氏名（本籍）	横田真秀（三重県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1179号
学位授与の日付	2019年3月19日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Forbidden subgraph conditions and related notions** **(禁止部分グラフ条件および関連する概念)**

論文審査委員　（主査）教授　江川　嘉美

教授　石渡恵美子　　准教授　小谷　佳子

教授　眞田　克典　　准教授　柳田　昌宏

論文内容の要旨

本論文は, 禁止条件によって定められる集合同士の関係および, 禁止条件と他の諸性質との関係性に関するものである.

以降ではグラフとして無向単純グラフで位数有限のもののみを考える.

はじめに, 本論文で用いる用語および記号を定義する. グラフ G に対し, その頂点集合 S が G の cutset であるとは,$G-S$ が非連結であることをいう. グラフ G は, 頂点数が $k+1$ 以上であり, かつ, 任意の $k-1$ 点集合 $S \subset V(G)$ に対し $G-S$ が連結であるとき,$k-$ 連結であるという. また G が $k-$ 連結であり $(k+1)-$ 連結でないとき G の連結度は k であるといい,$\mathrm{conn}(G)=k$ と表記する. また,$\omega(G)$ によってグラフ G の連結成分の個数を表すとし, $\min_{S:cutset}\{\frac{|S|}{\omega(G-S)}\}$ によって定まる値を G の toughness と呼び,$\mathrm{tough}(G)$ で表す. ただし,G が cutset を持たない場合, すなわち G が完全グラフである場合には,G の toughness は $+\infty$ と定める.

2 個のグラフ G, H が与えられたとき,G のある部分頂点集合 S が存在して, S が誘導するグラフが H に同型であるとき,G は H を誘導部分グラフとして含むといい, G が H を誘導部分グラフとして含まないとき G は $H-$free であるという. また, グラフ H の代わりにグラフの集合 $\mathcal{H}$ を取った場合も同様に, G が $\mathcal{H}$ に属する任意のグラフを誘導部分グラフとして含まないとき G は $\mathcal{H}-$free であるという. また, グラフの集合 $\mathcal{H}$ と正整数 k に対して, 記号 $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ で $k-$ 連結 $\mathcal{H}-$free グラフ全体の集合を表すことにする. 以降では $\mathcal{H}-$free の形で書ける条件を禁止条件と呼ぶ. また以降では単にグラフがグラフを含むといった場合, 誘導部分グラフとして含むことを意味することとする.

グラフの性質 P が与えられたとき,P を満たすために都合の悪い局所構造を全て禁止す

ればそれは P を導く十分条件となるであろうという期待は自然である．このため, 各種 factor の存在やハミルトン閉路の存在などグラフ理論の中で重要とされる性質に対しその十分条件となるような禁止条件を具体的に提示する試みは多く行われており, そのような形の命題を記した論文は非常に多い．以下にその例として 2 つの定理を挙げる．

定理 1 (Duffus, Gould, Jacobson) *2-連結 $\{K_{1,3}, N_{1,1,1}\}$-free グラフはハミルトン閉路をもつ．*

定理 2 (Bedrossian) *2-連結 $\{K_{1,3}, N_{0,1,2}\}$-free グラフはハミルトン閉路をもつ．*

ここに,$N_{1,1,1}, N_{0,1,2}$ は図 1 に示したようなグラフである．

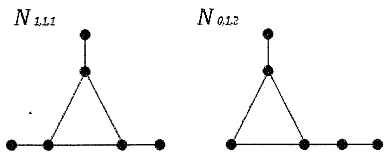

図 1: $N_{1,1,1}, N_{0,1,2}$

しかしながら, 他の性質との関係性を離れ, 禁止条件から定まる集合がどのようなものか, その間にいかなる包含関係があるかという問いを考えると, これに関して現時点で分かっていることは少ない．そのため諸性質に対する十分条件を与えるという研究においても, 仮定となる禁止条件を強く選びすぎたために仮定を満たすグラフがごく少ない命題が主張される, 2 つの禁止条件が定める集合の間にほぼ包含関係があることに気付かないまま独立に証明がなされて二度手間となるといった問題が発生していた．実際に, 定理 1 および定理 2 に関して,Furuya らによって $\{K_{1,3}, N_{0,1,2}\}$-free かつ $N_{1,1,1}$ を含むグラフがごく限られた形のものしか存在しないことが示され, 定理 1 および定理 2 の仮定部分に事実上の強弱関係があることが示された．

このような背景があるゆえに,$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ 間の包含関係, 言い換えれば禁止条件の強弱関係を明らかにすることが禁止グラフに関する研究をするにあたり重要な問題となっている．

この観点に基づき本論文の前半部分では,$K_{1,3}-$free と同等な強さをもつ禁止条件について考察した. ただしここで禁止条件が同等の強さを持つとはそれらが定める集合 $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ 同士の対称差が有限集合となることをいう．$K_{1,3}-$free グラフは多くの良い性質を持つため,$K_{1,3}-$free という条件は多くの研究の興味の対象となっている．この論文では特に,$\mathcal{H}^+_{K_{1,3}}$ を位数 5 かつ $K_{1,3}$ を含むようなグラフ全体からなる集合とするとき, $\mathcal{H}^+_{K_{1,3}}$ の部分集合 $\mathcal{H}$ であって $\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) \triangle \mathcal{G}_k(K_{1,3})$ が有限集合となるものを k の値ごとに完全に決定した (具体的な分類結果は非常に長くなるのでここでは省略する).

この証明にあたっては $\mathcal{H}$ を大きくとれば対称差が有限集合になるという十分性と $\mathcal{H}$ をある程度大きくとらなければ対称差は無限集合になるという必要性の両方を示す必要がある．十分性を示す際には, 与えられた $\mathcal{H}$ に対し,$K_{1,3}$ は含むが $\mathcal{H}$ の元はいずれも含まないようなグラフの構造を考える．一例として,$K_{1,3}$ は含むが $\mathcal{H}^+_{K_{1,3}} \setminus \{K_{2,3}\}$ の元はいずれも含まないような連結グラフの構造を $K_{1,3}$ 周辺の構造から具体的に決定していくと, $K_{1,3}$ 周辺の構造が $K_{2,3}$ 以外とれないという制約が強く, そのようなグラフは $K_{1,3}, K_{2,3}$ および $K_{3,3}$ しか存在しないことが分かるため, 以下が成立する．

命題 3 任意の正整数 k に対し $\mathcal{G}_k(\mathcal{H}^{+}_{K_{1,3}} \setminus \{K_{2,3}\}) \triangle \mathcal{G}_k(K_{1,3})$ は有限集合である.

このような証明を $\mathcal{H}$ ごとに行うことで十分性が証明される. また, 必要性は与えられた $\mathcal{H}$ に対し対称差に属するグラフからなる無限系列 $\{H^m\}$ を具体的に構成することにより証明される.

本論文の後半部分では禁止条件と連結度,toughness に関する定理を記述する. 連結度と toughness との関係については, 以下のことが知られている.

命題 4 完全グラフでないグラフGに対し $\mathrm{tough}(G) \geq \mathrm{conn}(G)/2$ が成立する.

この命題は, 高い toughness をもつグラフは必然的に連結度も高くなることを意味する. しかし逆に高い連結度は必ずしも高い toughness を導かないことが知られている (任意に高い連結度と任意に低い toughness をもったグラフが無限に存在する). ここで連結度が高いが toughness が低いグラフの構造に着目すると, 以下の定理が証明される.

定理 5 k を正整数,r を $r > 1$ なる実数とする. $k-$ 連結グラフ G が $\mathrm{tough}(G) < k/r$ を満たすならば G は $K_{1,\lfloor r \rfloor+1}$ を誘導部分グラフを含む.

この命題の対偶として,star-free 性の下では高い連結度が高い toughness を保証することが導かれる. これ自身も意味のある結果と思われるが, 禁止条件を研究する観点で見て興味深い問題は, この star-free という条件が「高い連結度が高い toughness を保証する」という結論を得るために最良なのか否かという点である. そこで, 以下のような問題が考えられる.

問題 6 k を正整数,r を $r > 1$ なる実数とする. $\mathcal{H}-$*free* $k-$ 連結グラフ G で $\mathrm{tough}(G) < k/r$ なるものが有限個となるような $\mathcal{H}$ はどのようなものか.

この問題に対し,Ota らが以下の定理を証明している.

定理 7 (Ota, Sueiro) r を $r \geq 2$ なる実数とし,H を連結グラフとする. H が $H \prec K_{1,\lfloor r \rfloor+1}$ を満たすとき, そしてそのときに限り,$H-$*free* 連結グラフ G で $\mathrm{tough}(G) < 1/r$ なるものは有限個である.

この定理は先の問題に対し, 連結度に関する k の値を 1 とした場合の部分的な解答を与えたものとなっている. 本論文の後半部分で述べる定理はこれの高連結度版にあたるものであり, その内容は以下の通りである.

定理 8 整数 k と実数 r が $r \geq k \geq 2$ を満たすとし,H を連結グラフとする. 条件「ほとんどすべての $H-$*free* $k-$ 連結グラフ G について $\mathrm{tough}(G) > k/r$ となる」が満たされるのは H が $K_{1,\lceil r \rceil}$ に含まれる場合に限られる.

定理 9 整数 k と実数 r が $r \geq k \geq 2$ を満たすとし,$\mathcal{H}$ を連結グラフからなる *2*元集合とする. 条件「ほとんどすべての $\mathcal{H}-$*free* $k-$ 連結グラフ G について $\mathrm{tough}(G) > k/r$ となる」が満たされるのは $\mathcal{H}$ に属するグラフのいずれかが $K_{1,\lceil r \rceil}$ に含まれる場合に限られる.

ここに,「ほとんどすべての」という言葉は「有限個の例外を除き」を意味する. これらの定理は「高い連結度が高い toughness を導く」という結論に対し, 禁止するグラフの個数が 2 個以下であれば star を禁止する必要があることを主張している.

これらの定理の証明方針は, 無限系列の構成による. まず以下の命題を用意する.

命題 10 $k-$ 連結かつ $\mathrm{tough}(G) < k/r$ を満たすグラフからなる *3* 個の無限系列 $\{H_1^m\}, \{H_2^m\}$, $\{H_3^m\}$ であって, 異なる系列に属する *2* 個のグラフに共通して含まれるグラフは $K_{1,\lceil r \rceil}$ の誘導部分グラフに限られるようなものが存在する.

命題の証明は, K_3 も $K_{2,2}$ も含まずかつ最大次数が $\lceil r \rceil$ 以下であるようなグラフからなる無限系列 $\{H_3^m\}$ を構成することが中心となる. このような $\{H_3^m\}$ が構成されれば, $\{H_1^m\}$ として完全 2 部グラフからなる無限列をとり, $\{H_2^m\}$ として $\{H_1^m\}$ を少し変形したものをとることによって命題 10 の証明が完成する. $\mathcal{H}$ が 2 元からなるとき, その両方が $K_{1,\lceil r \rceil}$ に含まれなければ, 命題における 3 個の無限系列 $\{H_i^m\}$ のうち少なくとも 1 つは $\mathcal{H}$-free なグラフを無限個含む. すると $k-$ 連結かつ $\mathrm{tough}(G) < r/k$ なる $\mathcal{H}$-free グラフが無限個得られたことになるため, 背理法により $\mathcal{H}$ のいずれかが $K_{1,\lceil r \rceil}$ を含むことが証明される.

以上のように, 禁止条件そのものに重点を置いた研究におけるいくつかの定理を証明したのが本論文の内容である.

論文審査の結果の要旨

本論文は禁止部分グラフ条件に関するものである. 本論文では有限無向単純グラフのみが扱われているので, ここでは, そのようなグラフを単にグラフとよぶことにする. グラフGと連結グラフの集合$\mathcal{H}$に対し, Gが$\mathcal{H}$-フリーであるとは, Gが, $\mathcal{H}$に属するどのグラフも誘導部分グラフとして含まないことをいい, $\mathcal{H}$-フリーという形に表される条件を禁止部分グラフ条件とよぶ. 整数$k \geq 1$と連結グラフの集合$\mathcal{H}$に対し, k-連結$\mathcal{H}$-フリーグラフ全体の集合を$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$で表す. 本論文では, $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$が与えられた性質をもつような$\mathcal{H}$を特徴付ける問題が扱われている.

第 1 章は準備である. 第 2 章では, 与えられたグラフHに対し, $\mathcal{G}_k(\{H\})$と$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$の対称差が有限集合になるような$\mathcal{H}$に関する問題が考察されている. この問題は, $H = K_{1,3}$の場合が特によく研究されてきているが, 既存の研究は大部分が$k = 1$の場合に関するものである. 本論文では, $\mathcal{H}^+_{K_{1,3}}$を, $K_{1,3}$を誘導部分グラフとして含む位数 5 の連結グラフ全体の集合として, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^+_{K_{1,3}}$という制約のもとで, 各$k \geq 1$に対し, $\mathcal{G}_k(\{K_{1,3}\})$と$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$の対称差が有限集合になるような$\mathcal{H}$の完全な特徴付け, つまり, そのような$\mathcal{H}$の完全なリストが得られている. 証明手法は標準的なものではあるが, $k \geq 2$の場合の, リストに挙げられている$\mathcal{H}$に対して$\mathcal{G}_k(\{K_{1,3}\})$と$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$の対称差が有限集合になることの証明における, $k \geq 2$であることの利用方法に, 本論文の提出者の工夫が見られる.

第 3 章では, グラフのタフネスに関する性質が考察されている. グラフGのタフネス $\mathrm{tough}(G)$は, $\min\{|S|/(G-S\text{の成分数})\,|S\text{は}G\text{の切断集合}\}$により定義される. グラフ$G$のタフネスは$G$の連結度によって上から抑えられることはよく知られている. 一方, $k \geq 1$を整数, $r \geq k$を実数とするとき, Hを$K_{1,\lceil r \rceil}$の連結な誘導部分グラフとすると, $\mathcal{G}_k(\{H\})$に

属する任意のグラフGに対して，tough(G)が，tough$(G)>\frac{k}{r}$と，kによって下から抑えられることは容易にわかる．そこで，逆に，連結グラフHに対し，$\mathcal{G}_k(\{H\})$に属する任意のグラフが tough$(G)>\frac{k}{r}$をみたせば，Hは$K_{1,\lceil r\rceil}$の誘導部分グラフになるかという問題が研究されており，$k=1$の場合は解決済みである．本論文では，$k\geq 2$の場合の解決が得られており，より強く，“有限個の例外を除いて$\mathcal{G}_k(\{H\})$に属するグラフGが tough$(G)>\frac{k}{r}$を満たせば，Hは$K_{1,\lceil r\rceil}$の誘導部分グラフである”という結果が証明されている．さらに，“$\mathcal{H}$を$|\mathcal{H}|=2$であるような連結グラフの集合とするとき，有限個の例外を除いて$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$に属するグラフ$G$が tough$(G)>\frac{k}{r}$を満たせば，$K_{1,\lceil r\rceil}$のある誘導部分グラフが$\mathcal{H}$に属する”という結果も証明されている．証明は，$r=k$の場合がもっとも複雑で，証明の要点は，各点の次数がkで 3 角形も 4 角形ももたないk-連結グラフGで，tough$(G)\leq 1$をみたすようなものの無限列の存在を示すことにある．この目的のため，提出者は，各点の次数がkで 3 角形も 4 角形ももたないk-連結グラフFと同型なグラフ$F_1, F_2, \ldots$をいくつか用意し，各F_iから何本か辺を除去した上で，それらをつなぎ合わせることにより，所望のグラフGを構成するという手法を用いている．この手法は，提出者の創意によるものであり，きわめて独創的である．また，各F_iから辺を除去したためにGがk-連結であることの証明が難しくなっているが，提出者は，巧妙な辺の除去方法を採用することにより，この難点を克服している．

以上のように，本論文の提出者は，一般の$k\geq 2$に対し，第２章において，$\mathcal{G}_k(\{H\})$と$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$の対称差が有限集合になるような$\mathcal{H}$に関する結果を証明し，第 3 章において，$|\mathcal{H}|\leq 2$であり，かつ，有限個の例外をのぞいて$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$に属するグラフ$G$が tough$(G)>\frac{k}{r}$をみたすような$\mathcal{H}$の特徴付けに成功している．証明にも，第 3 章における所望のグラフの構成法など，独創的なものがある．これらがグラフ理論に寄与するところは大きく，よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値があるものと認める．