Pemodelan Data Time Series Garch(1,1) Untuk Pasar Saham Indonesia

Time Series With GARCH(1,1) Model for Indonesian Stock Markets

Elfa Rafulta[1], Roni Tri Putra[2]

[1]Jurusan Pendidikan Matematika, STKIP YDB Lubuk Alung,
Telp./Fax: 0751-697174. Email: elfarafulta10@gmail.com
[2]Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Padang, Kampus Unand Limau Manis Padang,
Telp. 0751-72590 Fax. 0751-72576. Email : putra_tryronny@yahoo.co.id

ABSTRACT

This paper introduced a method pengklusteran for financial data. By using the model Heteroskidastity Generalized autoregressive conditional (GARCH), will be estimated distance between the stock market using GARCH-based distance. The purpose of this method is mengkluster international stock markets with different amounts of data.

Keywords : GARCH, Intenational Stock Markets

PENDAHULUAN

Kehidupan politik yang tidak menentu serta seringnya terjadi kekacauan krisis ekonomi yang terjadi pada waktu lampau, dan bencana-bencana alam yang terjadi akhir-akhir ini membuat perkembangan sector financial menjadi tidak menentu. Begitu pula dengan perubahan asset-aset financial yang cenderung berfluktuasi secara cepat. Seperti misalnya indeks harga saham,indeks harga saham pasar saham khususnya Indonesia, tingkat suku bunga, dan kurs mata uang biasanya memiliki kecenderungan berfluktuasi secara cepat dari waktu ke waktu sehingga variansi dari errornya akan selalu berubah setiap waktu (heteroskedasticity). Selain itu pada data financial biasanya terjadi pengelompokkan volatilitas yitu berkumpulnya sejumlah error dengan besar yang relative sama dalambeberapa waktu yang berdekatan. Hal seperti ini sering disebut dengan volatility clustering. Untuk mengatasi keadaan tersebut dibutuhkan suatu metode yang dapat memenuhi karakteristik-karakteristik yang dimiliki oleh data runtun waktu financial.

Oleh karena itu dibuatlah model-model runtun waktu untuk memodelkan dan meramalkan data financial yang berupa data runtun waktu tersebut. Telah kita kenal berbagai pemodelan yang dapat digunakan, diantaranya AR, MA, ARMA, ARIMA. Keempat model tersebut sangat berguna pada pemodelan data runtun waktu. Cara kerja keempat model tersebut adalah berdasarkan asumsi bahwa datanya sudah stationer dan variansi errornya tetap antar waktu(homoskedasticity).

Berbagai asumsi pemodelan yang digunakan pada metode AR, MA, ARMA maupun ARIMA dianggap tidak relevan jika dihadapkan pada sebuah transaksi financial dan sebuah variable dari pasar financial. Hal ini dikarenakan pada kebanyakan data runtun waktu financial tidak dapat memnuhi asumsi-asumsi dalam pemodelan tersebut. Metode-metode tersebut tidak memperhitungkan adanya kestationeran dalam variansi yang berarti bahwa nilai variansinya selalu berubah-ubah setiap waktu. Untuk mengatasinya dibutuhkan metode lain yang dapat memenuhi karakteristik-karakteristik yang dimiliki oleh data runtun waktu financial.

Untuk itu diperkenalkan sebuah pemodelan dari financial time series yaitu ARCH oleh Robert F. Engle pada tahu 1982.

Sejak diperkenalkannya model ARCH, banyak sekali penelitian yang berbasis pada model ini, sebab metode ini dapat memenuhi karakteristik-karakteristik dari data runtun waktu finasial yaitu memungkinkan adanya heteroskedastisitas dan membolehkan adanya ketergantungan volatilitas. Menurut Engle, penggunaan model ARCH pada data runtun waktu yang mengalami heteroskedastisitas akan sangat berperan dalam meningkatkan efisiensi.

Model ARCH mempunyai kemampuan untuk memenuhi semua karakteristik data runtun waktu financial. Pada metode ARCH, variansi error masa sekarang dipengaruhi oleh volatilitas masa lalu. Hal ini mengakibatkan terdapat banyaknya parameter yang harus diduga. Tentu saja pendugaan sejumlah parameter sangat sulit dilakukan karena membutuhkan tingkat ketelitian yang sangat tinggi, mengingat pula prinsip parsimony dalam memodelkan suatu data, yaitu model yang baik adalah model yang memiliki parameter yang sedikit.

Dengan berbagai keterbatasan yang terdapat pada model ARCH, maka pada tahun 1986 Bollerslev mengemukakan sebuah metode baru yang merupakan hasil pengembangan metode ARCH. Metode tersebut adalah GARCH. Oleh karena itu berdasarkan prinsip parsimony maka dipilihlah model GARCH(1,1) untuk pasar saham Indonesia.

METODOLOGI

Dalam penelitian ini mempelajari mengenai analisis runtun waktu. Selanjutnya dipelajari model ARCH dan GARCH yang menyangkut pengertian dan sifat-sifati dari model, estimasi parameter dari model dan peramalannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses Stokastik

Sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, berbagai gejala seperti perubahan nilai GNP yang akan berpengaruh pada perekonomian nasional, perubahan nilai suku bunga harian perbankan, perubahan nilai-nilai saham dalam perdagangan di Bursa Efek, yang kesemuanya terjadi dalam bidang ekonomi. Dalam bidang lain dijumpai berbagai fenomena seperti, dibidang kesehatan, jumlah pasien dalam suatu rumah sakit setiap tahunnya selalu berubah-ubah, begitu juga dengan jumlah kematian pasien, jumlah kematian bayi, dan lain-lain.

Semua gejala ini menunjukkan suatu rangkaian hasil observasi yang bergerak kea rah yang sama, dari waktu yang lampau ke waktu yang akan dating. Rangkaian ini dinamakan runtun waktu. Dari suatu runtun waktu dapat dilakukan analisis yang betujuan untuk membangun suatu model stokastik, yang nantinya dapat digunakan untuk memprediksi keadaan yang akan dating.

Box dan Jenkins (1970) menyebutkan ada dua cara untuk mendapatkan runtun waktu diskrit. Pertama dengan mengambil sampel pada waktu-waktu tertentu dari runtun waktu kontinu dan kedua dengan mengakumulasikan observasi untuk suatu periode waktu tertentu.

Observasi menurut waktu $\{y_t, t = 1,2,3,\ldots,n\}$ dalam runtun waktu dapat dinyatakan sebagai suatu proses stokastik. Proses stokastik $\{y_t, t\epsilon T\}$, adalah kondisi variabel random untuk setiap $t\epsilon T$, dimana y_t adalah variabel random yang menyaakan suatu keadaan (state) atau kedudukan pada saat t, indeks t kerap kali menyatakan waktu. Jadi proses stokastik dapat diilustrasikan dengan distribusi probabilistic berdimensi n, misalkan $P(y_t), t = 1,2,3,\ldots,n$ dengan asumsi y_t berdistribusi normal, mempunyai mean $E(y_1), E(y_2), E(y_3),\ldots,E(y_n)$; Variansi $Var(y_1), Var(y_2), Var(y_3),\ldots,Var(y_n)$; kovariansi $Cov(y_i, y_j)$ untuk $i < j$.

Proses Runtun Waktu Stationer

Ada beberapa model runtun waktu stationer yang akan dibahas yaitu proses white noise, proses Autoregressive (AR), Moving Average (MA), dan Autoregressive Moving Average (ARMA).

Proses *White Noise*

Jika $\{Y_t\}$ adalah barisan variable random yang tidak berkorelasi dengan mean $E[Y_t] = \mu = 0$ dan variansi $Var(Y_t) = \sigma^2$ maka $\{Y_t\}$ disebut proses *white noise* yang dinotasikan $\{Y_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ dengan fungsi autokovariansinya adalah

$$Cov(Y_{t+h}, Y_t) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Dan fungsi autokorelasinya,

$$Cor(Y_{t+h}, Y_t) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Proses *white noise* merupakan proses yang penting karena dianggap sebagai factor pembangun bagi proses runtun waktu lainnya (*building block*).

Fungsi Autokorelasi (ACF)

Definisi

Suatu data runtun waktu $\{X_t\}$ dikatakan proses stationer jika untuk setiap t dan $t-s$ memenuhi keadaan sebagai berikut:

1) $E[X_t] = E[X_{t-s}] = \mu$ konstanta untuk semua t
2) $Var(X_t) = E[X_t - \mu]^2 = E[X_{t-s} - \mu]^2 = \sigma^2$ konstan untuk semua t
3) $E[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)] = E[(X_{t-j} - \mu)(X_{t-j-s} - \mu)] = \gamma(s)$ konstanta untuk semua t dan $k \neq 0$

Didefinisikan suatu kovariansi dari Y_t dan Y_{t+k} ditulis sebagai berikut:

$$Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma(k)$$

Dan korelasi antara Y_t dan Y_{t+k} adalah:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Dengan catatan bahwa $Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \gamma(0)$

Sebagai fungsi dari k, $\gamma(k)$ disebut sebagai fungsi autokovariansi dan $\rho(k)$ disebut sebagai fungsi autokorelasi (ACF). Dalam praktek sehari-hari dapat digunakan fungsi autokovariansi sampel dan fungsi autokorelasi sampel, dimana

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

Dan

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

Dengan $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$

Adapun sifat-sifat dari fungsi autokovariance $\gamma(k)$ dan autokorelasi $\rho(k)$ adalah sebagai berikut:

1) $\gamma(0) = Var(X_t)$ dan $\rho(0) = 1$
2) $|\gamma(k)| \leq \gamma_0$ dan $|\rho(k)| \leq 1$
3) $\gamma(k) = \gamma(-k)$ dan $\rho(k) = \rho(-k)$ untuk semua k, yaitu $\gamma(k)$ dan $\rho(k)$ simetris. Sifat ini berasal dari fakta bahwa perbedaan waktu antara X_t dan X_{t+k} serta X_t dan X_{t-k} adalah sama. Karena itulah biasanya fungsi autokorelasi plot hanya untuk lag nonnegative saja.

Partial Autocorrelation Function

Autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara X_t dan X_{t+k}, dengan menganggap ketergantungan linear pada variable-variabel diantara keduanya yaitu $X_{t+1}, X_{t+2}, \cdots, X_{t+k-1}$ dihilangkan.

Autokorelasi parsial dapat diturunkan dengan menggunakan model regresinya, dimana variable dependen X_{t+k} dari proses stationer dengan mean nol diregresikan pada lag k variabel $X_{t+k-1}, X_{t+k-2}, \cdots, X_t$.

$$X_{t+k} = a_{k_1}X_{t+k-1} + a_{k_2}X_{t+k-2} + \cdots + a_{k_k}X_t + e_{t_k}$$

Dimana a_{k_i} dinotasikan sebagai parameter regresi ke-I dan e_{t+k} adalah suku error normal yang tidak berkorelasi dengan X_{t+k-j} untuk $j \geq 1$. Dengan mengalikan X_{t+k-j} pada kedua sisi dari persamaan tersebut dan mengambil ekspektasinya, diperoleh:

$\gamma(j) = a_{k_1}\gamma(j-1) + a_{k_2}\gamma(j-1) + \cdots + a_{k_k}\gamma(j-k)$

Bila persamaan diatas dibagi dengan $\gamma(0)$ maka,
$\rho(j) = a_{k_1}\rho(j-1) + a_{k_2}\rho(j-2) + \cdots + a_{k_k}\rho(j-k)$

Untuk $j = 1,2,\cdots,k$ didapatkan sistem persamaan sebagai berikut:
$\rho(1) = a_{k_1}\rho(0) + a_{k_2}\rho(1) + \cdots + a_{k_k}\rho(k-1)$

$\rho(2) = a_{k_1}\rho(1) + a_{k_2}\rho(0) + \cdots + a_{k_k}\rho(k-2)$

$\vdots$
$\rho(k) = a_{k_1}\rho(k-1) + a_{k_2}\rho(k-2) + \cdots + a_{k_k}\rho(0)$

Dengan menggunakan aturan cramer untuk $k = 1,2,\cdots$ dan $\rho(0) = 1$, maka diperoleh
$k = 1, a_{11} = \rho(1)$

$$k = 2, a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

$$k = 3, a_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

$\vdots$

$$a_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-3) & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & \rho(1) & \rho(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-3) & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \cdots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

Jadi autokorelasi parsial antara X_t dan X_{t+k} dapat diperoleh sebagai koefisien regresi yang berhubungan dengan X_t saat meregresikan X_{t+k} pada lag ke-h variable dari dirinya yaitu $X_{t+k-1}, X_{t+k-2}, \cdots X_t$, a_{k_k} menjadi notasi standar untuk autokorelasi parsial antara X_t dan X_{t+k} dalam analisis runtun waktu.

Proses *Autoregressive* (AR)

Autoregressive adalah suatu bentuk regresi yang menghubungkan nilai-nilai sebelum (*pastvalue*) diri sendiri (masing-masing variabel) pada selang waktu (*time lag*) yang bemacam-macam. Dalam model runtun waktu *Autoregressive* (AR), sebuah observasi X_t berkorelasi secara langsung dengan observasi masa lampau sebanyak p dimana nilai $p \le T$. Model Autoregressive dapat dinyatakan sebagai:
$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Persamaan diatas adalah persamaan *Autoregressive* dengan orde sebesar p atau secara umum dilambangkan sebagai AR(p). Dalam model tersebut ε_t disebut sebagai *error*. Ketika *error* bersifat bebas (independent) dan mempunyai distribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi konstan sebesar σ_ε^2, maka disebut sebagai *white noise* yang mana dinotasikan dengan $\varepsilon_t \sim WN(\mu, \sigma^2)$.

Misalnya untuk persamaan AR(1), nilai X_t dapat didefinisikan secara berulang dari observasi masa lalu sebagai:
$X_t = \varepsilon_t + \phi_1 X_{t-1}$
$= \varepsilon_t + \phi_1(\varepsilon_{t-1} + \phi_1 X_{t-2})$
$= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2}$
$= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2(\varepsilon_{t-2} + \phi_1 X_{t-3})$
$= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 X_{t-3}$
$\vdots$
$= \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \phi_1^{k+1} X_{t-k-1}$

Hal serupa juga berlaku untuk semua proses *Autoregressive* dengan berapapun besarnya nilai p. Jika $|\phi_1| < 1$, diikuti nilai k yang menjadi tak terhingga, maka $X_t = \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$.

Sedangkan variansi dari X_t dinyatakan sebagai
$V(X_t) = \sum_{j=0}^{k} \phi_1^{2j} V(\varepsilon_{t-j})$
$= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^{2j}$

$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$

Dengan varians X_t, $0 < \sigma^2 < \infty$.

Proses General *Moving Average* (MA)

Model lain yang biasa digunakan untuk pemodelan runtun waktu adalah model *Moving Average* (MA) dengan orde q atau MA(q) yang didefinisikan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (2.3.3.1)$$

Dimana ε_t diasumsikan *white noise*. Kondisi ini dapat ditulis dalam, bentuk lain menjadi $\varepsilon_t = X_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$

Pada kasus MA(1) juga dapat dinyatakan secara berulang dari observasi masa lampau yang disusun sebagai

$$\varepsilon_t = X_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$
$$= X_t + \theta_1(X_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})$$
$$= X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2\varepsilon_{t-2}$$
$$\vdots$$
$$= X_t + \sum_{j=1}^{k}\theta_1^j X_{t-j} + \theta_1^{k+1}\varepsilon_{t-k-1}$$

Jika $|\phi_1| < 1$ dan nilai k tak terhingga (*infinite*) maka ε_t menjadi

$$\varepsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j X_{t-j}$$

Yang juga dapat dituliskan sebagai

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Ini adalah proses AR(∞) yang dituliskan $X_t = \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^* X_{t-j} + \varepsilon_t$ dengan $\theta_1^* = -\theta_1^j$ untuk $j = 1, \ldots, \infty$.

Model *General Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Proses $\{X_t\}$ merupakan proses *Autoregressive Moving Average*, ARMA (p,q) jika memenuhi formula

$$X_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_2 X_{t-2} - \cdots - \theta_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Dimana ε_t adalah *white noise*.

Kadang model *Autoregressive* dan *Moving Average* sendiri tidak memberikan hasil yang efektif ketika mengepaskan data. Oleh karena itu model ARMA dengan orde *p* dan *q* yang kecil lebih sering digunakan daripada model AR atau MA dengan orde yang lebih tinggi. Sebagai contoh model ARMA(1,1) didefinisikan sebagai

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

Atau dapat juga dinyatakan sebagai

$$\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$
$$= X_t - \theta_1 X_{t-1} + \theta_1(X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-2})$$

$$= X_t - (\phi_1 - \theta_1)X_{t-1} - \phi_1\theta_1 X_{t-2} + \theta_1^2\varepsilon_{t-2}$$

$$= X_t - (\phi_1 - \theta_1)X_{t-1} - \phi_1\theta_1 X_{t-2} + \theta_1^2(X_{t-2} - \phi_1 X_{t-3} - \theta_1\varepsilon_{t-3})$$

$$= X_t - (\phi_1 - \theta_1)X_{t-1} - (\phi_1 - \theta_1)\theta_1 X_{t-2} - \phi_1\theta_1^2 X_{t-3} + \theta_1^3\varepsilon_{t-3}$$

$$\vdots$$

$$= X_t - (\phi_1 - \theta_1)\sum_{j=1}^{k}\theta_1^{j-1}X_{t-j} - \phi_1\theta_1^k X_{t-k-1} + \theta_1^{k+1}\varepsilon_{t-k-1}$$

Anggap $|\phi_1| < 1$ dan k tak terhingga (*infinite*) maka persamaan diatas menjadi

$$\varepsilon_t = X_t - (\phi_1 - \theta_1)\sum_{j=1}^{k}\theta_1^{j-1}X_{t-j}$$

Atau dapat juga dituliskan sebagai

$$X_t = (\phi_1 - \theta_1)\sum_{j=1}^{k}\theta_1^{j-1}X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Ini adalah model AR(∞) yang dituliskan $X_t = \sum_{j=1}^{\infty}\phi_1^* X_{t-j} + \varepsilon_t$ dengan $\phi_1^* = (\phi_1 - \theta_1)\theta_1^{j-1}$ untuk $j = 1, \ldots, \infty$. Ini memberikan kesan bahwa model ARMA(1,1) mungkin kadang-kadang menjadi penaksir yang lebih baik disbanding model AR dengan ordo yang lebih tinggi.

Metode Estimasi Maksimum Likelihood

Definisi (Bain dan Engelhardt, 1992)

Fungsi densitas bersama dari n variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diestimasi dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dilambangkan dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ dimana θ adalah parameter yang tidak diketahui, maka fungsi likelihood dari θ adalah $L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta)$.

Definisi (Bain dan Engelhardt, 1992)
Misalkan
$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$
merupakan fungsi probabilitas densitas bersama dari variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ utnuk suatu himpuanan observasi-observasi $x_1, x_2, \dots, x_n$ suatu nilai $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\theta)$ disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) dari θ. $\hat{\theta}$ merupakan suatu nilai dari θ yang memenuhi
$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) =$
$\max_{\theta\in\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$

$L(\theta)$ maksimum bila turunan pertamanya sama dengan nol, oleh sebab itu nilai estimator likelihood dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ dan $L(\theta)$dikatakan maksimum jika $\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta} < 0$ bernilai negative.

Model ARCH

Dalam analisis runtun waktu secara umum diasumsikan bahwa variansi dari error pada pemodelan runtun waktu adalah konstan yang sering disebut homokedastisitas. Asumsi ini sering kali tidak dapat dipenuhi dalam data real atau dengan kata lain sering terjadi heteroskedastisitas yaitu variansi errornya tidak konstan. Ketidak konstanan dari variansi error ini mungkin terjadi sebagai akibat dari perilaku pasar yang cenderung menghindari resiko yang digambarkan oleh variansi dengan jalan member atau menjual asset dalam jangka waktu yang pendek. Walaupun variansi cenderung tidak konstan namun perubahan-perubahan variansi ini masih tetap dalam jalur kestationeran mean.

Adanya ketidak konstanan variansi akan menyebabkan pelaku pasar meramalkan variansi bersyarat runtun waktu, atau variansi saat t yang dipengaruhi oleh variansi dari data sebelumnya $(t-1, t-2, t-3, \cdots, 2, 1)$. Salah satu pendekatan untuk meramalkan tingkat volatilitas (variansi) adalah memperkenalkan variable independen yang dapat memprediksi volatilitas. Bentuk kasus sederhana adalah:
$Y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} X_t$

Dengan Y_{t+1}: variable yang akan diteliti

ε_{t+1}: pengganggu white noise yang memiliki variansi σ^2

X_t: variable independen

Dalam persamaan diatas jika diasumsikan $X_1 = X_2 = X_3 = \cdots = X_t = c$, dimana c adalah konstan, maka variable Y_t hanya akan dipengaruhi ε_t yang merupakan proses white noise, sehingga Y_t memiliki tingkat volatilitas yang konstan.
$Var(Y_t) = c^2\sigma^2$
Namun jika tidak demikian, jika nilai X_t berubah untuk tiap waktu secara independen maka variansi bersyarat dari persamaan diatas adalah
$Var(Y_{t+1}|X_t) = X_t^2\sigma^2$
Dari persamaan diatas terlihat bahwa jika X_t^2 besar maka nilai variansi bersyarat dari Y_{t+1} juga akan menjadi besar, begitupun sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa antara X_t^2 dan Y_{t+1} memiliki korelasi positif. Engle (1982) menunjukkan hubungan simultan yang dapat memodelkan mean dan variansi dari suatu data runtun waktu. Engle mendefinisikan model ARCH(1).

Definisi (Engle, 1982)
Hubungan simultan antara Y_t dan h_t
$Y_t = X_t'\tilde{\beta} + \varepsilon_t$
$\varepsilon_t = u_t\sqrt{h_t}$
$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$
Dari definisi diatas model persamaan yang ditunjukkan tersebut adalah model regresi ARCH(1). Pemodelan ARCH(1) diatas menghasilkan dua persamaan yaitu:

a) Persamaan mean bersyarat. Ini merupakan persamaan untuk model mean dari data runtun waktu. Persamaan ini dapat berupa persamaan ARMA atau persamaan regresi. Dalam definisi 3.1.1 diatas yang menunjukkan persamaan mean bersyarata adalah persamaan (3.1.3). Dalam persamaan ini terdapat $\tilde{\beta}$ yang merupakan parameter yang tidak diketahui, sedangkan X_t merupakan variable independen. Jika persamaan mean diatas adalah persamaan yang stationer terhadap mean maka bentuk persamaan (3.1.3) akan menjadi $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$. Bentuk persamaan ini sering dijumpai dalam memodelkan persamaan return asset.

b) Persamaan variansi bersyarat. Persamaan ini melibatkan satu konstanta dan variansi dari periode sebelumnya. Didalam definisi 3.1.1 yang menunjukkan persamaan variansi bersyarat adalah persamaan (3.1.5). Dari persamaan (3.1.3) dapat diartikan bahwa error pada saat t dipengaruhi oleh error sebelumnya yaitu paa saat $t-1$.

Model ARCH(1) yang didefinisikan dalam persamaan diatas merupakan model linear simultan. u_t merupakan proses white noise dengan asumsi $u_t \sim N(0,1)$ dan u_t independen antara satu waktu dengan waktu yang lain. Sedangkan α_0 dan α_1 merupakan konstanta. Karena h_t merupakan variansi bersyarat yang tidak mungkin negative maka α_0 dan α_1 perlu dilakukan pembatasan yaitu $\alpha_0 > 0$ dan $0 \le \alpha_1 < 1$.

α_1 sedemikian $0 \le \alpha_1 < 1$.

Definisi

Hubungan simultan antara Y_t dan h_t dari model ARCH(q) adalah:

$$Y_t = X_t' \tilde{\beta} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2$$

Model GARCH

GARCH adalah salah satu pendekatan untuk memodelkan runtun waktu dengan kondisi error bervariasi menurut waktu (heteroskedasticity). Metode ini diperkenalkan pertama kali oleh Bollerslev (1986) yang merupakan generalisasi dari proses ARCH. GARCH dianggap memberikan hasil yang lebih sederhana karena menggunakan lebih sedikit parameter sehingga mengurangi tingkat kesalahan perhitungan.

Secara umum GARCH(p,q) dituliskan sebagai

$\varepsilon_t | F_{t-1} \sim N(0, h_t)$ dengan

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}$$

$\alpha_0 > 0, \alpha_i \ge 0$ untuk $i = 1, \cdots p$ dan $\beta_j \ge 0$ untuk $j = 1, \cdots q$.

Model ARCH(p) dan GARCH(1,1)

Proses GARCH yang paling sering digunakan adalah proses GARCH(1,1). Prosesnya diberikan sebagai berikut:

$\varepsilon_t | F_{t-1} \sim N(0, h_t)$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Dimana $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \ge 0$, dan $\beta_1 \ge 0$

Ketika mengepaskan model ARCH pada data financial, kadang diperlukan ordo yang besar untuk mendapatkan pengepasan yang memuaskan. Sebenarnya hal itu dapat digantikan dengan model GARCH(1,1) dengan mensubtitusikan h_{t-1} dalam persamaan menjadi

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) \\ &= \alpha_0 (1 + \beta_1) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 h_{t-2} \\ &= \alpha_0 (1 + \beta_1) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 h_{t-3}) \\ &= \alpha_0 (1 + \beta_1 + \beta_1^2) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1^3 h_{t-3} \\ &= \vdots \\ &= \alpha_0 \sum_{j=1}^{k} \beta_1^{j-1} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} \beta_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 + \beta_1^k h_{t-k} \end{aligned}$$

Jika $k \to \infty$, h_t menjadi

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} \beta_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2$$

Dimana ini sesuai dengan model ARCH(∞) yaitu:

$h_t = \alpha_0^* + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^* \varepsilon_{t-j}^2$ dengan $\alpha_0^* = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1}$ dan $\alpha_j^* = \alpha_1 \beta_1^{j-1}$ untuk $j = 1,2, \cdots \infty$.

Hal ini membuktikan bahwa model GARCH(1,1) dapat menggantikan ARCH(p) dengan ordo yang tinggi sehingga bisa memberikan model yang lebih sederhana.

Eksistensi Proses GARCH (1,1)

Model GARCH (1,1) secara umum dinyatakan sebagai $\varepsilon_t|F_t \sim N(0,h_t)$ dengan

$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$

Dimana $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$ dan $\beta_1 \geq 0$ dan $\alpha_0 + \alpha_1 < 1$.

Dengan h_t adalah variansi dari error pada saat t.

ε_{t-1}^2 adalah kuadrat error pada saat $t-1$

α_1 koefisien parameter ARCH

β_1 koefisien parameter GARCH

Agar persamaan mengikuti distribusi normal $N(0,1)$ maka harus dibagi dengan akar kuadrat dari varians, sehingga menjadi

$$\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}|F_{t-1} \sim N(0,1)$$

Oleh karena itu urutan $Z_1, \cdots, Z_T$ yang didefinisikan dengan $Z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$ menjadi independent identically distributed (iid) $N(0,1)$. Dengan begitu maka dapat dibangun solusi stationer dari urutan kondisi iid $N(0,1)$ random variabel Z_t.

Anggap bahwa proses bermula pada jarak tak terbatas di masa lalu, sehingga h_t dapat dinyatakan sebagai:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1(Z_{t-1}^2 h_{t-1}) + \beta_1 h_{t-1}$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1)h_{t-1}$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1)h_{t-1}\{\alpha_0 + \alpha_1(Z_{t-2}^2 h_{t-2}) + \beta_1 h_{t-2}\}$$
$$\vdots$$
$$= \alpha_0 + \alpha_0 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\alpha_1 Z_{t-j}^2 + \beta_1\right)\right]$$

Berdasarkan teorema Lukacs yang berbunyi 'jika nilai harapan dari sebuah jumlah tak terbatas dari random variabel non negatfi adalah berhingga (terbatas) maka jumlahnya hamper pasti konvergen", maka dapat diterapkan untuk mendapatkan ekspektasi dari variansinya.

$$E(h_t) = \alpha_0 + \alpha_0 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\alpha_1 E\left(Z_{t-j}^2\right) + \beta_1\right)\right]$$

$$= \alpha_0 + \alpha_0 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_1 + \beta_1)^k$$
$$= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$$

Oleh karena itu nilai harapan tidak bersyarat dari h_t adalah terdefinisi (ada nilainya) dan urutan tidak terbatas dari h_t dalam persamaan 3.1.1 diatas konvergen hingga $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$ dengan syarat $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Estimasi Parameter

Dalam pembahasan etimasi parameter dari α_0, α_1 dan β_1 dalam model GARCH (1,1) ini, dimisalkan kita memiliki model regresinya sedemikian hingga

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_t + e_t \qquad t = 1, \cdots T$$
$$\varepsilon_t = Z_t\sqrt{h_t}$$
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Maka kita akan memiliki vektor parameter $\tilde{\theta}$ sebagai berikut

$$\tilde{\theta} = (\gamma_0, \gamma_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)' = \left(\widetilde{\gamma'}, \tilde{\delta}'\right)$$

Dengan

$$\tilde{\delta} = \begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_0\end{bmatrix}$$

Untuk mengestimasi parameter dari variansi α_0, α_1 dan β_1 terlebih dahulu kita cari gradient dari fungsi likelihood pada

$$f(\varepsilon_t|F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}}$$

Misalkan L_t menyatakan fungsi likelihood untuk observasi ke-t dan ukuran sampel dinyatakan dengan T maka:

$$L_t = \log f(\varepsilon_t|F_{t-1})$$
$$= -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log h_t - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}$$

Terhadap parameter $\tilde{\delta}$

$$\frac{\partial L_t}{\partial \tilde{\delta}} = \frac{\partial L_t}{\partial h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \tilde{\delta}}$$
$$= \left(-\frac{1}{2h_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2}\right)\frac{\partial h_t}{\partial \tilde{\delta}}$$
$$= -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \tilde{\delta}} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \tilde{\delta}}$$

$$= \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \tilde{\delta}}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_t}\right)\tilde{b_t} v_t$$

Sehingga dari metode Newton-Raphson yang telah dimodifikasi dapat kita peroleh bentuk iterasi sebagai berikut:

$$\widetilde{\delta_{\iota+1}} = \tilde{\delta_\iota} - \left[\sum_{t=1}^{T} v_t^2 \left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{b_t}}{h_t}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{b_t}}{h_t}\right)'\right]^{-1} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_t}\right)\tilde{b_t} v_t$$

Bentuk diatas juga bisa dinotasikan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\widetilde{\delta_{\iota+1}} = \tilde{\delta_\iota} - [GG']^{-1}G'C$$

Dimana

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial L_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial L_1}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial L_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial L_2}{\partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial L_T}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial L_T}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial L_T}{\partial \beta_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2h_1}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_1} - 1\right) & \frac{1}{2h_1}(h_0)\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_1} - 1\right) & \frac{1}{2h_1}(\varepsilon_0^2)\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_1} - 1\right) \\ \frac{1}{2h_2}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_2} - 1\right) & \frac{1}{2h_2}(h_1)\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_2} - 1\right) & \frac{1}{2h_2}(\varepsilon_0^2)\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_2} - 1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2h_t}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) & \frac{1}{2h_t}(h_{T-1})\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) & \frac{1}{2h_t}(\varepsilon_0^2)\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) \end{bmatrix}$$

Dan $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

Bollerslev mengusulkan sebagai nilai awal dari variansi adalah h_0 dan nilai awal untuk kuadrat error (ε_0^2) agar diestimasi menggunakan $s^2 = \frac{1}{T}\sum_t \varepsilon_t^2$. Untuk nilai awal dari α_0 dan α_1 dapat diperoleh dengan meregresikan ε_t^2 dengan sebuah konstanta dan ε_{t-1}^2 sedangkan untuk β_1 diberi nilai awal nol.

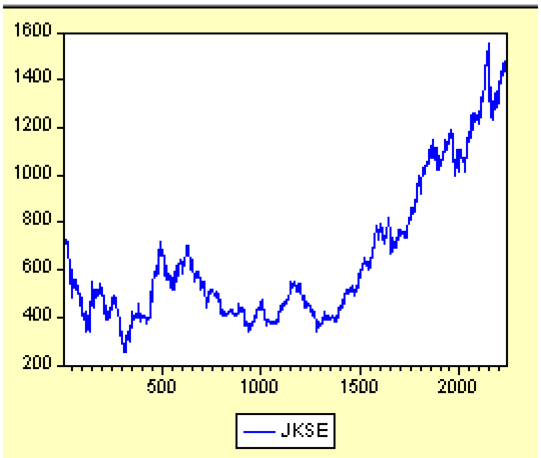
Deskripsi Data

Data yang digunakan pada pembahasan ini adalah data harian pasar saham Indonesia selama jangka waktu 1966-2006. Data berasal dari situs www.finance.yahoo.com .

Pra Analisis Data

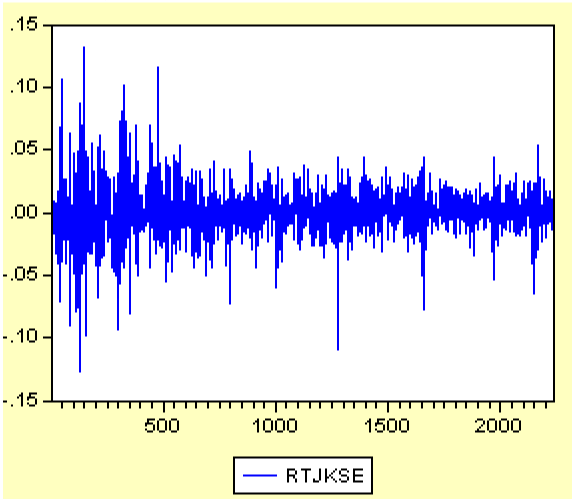
Mengestimasi Model GARCH (1,1) untuk pasar saham Indonesia (JKSE)

Langkah awal yang dilakukan dalam menganalisis data adalah dengan membuat plot data. Plot data tersebut dapat dilihat pada gambar 4.13



Gambar 4.13
Plot Data JKSE

Dari plot diatas dapat dilihat bahwa secara umum trend cenderung naik dan dapat dilihat pula data belum stationer, baik rata-rata maupun variansinya. Sedangkan plot return pada gambar 4.14 dari pasar saham JKSE, dimana dipergunakan disini adalah Continuously Compounded Return bisa dilihat bahwa juga terdapat adanya nilai ekstrem, namun sudah stationer dalam mean.



Gambar 4.14 Plot Data Return Pasar Saham JKSE

Dalam pemodelan variansi dengan model ARCH/GARCH, harus juga dilakukan pemodelan mean, dimana pemodelan mean dan pemodelan variansi dilakukan secara simultan antara keduanya. Untuk menentukan model mean dari return kita periksa plot ACF dan PACF data return. Berikut ini adalah correlogram return dari lag-1 sampai lag-20, yaitu:

Correlogram of RTJKSE

Date: 07/27/10 Time: 14:08
Sample: 1 2233
Included observations: 2231

Lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.163	0.163	59.390	0.000
2	0.010	-0.017	59.610	0.000
3	-0.006	-0.005	59.691	0.000
4	-0.018	-0.016	60.386	0.000
5	-0.017	-0.012	61.051	0.000
6	-0.028	-0.024	62.810	0.000
7	-0.030	-0.022	64.802	0.000
8	-0.001	0.007	64.805	0.000
9	0.011	0.010	65.085	0.000
10	0.042	0.039	69.078	0.000
11	0.079	0.066	82.929	0.000
12	0.033	0.009	85.327	0.000
13	0.043	0.038	89.544	0.000
14	0.026	0.015	91.023	0.000
15	-0.009	-0.011	91.189	0.000
16	0.031	0.041	93.403	0.000
17	0.057	0.054	100.74	0.000
18	0.012	0.000	101.05	0.000
19	-0.026	-0.026	102.56	0.000
20	0.024	0.035	103.81	0.000

Tabel 4.18. ACF dan PACF Data Return

Pada table 4.18 dapat dilihat dari plot autokorelasi dan autokorelasi parsial signifikan pada lag 1. Maka data diolah menggunakan ARMA (1,1). Untuk memudahkan dalam menentukan model mean terbaik dari beberapa model mean dapat dilakukan dengan membandingkan nilai sig koef AR, sig koef MA, SSR, AIC, dan

Dari analisis model yang nilai AIC dan SIC terkecil, maka diperoleh pemodelan mean terbaik yaitu ARMA (1,1).

Setelah didapat pemodelan mean maka akan dilakukan estimasi model GARCH (1,1)

Dependent Variable: RTJKSE
Method: ML - ARCH (Marquardt)
Date: 07/27/10 Time: 14:16
Sample(adjusted): 1 2231
Included observations: 2231 after adjusting endpoints
Estimation settings: tol= 0.00010, derivs=accurate numeric
Initial Values: C(1)=0.00500, C(2)=0.00022, C(3)=0.15000, C(4)=0.60000
Convergence achieved after 20 iterations
MA backcast: 0, Variance backcast: ON

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
MA(1)	0.168139	0.021973	7.652049	0.0000
Variance Equation				
C	8.32E-06	1.05E-06	7.941685	0.0000
ARCH(1)	0.124307	0.009083	13.68550	0.0000
GARCH(1)	0.856903	0.008350	102.6201	0.0000

R-squared	0.026509	Mean dependent var	0.000317
Adjusted R-squared	0.025198	S.D. dependent var	0.018575
S.E. of regression	0.018339	Akaike info criterion	-5.434005
Sum squared resid	0.749003	Schwarz criterion	-5.423767
Log likelihood	6065.633	Durbin-Watson stat	2.004329

Tabel 4.20. Estimasi model GARCH (1,1)

SIMPULAN

Pada proses pemodelan pasar saham Indonesia ini yakni JKSE terlihat bahwa pemodelan dengan menggunakan GARCH(1,1) adalah pemodelan yang signifikan. Sehingga kita dapat melakukan estimasi harga saham untuk periode berikutnya. Hal ini sangat bermanfaat sekali bagi seorang investor untuk memanfaatkan modalnya pada penanaman saham.

SARAN

Adapun saran yang harus dipertimbangkan dalam penelitian ini adalah:

1. Disarankan agar pengusaha bisa menanamkan modalnya di pasar saham Indonesia ini yakni dengan cara membeli lembaran-lembaran saham JKSE.
2. Meskipun krisis ekonomi pernah melanda Indonesia namun JKSE harus tetap eksis di perdagangan saham dunia yang nantinya berharap pada nilai tukar rupiah yang tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", Journal of Econometrics, 31, 307-327.

Caiado, J., Crato, N. and Peña, D. (2007). "Comparison of time series with unequal lengths", manuscript.

Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (1992). Applied Multivariate Statistical Analysis. 3rd Ed., Englewood Cli¤s, Prentice-Hall.

Bain dan Engelhardt, 1992. Introduction To Probability And Mathematical Statistics.

Engle, R. (1982). "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom in.ation", Econometrica, 50, 987-1008.

Winarno, Wing Wahyu. 2009. Analisis Ekonometrika dan Statistika denagn Eviews.Yogyakarta: UPPT STIM YKPN.