Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos

Luz Edith Valoyes Chávez[1]

Resumen. En este artículo se presentan los resultados del análisis de los documentos curriculares colombianos, para identificar la representación del álgebra escolar en dichos documentos. Se utiliza para ello tanto conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, así como su noción de álgebra escolar. En esta perspectiva, el álgebra se considera fundamentalmente como una técnica matemática, cuyo uso sistemático en el proceso de estudio genera procesos de modelación algebraica de las matemáticas escolares. El principal resultado del análisis didáctico realizado muestra dos rasgos dominantes de la representación del algebra: su consideración como un sistema simbólico útil para representar los sistemas conceptuales y su vínculo casi que exclusivo con la aritmética, determinando el carácter prealgebraico de las matemáticas en el currículo del país.

Palabras clave: Algebra escolar, Análisis Curricular, Modelación Algebraica, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Abstract. I discuss the main findings of a study aimed to analyze the representation of school algebra within the Colombian curriculum. Theoretical constructs and methodological tools from the Anthropological Theory of Didactics are used to identify dominant discourses concerning the teaching and learning of algebra in the Colombian educational system. In this study, school algebra is considered as a mathematical technique useful in the process of study of different mathematical organizations; the progressive use of this technique in the process of solving problems leads to the algebraic modeling of the school mathematics. The main findings reveal two dominant characteristics of the school algebra in Colombia: first, school algebra is identified with a symbolic system useful to represent conceptual systems. Second, it is assumed a natural continuity between arithmetic and algebra and in this sense algebra is a generalized arithmetic. Didactical consequences of such representation of algebra are discussed.

Key words: School algebra, Curricular Analysis, Algebraic Modeling, Anthropologic Theory of Didactics.

[1] Magister en Educación, Énfasis en Educación Matemática. Candidata a Doctora en Educación Matemática. Graduate Research Assistant, College of Education, Learning, Teaching, and Curriculum Department, Universidad de Missouri, Estados Unidos. e-mail: levf44@mail.missouri.edu, evaloyes@gmail.com

Introducción

La investigación en didáctica del álgebra se ha desarrollado con la ausencia de consenso acerca de lo que es el álgebra (Kaput, 2008) y el uso de perspectivas teóricas que, aunque diversas y a veces contradictorias, han posibilitado la comprensión de los fenómenos que se presentan durante sus procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela. Es posible afirmar que, como resultado del dominio de perspectivas sicológicas y cognitivas en el campo de la educación matemática (Gascón, 1998), la investigación en didáctica del álgebra, en particular, se ha concentrado fundamentalmente en el estudio de las dificultades que los estudiantes experimentan cuando se enfrentan al aprendizaje de esta disciplina y a la construcción de propuestas de enseñanza tendientes a superarlas. La investigación en las perspectivas sicológicas y cognitivas ha posibilitado la identificación y caracterización de los conflictos que genera en los estudiantes la aparición de las letras y de los símbolos algebraicos (Booth, 1984; Janvier, 1996; Mason, 1999,); los procesos de construcción de nociones consideradas algebraicas, como las de variable e incógnita (Heid, 1996; Malissanni & Spagnolo, 2009; Graham & Thomas, 2000); el rol de los procesos de solución de problemas verbales en el aprendizaje del álgebra (Rojano, 1996; Van Ameron, 2003) y las dificultades en los procesos de solución de ecuaciones (Kieran, 1989, 1992).

En general, estos trabajos se han desarrollado desde una perspectiva según la cual la aritmética constituye la fuente fundamental para la construcción de significado de los objetos y conceptos algebraicos. En este sentido, tanto los procesos de aprendizaje como las dificultades que surgen durante dicho proceso se explican en términos de una supuesta continuidad conceptual entre la aritmética y el álgebra. Algunos de dichos estudios asumen que el aprendizaje del álgebra exige la transformación de los significados que los estudiantes han construido hasta ese momento para objetos matemáticos, como la igualdad y las operaciones. Gallardo y Rojano (1988), por ejemplo, se refieren al “corte didáctico” (p. 182) como el momento en el cual es preciso “romper” con nociones que funcionan en la aritmética, pero que deben *re*significarse para su utilización como herramientas algebraicas en la solución de problemas y de ecuaciones. Se plantea, de esta manera, cierta contraposición de las operaciones y los objetos algebraicos con las operaciones y objetos aritméticos, según la cual los primeros son “más abstractos” y “más alejados” de las experiencias de los estudiantes, mientras que los segundos se proponen como “más concretos” y “más útiles” en los procesos de formación matemática de los jóvenes. En este mismo sentido, las dificultades en el aprendizaje de los conceptos algebraicos se describen y explican exclusivamente en términos de la falta de conocimiento aritmético o de una fundamentación deficiente de éste en los estudiantes. Así, se presenta el álgebra como una especie de aritmética generalizada (Gascón, 1999).

Sin embargo, algunos investigadores han señalado dificultades en dicha conceptualización. Charbonneau (1996), por ejemplo, afirma que “la historia nos previene acerca de considerar el álgebra simplemente como una extensión de la aritmética" (p. 34, según traduzco). Con base en resultados del análisis histórico sobre el surgimiento del simbolismo algebraico, Charbonneau concluye que, en el caso del álgebra, es posible identificar raíces tanto aritméticas, provenientes de las prácticas comerciales adelantadas por los mercaderes en Italia y Francia durante los siglos XIV y XVI, como raíces geométricas, que pueden rastrearse en los trabajos de Chuquet, quien utiliza métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, o en los trabajos de Descartes. Entonces, deduce Charbonneau que "el álgebra no es *sólo* una extensión del dominio numérico" (p. 34, según traduzco). Por su parte, Radford (1996) analiza los métodos que utilizaron los babilonios para resolver problemas geométricos y concluye que, en sus trabajos, es posible identificar una "geometría del corte y pegue" (*cut-and-paste geometry*) fuertemente vinculada con la emergencia del álgebra (p. 41).

En trabajos más recientes, y al tomar como punto de partida esta postura que cuestiona el vínculo exclusivo entre álgebra y aritmética, distintos investigadores han introducido problemas geométricos como puntos de partida para la significación de los objetos y conceptos algebraicos por parte de los estudiantes. Dougherty (2008), por ejemplo, utiliza tareas de razonamiento cuantitativo para iniciar a estudiantes en el uso del simbolismo algebraico y la comprensión del concepto de función. Por su parte, Ruthven (2003) utiliza tareas geométricas en contextos computacionales para promover el aprendizaje de conceptos y procedimientos algebraicos en estudiantes de grado octavo.

En esta misma línea de investigación, que explora otras formas de concebir el álgebra y de generar procesos de significación de sus objetos y conceptos, Radford (2002) propone el álgebra como una *tekhnē* (p. 33) o herramienta útil en la solución de problemas (ibíd., p. 33), tal y como lo afirma en el siguiente apartado:

> En nuestro enfoque, la conceptualización del álgebra como una herramienta de solución de problemas debe entenderse en el sentido aristotélico de la *tekhnē,* es decir, un trabajo reflexivo sobre ciertos objetos en el curso del cual el conocimiento intelectual llega a entretejerse dialécticamente con las acciones laboriosas sobre los objetos. Más precisamente, nuestro enfoque del álgebra como una herramienta de solución de problemas implica el desarrollo de una técnica analítica basada en un pensamiento matemático conceptualmente complejo que subyace al cálculo de números o magnitudes conocidas y por conocer, las cuales adquieren significado en la medida en que se manipulan con el propósito de alcanzar el objetivo de la actividad (p. 33, según traduzco).

La anterior discusión no es más que la expresión de la ausencia de consenso en la comunidad académica acerca de lo que es el álgebra y acerca de la forma de interpretar su constitución histórica, discusión que se remonta a los siglos XVI y XVII, cuando hizo su aparición en una forma muy cercana a como se la conoce ahora. Al analizar la forma como se recibió este "nuevo arte" (Panza, 2006) entre los matemáticos de la época y después de la aparición de los trabajos de Vieta y Descartes, Massa (2001) señala que:

> El álgebra obligó a replantear los límites entre las distintas disciplinas matemáticas. Podríamos preguntarnos: ¿Era una ciencia o un arte? ¿Se consideraba el álgebra como una parte de las matemáticas? ¿Era la aritmética superior al álgebra? ¿En qué ámbitos la geometría era más eficaz o necesaria? ¿En cuáles lo era el álgebra? No todos los matemáticos aceptaron y aplicaron el álgebra como una parte nueva de las matemáticas. Unos la ignoraron, unos pocos la aceptaron y la usaron, otros la introdujeron intentando fundamentarla en la geometría de los antiguos y también hubo quienes la rechazaron totalmente (p. 7).

Perspectiva Teórica

Para la investigación en didáctica de las matemáticas, la anterior discusión no es trivial. En la perspectiva del *Enfoque Epistemológico* (Gascón, 1998), se considera que, para tratar científicamente los fenómenos que se presentan en los procesos institucionales de comunicación del saber matemático, "es preciso disponer de un *modelo explícito de la actividad matemática escolar* en el que se modelicen, en particular, el 'álgebra escolar', la 'aritmética escolar', la 'geometría escolar', la 'proporcionalidad', etc." (Gascón, 1998, p. 14). Los modelos explícitos del saber matemático o *Modelos Epistemológicos de Referencia* (MER) cumplen un papel fundamental en los procesos de investigación en el campo. por varias razones: en primer lugar, constituyen un determinador tanto de las problemáticas consideradas como de las interpretaciones que se realicen de la actividad matemática bajo análisis; en segundo lugar, le permiten al investigador tomar distancia de las instituciones objeto de estudio; finalmente, lo dotan de herramientas teóricas y metodológicas para analizar y describir los fenómenos didáctico-matemáticos en dichas instituciones. Así, en el estudio que presento, ante la pregunta ¿Qué es el álgebra?, la respuesta se construye tomando como base la noción de *técnica matemática* que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Las Técnicas Matemáticas y su Papel en la Generación de Conocimiento Matemático

En la perspectiva teórica de la TAD, se considera que "toda actividad resulta de la puesta en práctica de una técnica" (Bosch, 1994, p. 22). En particular, la actividad matemática (relativa a hacer matemáticas) consiste fundamentalmente en la producción, utilización y transformación de técnicas matemáticas que posibiliten el estudio y posible solución de cuestiones o problemas en una institución. La dinámica que generan estos procesos de estudio y solución es lo que realmente contiene la esencia de la actividad matemática como tal. Para desarrollarlos es necesaria la utilización de técnicas que son, en lo fundamental, formas de realizar las tareas que demandan estos procesos, incluyendo desde aquellas técnicas que se consideran como algorítmicas, hasta las que no lo son. Habitualmente, el proceso de estudio de problemas conduce a cuestionar la efectividad e incluso el alcance de las técnicas, lo que generalmente moviliza el desarrollo y la producción de otras con las que se pueda "avanzar" en dicho proceso. Gascón (1993) alude a la dinámica de *la ecología* de las técnicas en términos de la importancia que representan para la consolidación de una disciplina, en particular de las matemáticas:

> Es el desarrollo de las técnicas el que engendra la evolución dinámica de una disciplina y, por tanto, todo modelo específico del desarrollo de un ámbito del conocimiento matemático debe apoyarse en el análisis de las técnicas que utiliza, de los campos de problemas producidos en el desarrollo de dichas técnicas y de los "materiales" que los constituyen (p. 303)

La dinámica tanto de la utilización de técnicas como de la producción de nuevas genera, en primer lugar, la necesidad de justificar su pertinencia en relación con los problemas que permiten o no solucionar; en segundo lugar, es necesario el desarrollo de los elementos conceptuales que permitan explicitar sus características y naturaleza. Este momento, que comprende el esfuerzo intencional de justificación, explicación y generación de nuevas técnicas, es fundamental porque conduce al desarrollo y avance teórico en el campo de las matemáticas.

En este sentido introduzco la noción de álgebra en este trabajo. El álgebra es, en esencia, como una técnica matemática que posibilita el proceso de estudio de distintos campos de problemas (Chevallard, 1989; Bolea, 2003), que generan la algebrización progresiva de las matemáticas, tal y como lo describo en el siguiente apartado.

Un Modelo Epistemológico de Referencia para el Álgebra Escolar

Es esta perspectiva, el álgebra se considera, en principio, como una *técnica matemática*, como "una 'manera de hacer' en matemáticas" (Gascón, 1999, p. 80) con la cual es posible llevar a cabo el proceso de estudio de *distintos* campos de problemas matemáticos, ya sean aritméticos, geométricos, estadísticos, etc. En tanto una técnica matemática, el álgebra escolar se identifica con "un nuevo modo de producción de conocimientos matemáticos" (Bolea, Bosch & Gascón, 2001), con un instrumento que los sistemas educativos ponen al servicio de los maestros y de los estudiantes para que lleven a cabo el proceso de estudio de cualquiera de las organizaciones matemáticas[2], independientemente de la naturaleza de los objetos de los que se ocupan.

Dos elementos caracterizan a la técnica algebraica: su primer elemento orgánico remite al carácter analítico, considerado generalmente por historiadores y didactas del

2. Una Organización Matemática o Praxeología es un modelo de organización tanto del saber matemático como de la actividad matemática. Así, en las organizaciones matemáticas es posible identificar un bloque práctico-técnico o praxis, constituido por campos de problemas, y las técnicas que permiten resolverlos, y un bloque tecnológico - teórico o logos, que contiene los discursos teóricos que describen, analizan y justifican tanto los problemas como las técnicas.

álgebra como su elemento definitorio. Este carácter equivale a un modo de razonamiento o *procedimiento heurístico* (Lakatos, 2002) que se fundamenta en la suposición de que el problema se encuentra resuelto y, por tanto, "lo desconocido" *existe y es obtenible* (Gascón, 1993), lo que, a través de una cadena causal, conduce a "lo dado", con lo que posibilita, en primera instancia, la designación del objeto desconocido mediante el uso de letras y se logra, de esta manera, explicitar e instrumentalizar las relaciones causales entre incógnitas y datos para alcanzar una ecuación que represente las condiciones del problema y que posibilite su manipulación sintáctica. Tal designación constituye el segundo elemento orgánico de la técnica algebraica y, en este sentido, se distingue fundamentalmente por apelar a la escritura, por constituir un registro escrito, donde el uso de las letras, para designar tanto las incógnitas como los datos, genera la posibilidad de identificar y manipular las relaciones de dependencia entre ellos; el proceso descrito tiene como propósito principal la obtención de formas canónicas de los campos de problemas que produce, como resultado, una unificación alrededor de su estructura, representada mediante el simbolismo algebraico.

Necesariamente, para llegar a identificar estas estructuras debe producirse la designación literal *tanto de lo desconocido como de lo dado*. Al respecto Bolea, Bosch y Gascón (2001) caracterizan esta relación entre las incógnitas y los parámetros en términos de "considerar los primeros como objetos conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos, y las segundas como objetos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos" (p. 256). Así, pues, las anteriores condiciones posibilitan la búsqueda de reglas generales de solución para los campos de problemas que permiten, además de encontrar las incógnitas, identificar sus características estructurales, las relaciones entre ellas y sus condiciones de existencia.

La anterior discusión nos permite diferenciar dos niveles sustancialmente distintos en la actividad matemática que es posible llevar a cabo con el álgebra. Al considerar que, en el proceso de estudio de los campos de problemas, la designación con literales incluye sólo las incógnitas, la expresión generada es una ecuación *particular* relativa a unas condiciones específicas de los problemas estudiados; tal proceso conduce a la manipulación sintáctica de dicha expresión, con el correspondiente hallazgo de soluciones individuales. Este primer tipo de actividad, o cálculo ecuacional, se centra fundamentalmente en los aspectos manipulativo-sintácticos de los problemas y se reduce sólo a encontrar el valor de la incógnita y, como su nombre lo indica, a la sistematización de técnicas resolutorias de ecuaciones aisladas, pero cuando en el proceso de estudio de los campos de problemas la designación incluye incógnitas y datos, la actividad que se genera produce como resultado principal un *modelo algebraico* de la organización matemática estudiada; tal actividad, que va a llamarse "modelación algebraica", permite identificar la estructura de los campos de problemas, su representación y manipulación mediante el simbolismo algebraico y el encuentro y caracterización de las soluciones generales y sus condiciones de existencia, lo que produce un enriquecimiento de los conocimientos relativos a la organización matemática estudiada.

La diferenciación de estos dos “niveles” de desarrollo de la actividad algebraica es fundamental. Chevallard (1989), por ejemplo, plantea que la ausencia de los parámetros en la escuela y el énfasis en las técnicas de solución de ecuaciones produce una automatización de las fórmulas y una reducción de la actividad algebraica a la mera manipulación sintáctica de ecuaciones y de expresiones algebraicas. Y aunque este tipo de tareas es importante en el ámbito de la escolaridad, es notable el empobrecimiento conceptual que se produce al limitar la actividad algebraica única y exclusivamente a este tipo de tareas.

En conclusión, un modelo algebraico aumenta la comprensión acerca de los aspectos conceptuales y estructurales de las organizaciones matemáticas modeladas en tanto arroja un conocimiento que no era, dígase, “visible”. Lo anterior no es más que la confirmación de la consideración que sobre los modelos se realiza en el contexto de la TAD y según la cual “la metáfora adecuada para los *modelos matemáticos* es la de ‘máquina’ o ‘instrumento’ útil para producir conocimientos relativos al sistema modelizado” (Gascón, 2002). Por tanto, el principal resultado del uso de la técnica algebraica en los procesos de estudio de las organizaciones matemáticas es la producción de nuevos conocimientos sobre dichas organizaciones. Como se discutió anteriormente, la técnica algebraica *es* un “nuevo modo de producción de conocimientos” (Bolea, Bosch & Gascón, 2001). De esta manera, la modelación algebraica en la escuela se caracterizará fundamentalmente por los siguientes aspectos:

- Modela todos los elementos de la organización matemática original, o sea sus campos de problemas, técnicas y discursos teóricos; se produce, en este sentido, una nueva organización matemática algebrizada modelo algebraico de la inicial.
- Modela *materialmente* las técnicas y los campos de problemas de la organización matemática original, en el sentido en que se representan y manipulan mediante el simbolismo algebraico.
- El modelo algebraico que resulta constituye una extensión de la organización matemática original, en tanto la contiene y la enriquece conceptualmente.

La modelación algebraica avanza en dos niveles, que pueden pensarse en términos de una metáfora espacial: horizontal y verticalmente. Horizontalmente, porque conduce a la unificación de organizaciones matemáticas de distinta naturaleza mediante un único modelo algebraico que permite tratarlas de la misma forma; es decir, con los mismos dispositivos técnicos y tecnológico-teóricos, pero, además, avanza en una dirección vertical, ya que el modelo algebraico que se obtiene, en principio, es susceptible de un nuevo proceso de estudio, que eventualmente puede incluir el uso del instrumento algebraico y que, por tanto, producirá como resultado un modelo algebraico “más robusto”. En este sentido, se plantea una algebrización progresiva de las matemáticas en la escuela y supone, entonces, la práctica sistemática de construir modelos algebraicos de las diversas organizaciones matemáticas escolares y la problematización de estos modelos para producir otros nuevos.

Si se aceptan las consideraciones anteriores, entonces será posible encontrar en la institución escolar organizaciones matemáticas con distintos niveles de algebrización e incluso preguntar:

- Teniendo en cuenta el modelo del álgebra que se propone en los documentos curriculares colombianos, ¿en qué condiciones es posible llevar a cabo procesos de modelación algebraica en las instituciones escolares?
- ¿Cuál es el modelo dominante del álgebra en el Sistema Educativo Colombiano? ¿De qué forma dicho modelo condiciona la existencia de procesos de modelación algebraica en las instituciones escolares colombianas?

Estas preguntas orientaron el estudio que se aborda en este artículo y cuya metodología y resultados se presentan a continuación.

Metodología

La TAD plantea que cualquier análisis de los fenómenos didáctico-matemáticos en una institución debe iniciarse con el análisis de la actividad matemática tal y como se ha cristalizado en un momento histórico determinado, para posteriormente llevar a cabo el análisis didáctico, aunque en este documento no se presentan los resultados del primer tipo de análisis que se propone y que consistió fundamentalmente en la validación del MER a partir de los datos históricos (Ver Malagón, 2008; Malagón & Valoyes, 2011; Valoyes, 2008).

Para dar respuesta a las preguntas que orientaron la investigación, utilizo el MER del álgebra descrito anteriormente como el principal instrumento de análisis que, además, permitió tomar distancia de la institución a analizar. Como elementos donde se expresan los hechos didáctico-matemáticos empíricos, tomo como objetos de estudio los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En el desarrollo del estudio, fue necesario incluir como un nuevo objeto de análisis los Marcos Generales de la denominada “Renovación Curricular”, debido a sus estrechos vínculos con los documentos curriculares vigentes.

Con dicho instrumento se realiza el análisis que, en este caso, consistió en la contrastación empírica del MER con los documentos curriculares anteriormente mencionados. A continuación se presentan los principales resultados.

Resultados

Los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1998) para el área de Matemáticas proponen la organización del saber matemático mediante la noción de sistema, cuya función principal es potencializar el desarrollo del pensamiento matemático, objetivo último de la formación escolar. Así, a cada uno de los cinco tipos de pensamiento matemático propuestos se le asigna un sistema, sobre el que se soporta y que contribuye a su desarrollo. Los sistemas numérico, geométrico, métrico o de medidas, de datos y los algebraicos y analíticos contribuirán al desarrollo de los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, respectivamente.

En el documento, la primera referencia al álgebra sostiene que "(…) se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio" (MEN, 1998, p. 33). Así, se asigna al álgebra un doble papel: en principio, se vincula a lo aritmético como un instrumento para generalizar los resultados que se obtienen en el campo numérico; después, se propone como una herramienta para modelar fenómenos de variación y cambio. La forma como se produce "el paso" de instrumento de generalización a herramienta de modelación no se enuncia en el documento. Igualmente, en los Lineamientos se afirma que el estudio del álgebra debe involucrar, entre otros aspectos:

> (…) el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medios de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de las relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos estos propios del pensamiento variacional (p. 33).

La anterior referencia confirma, de manera particular, los vínculos de "lo algebraico" con "lo variacional"; de hecho, el álgebra, "en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica" (MEN, 1998, p. 72), forma parte de los *núcleos conceptuales* matemáticos en los que se involucra la variación. Así, el álgebra se presenta como *uno de los sistemas simbólicos para representar y manipular el sistema conceptual del pensamiento variacional*[3], pero, también, en tanto sistema matemático asociado al pensamiento variacional, constituye un objeto de estudio en sí mismo, con sus objetos, relaciones y operaciones. En esta forma, se tiene una doble faceta del álgebra: como sistema simbólico y como sistema matemático.

De la anterior discusión se puede concluir que, en el análisis, comprensión y descripción de la representación del algebra en los Lineamientos, la noción de *sistema matemático* es central. Esta noción, heredada del discurso propuesto en los *Marcos Generales* (MEN, 1984) correspondientes a la llamada "Renovación Curricular" de

[3] Se señala que es "uno" de los sistemas simbólicos, porque se proponen otros, como las tablas, las gráficas cartesianas, los enunciados verbales, etc.

los años 80's, hace parte de un discurso más general, que se sitúa en "una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos" (MEN, 1984, p. 9). El discurso al que se alude es el *Enfoque General de Sistemas*, cuya noción central se incorpora en esta propuesta curricular con dos finalidades centrales: modelar el saber matemático e introducir una metodología de enseñanza de esta disciplina.

De acuerdo con el documento, un sistema se define como "un conjunto de objetos, con sus operaciones y sus relaciones" (p. 9); en el caso de las matemáticas, es posible identificar, en todas sus "ramas" (p. 11), una gran variedad de sistemas, como, por ejemplo, el de los números enteros, con las operaciones de suma y resta y las relaciones de orden; o, en la geometría, el conjunto de las rectas, con las operaciones de rotación y traslación y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. De esta manera, todo sistema matemático se puede modelar como un *conjunto de conjuntos*; es decir, mediante una tripla $\{\mathbf{A}, \Omega, \mathbf{R}\}$, donde **A** representa el conjunto de objetos, Ω el de operaciones y **R** el de relaciones.

Así, la noción clave, que se encuentra en el núcleo del concepto de sistema, además de las de objeto, relación y operación, es la de conjunto; según el documento, ni para ella ni para las demás hay definición posible, debido a que sólo se puede "(…) encontrar para cada una de estas palabras, una lista de sinónimos con diversas connotaciones" (MEN, 1984, p. 10). A pesar de lo anterior, en el documento se señala la importancia de centrar la atención en los sistemas como una totalidad y en las relaciones entre los elementos que los constituyen, de modo que se los pudiera llegar a caracterizar mediante *la estructura* de sus operaciones y sus relaciones.

Los Marcos Generales presentan tres tipos de sistemas como elementos integrantes de cualquier sistema matemático: los sistemas concretos, los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos. No se dice lo que es cada uno de estos "tipos" de sistemas, sólo se menciona que:

> Cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, *el que es verdaderamente importante*, que es el respectivo sistema conceptual. *Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual*. Y bajo ese sistema conceptual, a un nivel más profundo, casi diríamos, arcaico, aparecen varios sistemas concretos de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema conceptual [Énfasis agregado] (p. 27).

Los sistemas simbólicos, "ubicados a nivel superficial", *representan* los sistemas conceptuales y su principal función es la de "(…) encontrar resultados con la manipulación apropiada de los códigos, aumentado la rapidez y disminuyendo las posibilidades de equivocarse o, al menos, facilitando la corrección de los errores" (MEN, 1984, p. 76). Así, "un álgebra" es un *sistema simbólico* utilizado para *representar* los distintos sistemas conceptuales cuando son "maduros" y presentan limitaciones relativas a su manipulación. Por ejemplo, en la lectura introductoria a la Unidad II del Programa curricular de grado octavo, relativa al tema de funciones, denominada "Ecuaciones de primer y segundo grado: el manejo de expresiones algebraicas como símbolos de funciones", se señala que "cada rama de las matemáticas tiene su 'álgebra': sus sistemas simbólicos que permiten encontrar resultados con la manipulación apropiada (…)" (MEN, 1984, p. 76). En este caso, las expresiones algebraicas constituyen símbolos del sistema conceptual de las funciones. Existe, además, un álgebra para la lógica, un álgebra lineal para la geometría, un álgebra de conjuntos, etc. En particular, el "álgebra de grado octavo es uno de varios sistemas simbólicos que utilizamos para manejar las transformaciones sobre esos sistemas concretos que son los enteros y los fraccionarios" (MEN, 1984, p. 78). En este grado de la escolaridad colombiana, se encuentra un álgebra vinculada a lo numérico, cuya función es facilitar la operatividad de las relaciones y las transformaciones en los sistemas de números mencionados. En términos generales, en primer lugar, el álgebra *es* plural y, en segundo lugar, como sistema simbólico se ubica a "nivel superficial" de los sistemas conceptuales con el único fin de representarlos. El álgebra constituye "la apariencia" de los sistemas matemáticos y se introduce con fines puramente simplificadores: facilitar la manipulación sintáctica de los conceptos, de las operaciones y de las relaciones. En cuanto a la construcción de conocimientos matemáticos y en relación con el MER propuesto en este estudio, en el caso estudiado el papel del álgebra es secundario.

En la lectura que se está analizando, se propone, además, una metodología para la enseñanza de "las álgebras" coherente con la perspectiva metodológica general, que sugiere partir de los sistemas concretos a los conceptuales, para finalizar en los simbólicos. Así, en cuanto a la enseñanza del álgebra de los sistemas de los números enteros y fraccionarios, después de que sus sistemas conceptuales respectivos se han constituido bien, se procederá a la enseñanza de uno de sus sistemas simbólicos: el algebraico, que se va a introducir mediante adivinanzas mentales de números y se va a tratar de mostrar que la complejidad de estas adivinanzas va a obligar el recurso al álgebra, que simplificará la búsqueda del número o de los números solicitados y disminuirá la cantidad de errores posibles en el proceso.

Entre todas "las álgebras" mencionadas en los documentos se describe el "álgebra de los sistemas numéricos" y a su alrededor se conceptualiza, a pesar de que, por ejemplo, se menciona el álgebra lineal como el sistema simbólico de la geometría, este planteamiento no se desarrolla, a lo que habría que agregar un hecho notorio: el álgebra lineal no existe en el currículo propuesto por la Renovación Curricular. Este silencio sobre las "otras álgebras" permite resaltar el carácter marcadamente aritmético de "lo algebraico" en la propuesta curricular. Explícitamente, el Enfoque de Sistemas propuesto en la Renovación Curricular se retoma en los Lineamientos Curriculares[4] tal y como se aprecia en la siguiente afirmación:

[4] Y, algunos años después, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

> Los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas aquí propuestos toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, uno de los cuales es la socialización de un diálogo acerca del Enfoque de Sistemas y el papel que juega su conocimiento en la didáctica (MEN, 1998, p. 17).

Por lo demás, y en cuanto al tratamiento didáctico del álgebra, los Marcos Generales constituyen un referente claro para los Lineamientos, cuando en éstos se afirma que "Una propuesta didáctica para el tratamiento de las funciones está desarrollada en los Programas de la Renovación Curricular" (p. 74), cuya lectura introductoria para grado octavo y noveno se ha analizado en los párrafos anteriores[5].

Los Estándares Básicos de Competencias en el área de Matemáticas son más explícitos en cuanto a sus referencias al álgebra. Al conservar los planteamientos de los Lineamientos Curriculares y los que, en este documento, se heredan de la Renovación Curricular relativos a la organización del saber matemático, se sostiene, por ejemplo, que "en la educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con la variación es el sistema algebraico" (MEN, 1998, p. 67), que es "un potente sistema de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos" (MEN, 1998, p. 68). Quizá la aseveración más reveladora de la naturaleza del álgebra, contenida en este documento, sostiene que "De esta manera, el cálculo algebraico surge como una generalización del trabajo aritmético con los modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente" (MEN, 1998, p. 68). Es reveladora porque confirma los vínculos ya establecidos en la Renovación Curricular entre lo aritmético y lo algebraico y aporta evidencias más fuertes acerca del modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar.

Discusión

En contraste con el MER del álgebra escolar, en el que se resalta su carácter de técnica matemática o instrumento de modelación, en el sistema educativo colombiano el álgebra es *esencialmente* un sistema simbólico que representa los sistemas conceptuales matemáticos, que aportan en la constitución de su "apariencia". Y aunque se afirma que constituye un *instrumento* para modelar los fenómenos de variación y cambio, esta modelación, por las mismas connotaciones que adquiere en los Lineamientos, se refiere a la representación simbólica de tales fenómenos mediante las expresiones algebraicas; entre otras, las ecuaciones.

En esta misma perspectiva, gran parte de los discursos que se presentan en los documentos curriculares sugiere vincular exclusivamente el álgebra con la aritmética.

[5] En general, se afirma en los Lineamientos Curriculares que "(…) en este sentido, los programas de matemáticas de la Renovación Curricular que no tienen el carácter de currículo nacional, se constituyen en una propuesta que puede ser consultada por los docentes y utilizada para enriquecer el currículo" (MEN, 1998, p. 11).

Ejemplo de ello es la propuesta de introducir el álgebra a partir de la generalización de patrones aritméticos o la consideración del surgimiento del cálculo algebraico como resultado de la generalización del "trabajo aritmético", por mencionar sólo algunas de ellas. A partir de estos elementos es posible resaltar como un rasgo dominante del MER del álgebra escolar, en los documentos curriculares colombianos, el considerarla como una generalización de la aritmética.

¿Entonces, qué se puede decir de la actividad que es posible llevar a cabo con el álgebra? En cuanto al sentido del álgebra y su papel en el proceso de estudio de las matemáticas escolares, se espera que con su introducción en el proceso de formación matemática de los niños y jóvenes colombianos, puedan representar y manipular fácilmente los sistemas conceptuales relacionados fundamentalmente con los sistemas analíticos. Las funciones, transformaciones y operadores pasan a constituir, a partir de grado octavo, objetos de estudio del álgebra.

¿En qué sentido es posible hablar de modelación algebraica en el sistema educativo colombiano? En general, en los Lineamientos Curriculares, la modelación se propone como uno de los cinco procesos generales de pensamiento presentes en la actividad matemática[6], y no como una actividad matemática en sí misma, al definirla como "la forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas" (MEN, 1998, p. 97). La modelación *es* la actividad de construir modelos que "representan" una situación problemática y facilitan su manipulación y solución. En este mismo sentido, los Estándares incorporan esta noción de modelación y son más explícitos en cuanto a la forma de considerar un modelo, cuando afirman al respecto que uno de ellos "(…) puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible" (MEN, 2006, p. 52). Un modelo representa un fenómeno y, en este sentido, el papel asignado a los modelos es coherente con el que se le asigna en los documentos a las representaciones: constituyen una ayuda para la manipulación sintáctica de los fenómenos estudiados.

En los Estándares, se afirma, además, que "(…) todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, *como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo*" [Énfasis agregado] (MEN, 2006, p. 52). Aunque los elementos anteriormente discutidos conducían a pensar que las expresiones algebraicas, como objetos que representan fenómenos de variación y cambio, eran modelos, la última afirmación hace dudar y plantea varias preguntas, sobre todo porque no se profundiza en los aspectos que se plantean. Por ejemplo, ¿Cuándo las expresiones algebraicas no son modelos? En general, ¿cuándo una representación no es un modelo? En esencia, la modelación facilita la solución de un problema o de una situación problema, pero no necesariamente produce conocimientos nuevos relativos a ella, más allá del hecho mismo de encontrar dicha solución.

[6] Junto con la modelación, los cuatro procesos restantes son la resolución de problemas, la comunicación matemática, el razonamiento matemático y la ejecución de procedimientos de rutina.

En el MER del álgebra escolar, además de producir conocimientos nuevos acerca de la organización matemática objeto de estudio, la modelación algebraica es un proceso que posibilita la integración y la unificación de las matemáticas escolares y genera nuevos conocimientos relativos al sistema modelado. En el caso analizado, es poco factible que la modelación, tal y como ella se presenta, pueda conducir a esta unificación e integración; un hecho que lo confirma se expresa en la atomización de las matemáticas escolares en múltiples contenidos, como se evidencia en la organización propuesta en los Estándares. En este sentido, y en tanto el uso de la técnica algebraica posibilita la unificación de las matemáticas escolares, como se ha descrito previamente, dicha atomización constituye un rasgo del carácter prealgebraico de las matemáticas escolares en el sistema educativo colombiano.

Esta reducción del álgebra a instrumento de representación la despoja de su función epistémica, en la medida en que no es posible producir mediante su uso conocimientos nuevos relativos a las organizaciones matemáticas. Esta es quizá una de las principales restricciones a las que se enfrenta cualquier proceso de algebrización de las matemáticas escolares en el sistema de enseñanza en el país, pero, además, el carácter marcadamente aritmético del álgebra en los documentos considerados dificulta, en el caso de la geometría, cualquier posibilidad de acercamiento entre ellas: "lo algebraico" se vincula fuerte y exclusivamente con "lo aritmético", de manera que este rasgo adicional del álgebra escolar constituye a su vez un nueva restricción.

Sin embargo, es importante resaltar que el fenómeno de la persistente representación del álgebra como aritmética generalizada, no sólo en Colombia sino en otros sistemas educativos, se relaciona con las organizaciones curriculares en las cuales gran parte del tiempo de estudio se dedica a la aritmética; luego, ésta constituye una base sólida para la construcción del conocimiento algebraico. No obstante, es importante cuestionar las limitaciones y las consecuencias, en el aprendizaje de los estudiantes, de esta representación del álgebra en los sistemas educativos.

La anterior reflexión permite preguntarse: *¿Cómo afecta esta representación dominante del* álgebra *las prácticas docentes de los maestros colombianos? ¿Cómo se expresa en los dispositivos didácticos y en los discursos docentes dicha representación del álgebra? ¿Cuáles debieran ser las condiciones institucionales para que el álgebra, como técnica matemática, pueda subsisir y desarrollarse en el sistema educativo colombiano?* Esta es la dirección que creo debería tomar el análisis presentado en este documento.

Referencias

Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza. (Tesis doctoral no publicada).

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *21* (3), 247-304.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Bosch, M**.** (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. *El caso de la proporcionalidad*. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona. (Tesis doctoral no publicada).

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Geometry. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 55-63). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmetique, algebre, modelisation*. Aix, Francia: IREM.

Dougherty, B. (2008). Measuring up: A quantitative view of early algebra. In: Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (eds.) *Algebra in the Early Grades* (pp.389-412). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). *Áreas de di*ficultades en la adquisición del lenguaje algebraico*. Recherches en didactique des Mathematiques,* 9 (3), 155-188.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 13 (3), 295-332.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 11 (1), 77 – 88.

Gascón, J. (2002): Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA,* (39), 13-25.

Graham, A., & Thomas, M. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41 (3), 265-282.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 225-237). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (eds.) *Algebra in the Early Grades* (pp. 5 - 17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning to algebra: A structural perspective. In: Wagner, S. E. & Kieran, C. (eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: Grouws, D. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: MacMillan.

Lakatos, I. (2002). *Escritos Filosóficos, 1. La metodología de los programas de investigación científica.* (Trad. J. C. Zapatero).Madrid, España: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1973).

Malagón, R. (2008). *El álgebra escolar como instrumento de la actividad matemática: un estudio desde la teoría antropológica de lo didáctico sobre la reconstrucción de organizaciones matemáticas en torno a la divisibilidad*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Tesis de maestría no publicada).

Malagón, M., & Valoyes, L. (2011). El papel de la técnica algebraica en los procesos de objetivación de los reales. In: Recalde, L. & Arbeláez, G. (eds.) *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica* (pp. 103-133). Cali, Colombia: Programa Editorial de la Universidad del Valle.

Malissani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71 (1), 19 – 41.

Massa, R. (2001). Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII. Recuperado de http://ma1.upc.es/recerca/reportsre/01/rep0101massa.doc

Mason, J. (1999). *Rutas/Raíces al álgebra.* Tunja, Colombia: Editorial de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1984). *Matemáticas. Propuesta de Programa Curricular. Marcos Generales. Educación Básica Secundaria. Grados 8-9.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Radford, L. (2002). Algebra as *tekhnē.* Artefacts, symbols, and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. 1 (1), 31-56.

Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (39-53). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Rojano, T. (1996). The role of the problems and problem solving in the development of algebra. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 55-63) Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Ruthven, K. (2003). Linking algebraic and geometric reasoning with dynamic geometric software. Recuperado de: http://www.educ.cam.ac.uk/people/staff/ruthven/Ruth venQCA03.pdf

Panza, M (2006). François Viète. Between analysis and cryptoanalysis. *Studies in History and Phylosophy of Science*, 37, 269-289.

Valoyes, L. (2008). *Análisis didáctico de la algebrización de una organización matemática en el sistema educativo colombiano. El caso de la semejanza en el plano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Tesis de maestría no publicada).

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics.* 54 (1), 63-75.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Castilblanco, A. C. (ed.) *Memorias del Congreso Internacional de Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas.* (pp. 68-77). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Referencia

Luz Edith Valoyes Chávez, “Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos”, revista *Perspectivas Educativas*, Ibagué, Universidad del Tolima, Vol. 6, (enero-diciembre), 2013, pp. 15 - 32

Fecha de recepción: 14/06/13 Fecha de aprobación: 29/08/13