margulies, 2000; Anderson, 1981), es considerado esencialmente como un compromiso interno, activo, que se hace a través de imágenes internas, utilizando términos lingüísticos internos, representaciones pictóricas y otros contenidos mentales. Pensar en este contexto, tiene el fin de obtener nuevos conocimientos y esto se obtiene solo en las actividades que no están orientadas a las rutinas automatizadas. Al momento de pensar, se utilizan símbolos, imágenes y movimientos, estos son utilizados y relacionados unos con otros al momento de pensar, de manera consciente y/o inconsciente. Además, estos símbolos pueden tener reglas predeterminadas, o bien, estas reglas pueden ser creaciones propias de el/los individuo/s. De esta forma se crea un mundo abstracto de pensar (Damerow, 1996) y una realidad personal. El ser humano piensa a través de conceptos, que son representaciones universales y abstractas de los objetos. Estos símbolos, imágenes y conceptos representan un hecho, un objeto, una acción, que son utilizados y relacionados al momento de pensar.

## Pensamiento matemático

El pensamiento matemático (PM), es un producto final de variados procesos neuropsicológicos, estos procesos provienen y se desarrollan en diferentes áreas y requieren de diferentes habilidades del individuo. El PM es un producto de la integración de distintas modalidades sensoriales y cognitivas (Reyes-Santander, 2012).

**Tabla 1: Sistemas autónomos en el aprendizaje (Reyes-Santander, 2012, pág. 83)**

Matemática Conocimiento Conceptos como relaciones Lenguaje Universal, Símbolos Sistema epistemológico	Profesores Clases de Matemática Situaciones - Problemas Comunicación y cultura de la clase Sistema social	Alumnos - estudiantes Aprendizaje y comprensión de la matemática Interpretaciones individuales y subjetivas Sistemas de diálogos y conciencia social Procesos cognitivos
---	---	--

1. Was ist eigentlich Mathematik und mathematisches Denken? Pregunta expresada en forma textual por Wittenberg, a raíz de la inclusión de las "nuevas" definiciones formales en el currículo escolar (Wittenberg, 1963, pág. 53).

Cada una de las tres áreas que se ven en la tabla 1, representa un sistema autónomo y autorreferencial, las relaciones que se dan entre las tres no están en secuencia causal, no ocurre la secuencia que desde la matemática a los profesores y de los profesores a las cabezas de los estudiantes, entre estos sistemas existen interdependencias o acoplamientos (Varela, 1997), que son solo efectos indirectos y con repercusiones sobre el PM. Así, se tiene uno de los resultados de este trabajo, una caracterización del pensamiento matemático en relación a los tres sistemas presentados en la tabla 1: "El pensamiento matemático es un proceso cognitivo activo, por lo tanto, involucra actividades neurológicas, que comprometen un diálogo interno, que relacionan y utilizan representaciones de todo tipo, capacidades racionales y no racionales, capacidades desarrolladas o por desarrollar y conocimientos almacenados en la memoria e información por almacenar. Este proceso está relacionado con la vivencia de situaciones novedosas e interesantes para el individuo y con la búsqueda de respuestas a problemas, que determina el individuo de forma personal, con el objetivo de crear conocimiento sobre el medio que lo rodea y de esta forma construir un mundo matemático individual, con conexiones propias y con sistemas propios de llamados<sup>2</sup> del conocimiento" (Reyes-Santander, 2012, pág. 270).

Con esto se tienen cuatro dimensiones que están agrupadas desde su procedencia cognitiva y desde su estructura: 1. La percepción donde se destacan, la percepción del movimiento, la percepción del tiempo, la percepción del espacio y de estas tres, la percepción dinámica y estática de los objetos matemáticos, el

sentido de las palabras y otros. 2. Los pensamientos relacionados con los contenidos matemáticos, que a su vez contempla 6 categorías. 3. Las estrategias y los procedimientos, que provienen del desarrollo del individuo con el contenido y el medio. En esta dimensión se pone en juego el conocimiento y por lo tanto nuevamente la memoria tiene un papel cognitivo relevante, así como también en las capacidades que son puestas en marcha en la búsqueda y desarrollo de un plan. 4. Las capacidades no racionales, que provienen del desarrollo de actividades no racionales. Esta dimensión involucra aspectos como la intuición, la creatividad, el sentido común, la fantasía, etc.

Las relaciones entre estas dimensiones se pueden apreciar en la figura 1, así como también las categorías de cada una de ellas. Una quinta dimensión está dada por los estilos de pensamiento (Borromeo-Ferri, 2004; Schwank, 2003) y por los medios de comunicación, que incluye las representaciones, las nociones básicas (vom Hofe, 1995) y las metáforas conceptuales (English, 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Sfard, 1991, 1994; Soto-Andrade, 2006).

Esta caracterización del pensamiento matemático (PM) da una respuesta a la pregunta inicial: Entendemos por pensamiento matemático a un proceso cognitivo (neurobiológico), que vincula percepciones, contenidos, capacidades y estrategias, este se produce cuando el individuo se encuentra en situaciones o problemas relacionados con contenidos matemáticos, que son para el individuo, interesantes o que presentan un desafío a su estructura cognitiva personal.

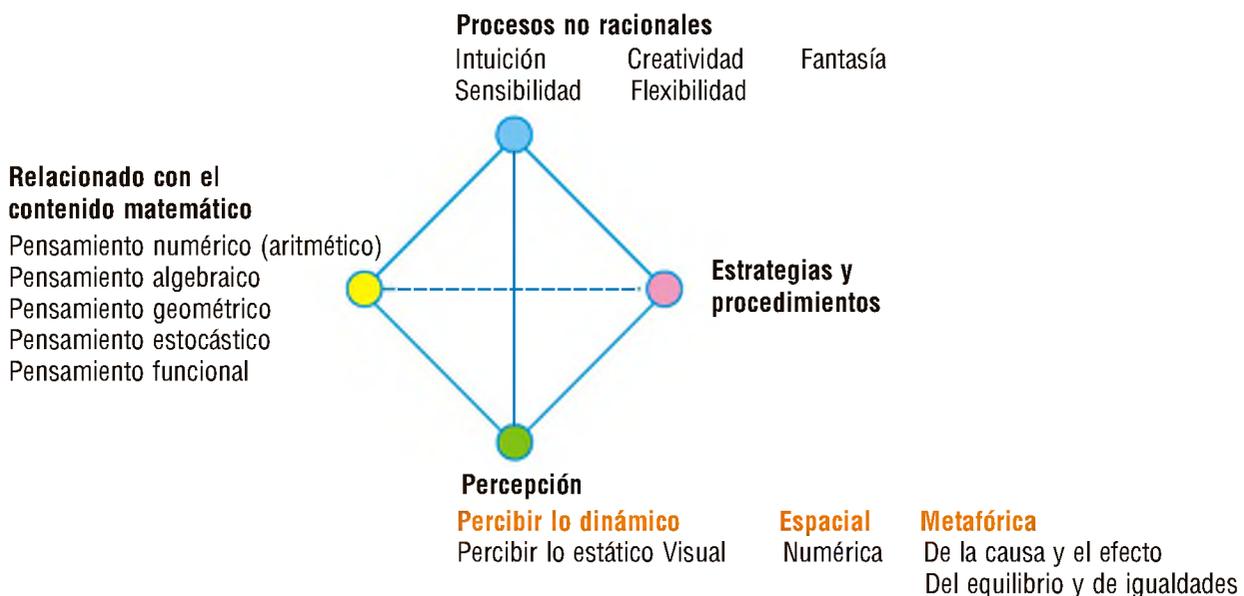


Figura 1: Modelo Tetraédrico del Pensamiento Matemático (Reyes-Santander, 2012).

2 - Los sistemas propios de llamados, son los que se generan en el aprendizaje del conocimiento matemático, entre ellos cuentan los movimientos, las imágenes, las palabras, etc. que inducen a llamar a un objeto matemático determinado, que ya está almacenado en la memoria.

## Metodología

Este es una investigación experimental de análisis cualitativo (Bortz y Döring, 2006) y tiene como objetivo identificar conceptos y variables que complementaron y retroalimentaron a la caracterización del pensamiento matemático.

Se distinguen tres escenarios, dados por los grupos de estudiantes provenientes de tres niveles diferentes. El primero de estudiantes de básica de 8 a 9 años, que denominaremos G1, el segundo grupo de estudiantes de secundaria de 16 a 17 años, que denominaremos G2 y los estudiantes universitarios de 20 a 23 años, que denominaremos G3.

A continuación una descripción breve de los sujetos y el contexto:

G1: 5 participantes del curso Knobelkurs 2009, realizado en la Universidad de Augsburg, Alemania. Estudiantes de cuarto básico, dos niñas, tres niños. El problema que aquí se analiza y se presenta es la determinación de "claves secretas". Se considera como herramienta de recopilación de la información videos y el análisis es cualitativo.

G2: 12 alumnos de secundaria, participantes del curso extra programático del área matemática, dictado por un docente del mismo liceo<sup>3</sup>. El curso se realizó dentro del año escolar, comprendido entre 2009 y 2010. La edad de los alumnos fluctuaba entre los 16 a 17 años de edad. Con ellos se trabajó el problema denominado "el collar de margarita"<sup>4</sup>. Al final de la implementación, se les pidió a los alumnos participantes, que hicieran un ensayo con el tema "Grupos". La herramienta de recopilación de información son los ensayos libres, los cuales se analizan de manera cualitativa con la hermenéutica social.

G3: 144 Participantes del seminario de álgebra, curso para estudiantes en formación de profesores de matemática, tanto de la escuela básica como de la secundaria. Estos seminarios se dictaron por docentes de la Universidad de Augsburg, del 2008 hasta el 2009. Se considera una encuesta de análisis mixto con el programa CHIC, que hace un tratamiento de los datos de forma cuantitativa y cualitativa (Gras, 2005).

## Resultados

Se hace el análisis del video, de los ensayos y de las encuestas. A raíz del análisis del video se puede decir que: los estudiantes muestran un sentido del número, categoría de la dimensión de la percepción en la caracterización. Intuyen sobre la noción de infinito, lo cual está considerado en las capacidades no racionales, las explicaciones que dan par la división

por cero no tienen un fundamento matemático, aunque muy cercano a la matemática avanzada, como lo es la noción de límite. Utilizan movimientos corporales en relaciones numéricas y se comunican en lenguaje personal, estas concuerdan con las herramientas del pensamiento, en su versión inicial y más amplia. Además, muestran dos tipos de estrategias en la resolución del problema, lo que coincide con la dimensión de las estrategias y procedimientos, aquí cabe destacar que no utilizan los procedimientos clásicos para determinar números desconocidos.

A raíz del análisis de los ensayos se puede decir que: en todos los ensayos se observa la categoría del pensamiento relacionado con el contenido, en particular el pensamiento algebraico y en algunos ensayos, se observó el pensamiento funcional y el pensamiento aritmético. Se observaron las dimensiones de la percepción y de las estrategias y procedimientos. La dimensión de las capacidades no racionales, fue la menos observada. En relación a los vehículos de comunicación se utilizó como base el lenguaje natural, pero se pudo observar tanto las representaciones semióticas, como las nociones básicas, algunas analogías y en algunos casos metáforas.

A raíz del análisis de las encuestas, se puede decir que: se reconoce una relación entre el proceso enseñanza-aprendizaje y los medios de comunicación, se observan dos de las dimensiones del pensamiento matemático el pensamiento relacionado con el contenido como pilar del proceso de aprendizaje y la de los vehículos de comunicación. Las otras dimensiones no presentan relación directa, aunque si pueden ser observadas en las preguntas abiertas del cuestionario. En las respuestas a las preguntas abiertas del cuestionario se observaron elementos identificables con las dimensiones del PM, en algunos casos aportaron en el enriquecimiento de las dimensiones del PM.

## Conclusiones

Como resultados sobresalientes de este trabajo se tiene la caracterización presentada que responde a la pregunta inicial, sobre qué es el pensamiento matemático y se puede decir que: El PM es un proceso cognitivo, que incluye a la percepción, a pensamientos relacionados con el contenido matemático, a los procedimientos y a las estrategias, como también, a los procesos y capacidades no racionales. Con los resultados obtenidos de las observaciones realizadas, se logra complementar y retroalimentar la caracterización del pensamiento matemático. Además, se presenta una quinta dimensión, de los vehículos de comunicación, que sustenta, mantiene y ayuda en el desarrollo del PM, se podría decir que esta dimensión es envolvente y que bien se podría mirar como centro los estilos de pensamientos.

3 - El docente Sr. Prof. Dr. Schneider, tiene una destacada trayectoria como docente en la Universidad de Augsburg y de docencia en el aula en el liceo Gymnasium A. B. Stettensches.

4 - Presentado por la autora en el seminario del departamento de matemática de la Universidad de Valparaíso, más información en la página web: [http://mat.uv.cl/magister\\_mat/index.php/noticias/17-el-collar-de-margarita-algo-de-grupos-y-de-combinatoria](http://mat.uv.cl/magister_mat/index.php/noticias/17-el-collar-de-margarita-algo-de-grupos-y-de-combinatoria)

Este resultado, tiene implicaciones en la forma de enseñar matemática y en la forma de aprender matemática. Estas provienen de considerar a la percepción y a las capacidades no racionales, como dimensiones del PM, lo cual indica que en la forma de enseñar deberían existir necesariamente momentos que promuevan la percepción del objeto matemático, por parte del sujeto que está aprendiendo. Aprender matemática, significa desarrollar capacidades racionales y no racionales. Desarrollar el PM, implica un desplegar de todos los sentidos del ser humano, por ende y principalmente de todas sus capacidades.

En los escenarios presentados, se establecen relaciones de causalidad entre el aprendizaje de la matemática y la caracterización del pensamiento matemático, se observan influencias en el pensamiento matemático de los estudiantes, tanto de la forma como del diseño de una clase y del desarrollo individual en el que está inmerso el estudiante.

## Referencias

- Anderson, B. (1981). *The Complete Thinker. A Handbook of Techniques for Creative and Critical Problem Solving*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Asanger, R. y Wenninger, G. (1999). *Handwörterbuch Psychologie*. Weinheim: BELTZ Psychologie Verlags Union.
- Biehler, R., Scholz, R. W., Straßer, B. y Winkelmann, B. (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.
- Bortz, J. y Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation: für Human und Sozialwissenschaftler*. 3ra edición, Berlín: Springer.
- Brunstig-Müller, M. (1997). *Wie Kinder denken oder denken, sie denken. Ein metakognitiver Interventionsansatz*. Edition SZH/SPC (der Schweizerischen Zentralstelle für Heilpädagogik Luzern). Biel: Druckerei Schüler AG.
- Damerow, P. (1996). *Abstraction and Representation. Essay on the Cultural Evolution of Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Davis, Philip J. & Hersh, Reuben. 1981. *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser.
- English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Freudenthal, H. (1979). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Vol. I. Y II. Stuttgart: Klett Studienbücher.
- Funke, J. (2006). *Enzyklopädie der Psychologie*. Serie II Kognition, Vol. 8, Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe.
- Gras, R. (2005). *Panorama du développement de l'A.S.I. à partir de situations fondatrices*. Troisièmes Rencontres Internationales, Palermo, Italia. Extraído en febrero del 2010 de la página web: [http://math.unipa.it/~grim/asi/asi\\_05\\_gras\\_1.pdf](http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_gras_1.pdf)
- Hofe, vom R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
- Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.
- Margulies, N. (2000). *Cartografía de nuestro espacio interno*. Caracas: Ediciones cartografía mental computarizada.
- Reyes-Santander, Pamela. (2012). *Charakterisierung des mathematischen Denkens - Szenarien mit Gymnasiasten und Studenten unter Verwendung von Themen der Gruppentheorie*. Tesis de Doctorado, facultad de ciencias y matemática, Universidad de Augsburg, Alemania.
- Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Studies in Mathematical Thinking and Learning. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. En I. Schwank, *ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik'*, 70-78.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(3), 1 - 36.
- Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the learning of mathematics*. (14, 1), 44-55.
- Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn.* 11, 123- 147.
- Tall, D. (1991). The Psychology of *Advanced Mathematical Thinking*, in Tall D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 3- 21.
- Varela, F. (1997). Erkenntnis und Leben. En F. B. Simon, *Lebende Systeme. Wirklichkeitskonstruktionen in der Systemischen Therapie*. Frankfurt am main: Suhrkamp. 52-48.
- Wittenberg, A. (1963): *Bildung und Mathematik*. Stuttgart: Klett Verlag.