

Comparación de tres metodologías para la construcción de intervalos de confianza de los índices de capacidad del proceso bajo datos autocorrelacionados

Comparison of three methods for constructing confidence intervals of process capability indices under autocorrelated data

Raul Andres Rodríguez¹ y Joaquín González-Borja^{2*}

Resumen. Los índices de capacidad de un proceso han sido ampliamente utilizados en la industria, los cuales suministran una información numérica acerca de cómo el proceso se ajusta a unos límites de especificación establecidos. Los procedimientos existentes para construir intervalos de confianza para los índices de capacidad C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos muestran bajos porcentajes de cobertura. Este artículo presenta dos metodologías alternativas para construir intervalos de confianza para los índices C_{pm} y C_{pmk} , además de los índices C_p y C_{pk} , en procesos estacionarios gaussianos. La comparación de las tres metodologías se realiza mediante simulación, analizando el porcentaje de cobertura para procesos autorregresivos de orden uno.

Palabras clave: Autocorrelación, índices de capacidad de procesos, intervalo de confianza, porcentaje de cobertura.

Abstract. The process capability indexes have been widely used in industries. They provide numerical information regarding the way the process adjusts itself to some pre-established specification limits. The existing procedures to construct confidence intervals for the capability indexes C_{pm} and C_{pmk} in stationary Gaussian processes show low percentages of coverage. This paper presents two alternative methodologies to construct confidence intervals for the indexes C_{pm} and C_{pmk} , besides the indexes C_p and C_{pk} in stationary Gaussian processes. Comparison among these three methodologies is performed by simulation, analysing the coverage percentage for autoregressive processes of order one.

Keywords: Autocorrelation, process capability indexes, confidence interval, coverage percentage.

¹ Profesional en Matemáticas con Énfasis en Estadística, Universidad del Tolima, C.P. 73000-6299, Ibagué, Tolima, Colombia.

² Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, C.P. 73000-6299, Ibagué, Tolima, Colombia.

* jgonzalezb9@gmail.com

1 INTRODUCCIÓN

Los índices de capacidad del proceso miden la eficiencia de un proceso bajo ciertas especificaciones establecidas por la empresa o por las exigencias del mercado. Entre los índices de capacidad más usados, se encuentran el C_p , C_{pk} , C_{pm} y C_{pmk} . Un análisis de capacidad usual supone que el proceso se halla bajo control estadístico, que la distribución del proceso sea normal y que exista independencia entre las observaciones. Sin embargo, en varias ocasiones los procesos individuales, exhiben datos autocorrelacionados. En la literatura estadística, se encuentra gran cantidad de información respecto de los índices de capacidad para datos independientes, pero son muy escasas las investigaciones cuando se trata con datos autocorrelacionados; ver, por ejemplo, las revisiones bibliográficas de Kotz y Johnson (2002) y Spiring y cols.(2003). Zhang (1998) encuentra la varianza de los estimadores de los índices de capacidad C_p y C_{pk} en procesos estacionarios gaussianos y analiza los porcentajes de cobertura de los intervalos de confianza para C_p y C_{pk} y Guevara y Vargas (2007) localizan la varianza de los estimadores de los índices de capacidad C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos y muestran que los porcentajes de cobertura para los intervalos de confianza simétricos y asimétricos para C_{pm} y C_{pmk} son bajos.

Guevara y Vargas (2006) presentan un método basado en regresión lineal para construir intervalos de confianza de los índices de capacidad C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos. En particular, para un proceso estacionario $AR(1)$, que muestra el intervalo de confianza para el C_{pm} alcanza un porcentaje de cobertura del 99% y para el C_{pmk} del 100%, los cuales son muy poco confiables para ser utilizados en la práctica.

Este artículo presenta dos metodologías alternativas para construir intervalos de confianza de los índices de capacidad C_p , C_{pk} , C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos. Los métodos son basados en regresión lineal y en el bootstrap de bloques móviles propuesto por Künsch(1989). Las comparaciones de las dos metodologías de construcción de intervalos de confianza para los índices de capacidad se lleva a cabo vía simulación, calculando la proporción en que el verdadero valor de estos índices se halla dentro del intervalo de confianza construido, es decir, el porcentaje de cobertura para dichos intervalos que considera procesos estacionarios $AR(1)$. Se muestra que los porcentajes de cobertura se mejoran, para el caso de la metodología basada en regresión lineal. El artículo está organizado como sigue: en la sección 2, se presentan, algunas consideraciones teóricas relativas al estudio; En la sección 3, se describen los parámetros, algoritmos de simulación y los resultados del estudio, y, finalmente, en la sección 4 son dadas algunas conclusiones y recomendaciones.

2 Consideraciones teóricas

En esta sección, se da un resumen de algunos conceptos relevantes para el desarrollo del estudio.

2.1 Índices de capacidad del proceso

Los índices de capacidad del proceso son herramientas de calidad que permiten ajustar, por medio de un valor numérico, procesos bajo ciertas especificaciones establecidas por la industria, con el propósito de obtener un mejor rendimiento para los procesos. Los índices más utilizados son: C_p (Kane, 1986), C_{pk} , C_{pm} (Hsiang y Taguchi, 1985) y el C_{pmk} (Pearn y cols., 1992). La media μ y desviación estándar σ del proceso provienen de una distribución normal donde el límite de especificación inferior LEI y el límite de especificación superior LES se ajustan de acuerdo con el proceso, de igual forma el valor objetivo T . Los índices de capacidad C_p , C_{pk} , C_{pm} y C_{pmk} son definidos de la siguiente forma:

$$C_p = \frac{LES - LEI}{6\sigma}, \quad (1)$$

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{LES - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LEI}{3\sigma} \right\}, \quad (2)$$

$$C_{pm} = \frac{LES - LEI}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \quad (3)$$

y

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \quad (4)$$

donde $d = (LES - LEI)/2$ y $m = (LES + LEI)/2$.

2.2 Procesos estacionarios gaussianos

Los conceptos y definiciones que, a continuación, se presentan sobre procesos estacionarios gaussianos, se pueden estudiar con mayor profundidad en Brockwell y Davis (1996). Un proceso estocástico discreto es una sucesión de variables aleatorias $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_t\}$ con $t \in \mathbb{Z}$, donde \mathbb{Z} son los números enteros. Hay que notar que una serie de tiempo $\{X_t\}$ es una realización de un proceso estocástico.

La *función de medias* de $\{X_t\}$ es

$$\mu_x(t) = E(X_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

y la *función de autocovarianza* de $\{X_t\}$ es

$$\gamma_x(r, s) = Cov(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_x(r))(X_s - \mu_x(s))] \quad \forall r, s \in \mathbb{Z}.$$

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}$ es *estacionaria* (en sentido débil) si:

1. $\mu_x(t)$ es independiente de t .
2. $\gamma_x(t + h, t)$ es independiente de t para cada h .

De aquí en adelante, se entenderá como serie de tiempo estacionaria la definición anterior.

Sea $\{X_t\}$ una serie de tiempo estacionaria. La *función de autocovarianza* de $\{X_t\}$ en el rezago h es

$$\gamma_x(h) = Cov(X_{t+h}, X_t),$$

y la *función de autocorrelación* de $\{X_t\}$ en el rezago h es

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = Corr(X_t, X_{t+h}), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Un proceso estocástico $\{X_t\}$ se conoce como un *ruido blanco (RB)* si:

$$\mu_t = E(x_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

y

$$\gamma(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2 \\ \sigma^2, & t_1 = t_2. \end{cases}$$

Para valorar el grado de dependencia en los datos y seleccionar el modelo adecuado, se cuenta con una herramienta importante denominada *función de autocorrelación muestral*. La función de autocorrelación muestral de una serie de tiempo $\{X_t\}$ se define como:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad -n < h < n$$

donde, usualmente, $n \leq \lfloor N/4 \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$, función parte entera), N es la longitud de la serie y $\hat{\gamma}(h)$ es la *función de autocovarianza muestral* dada por

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}), \quad -n < h < n.$$

Un proceso estocástico estacionario $\{X_t\}$ que obedece a un *modelo ARMA*(p, q) $p, q \in \mathbb{N}$, si $\{X_t\}$ es la solución de la ecuación en diferencias:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

donde ϕ y $\theta \in \mathbb{R}$, $\{Z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y $Cov(X_s, Z_t) = 0$ $s < t$. Así un modelo *ARMA*($0, 1$) $\equiv AR(1)$, luego se define como $x_t = \phi_{x_{t-1}} + Z_t$, y si satisface que $|\phi| < 1$, el proceso recibe el nombre de *modelo estacionario autorregresivo de primer orden*, la media es constante $E(x_t) = 0$ y la función de autocovarianza

$$\gamma(h) = \frac{\sigma_{z_t}^2 \phi^h}{1 - \sigma^2}, h \geq 0,$$

donde la varianza del proceso es

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_{z_t}^2}{1 - \phi^2}$$

y la función de autocorrelación es

$$\rho(h) = \phi^h, h \geq 0.$$

2.3 Intervalos de confianza de los índices de capacidad del proceso para datos autocorrelacionados

Para llevar a cabo un análisis de índices de capacidad del proceso bajo ciertas especificaciones, es necesario que los datos del proceso cumplan los supuestos de independencia y de normalidad, considerando que el proceso se encuentre bajo control estadístico, según Montgomery (2008). En algunas ocasiones, el supuesto de independencia de los datos no se cumple y llevan a los índices arrojar conclusiones erróneas y de poca credibilidad sobre la capacidad del proceso. Al ver la situación de que los datos presentan algún grado de correlación, es necesario verificar si los datos se ajustan a un modelo de serie de tiempo.

Zhang (1998) realiza la construcción de intervalos de confianza para los índices C_p y C_{pk} que tienen un proceso estacionario *AR*(1). Posteriormente, Guevara y Vargas (2007) realizan la construcción de intervalos de confianza para los índices C_{pm} y C_{pmk} . Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario gaussiano y $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una muestra de tamaño n de $\{X_t\}$. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ y $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ la *media* y la *varianza muestral*, respectivamente. Zhang (1998) da los valores

esperados y las varianzas de \bar{X} , S^2 y S :

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu_X, \\ Var(\bar{X}) &= \frac{\sigma_X^2}{n} g(n, \rho_i), \\ E(S^2) &= \sigma_X^2 f(n, \rho_i), \\ Var(S^2) &= \frac{2\sigma_X^4}{(n-1)^2} F(n, \rho_i), \\ E(S) &\approx [E(S^2)]^{1/2} = \sigma_X [f(n, \rho_i)]^{1/2}, \\ Var(S) &\approx \frac{Var(S^2)}{4E(S^2)} = \sigma_X^2 \frac{F(n, \rho_i)}{2(n-1)^2 f(n, \rho_i)}, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} f(n, \rho_i) &= 1 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\rho_i, \\ F(n, \rho_i) &= n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i^2 + \frac{1}{n^2} \left[n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i^2 \right]^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i} (n-i-j)\rho_i\rho_j, \end{aligned}$$

y

$$g(n, \rho_i) = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\rho_i.$$

Zhang (1998) halló un valor aproximado para las varianzas de C_p y C_{pk} para cualquier proceso estacionario gaussiano; a partir de lo hecho por Zhang (1998), Guevara y Vargas (2007) establecieron un valor aproximado para las varianzas de C_{pm} y C_{pmk} . Se tiene que:

$$Var[\widehat{C}_p] \approx C_p^2 \frac{F(n, \rho_i)}{2(n-1)^2 f^3(n, \rho_i)}, \tag{5}$$

$$Var[\widehat{C}_{pk}] \approx \frac{C_{pk}}{f^2(n, \rho_i)} \left[\frac{g(n, \rho_i)}{9nC_{pk}^2} + \frac{F(n, \rho_i)}{2(n-1)^2 f^2(n, \rho_i)} \right], \tag{6}$$

$$Var[\widehat{C}_{pm}] \approx C_p^2 \left[\frac{\frac{2F(n, \rho_i)}{(n-1)^2} + \frac{4g(n, \rho_i)\xi^2}{n}}{4[f(n, \rho_i) + \xi^2]^3} \right], \tag{7}$$

y

$$Var[\widehat{C}_{pmk}] \approx C_{pk}^2 \left[\frac{1}{f(n, \rho_i) + \xi^2} \right] \tag{8}$$

$$\times \left\{ \frac{F(n, \rho_i)}{2(n-1)^2[f(n, \rho_i) + \xi^2]^2} + \frac{g(n, \rho_i)}{9n} \left[\frac{1}{C_{pk}} + \frac{6\xi}{2[f(n, \rho_i) + \xi^2]} \right]^2 \right\}$$

donde $\rho_i = \rho(i)$ $i = 1, 2, \dots, n$, es la función de autocorrelación de $\{X_t\}$ definida en la sección 2.2 y $\xi = \frac{\mu - T}{\sigma}$. Los intervalos de confianza se construyen de la siguiente forma:

$$\widehat{\text{índice de capacidad}} \pm k(\widehat{\sigma}_{\text{índice de capacidad}}).$$

Siendo $\widehat{C}_p, \widehat{C}_{pk}, \widehat{C}_{pm}$ y \widehat{C}_{pmk} , los estimadores usuales, que se obtienen sustituyendo μ por \bar{X} y σ^2 por S^2 , en (1) al (4) de la sección 2.1, el $\widehat{\sigma}_{\text{índice de capacidad}}$ respectivo se obtiene tomando las ecuaciones (5) al (8), y el valor de k es escogido por el usuario. Si se toma $k = 2$ se construye un intervalo de confianza al 95% y $k = 3$ para un intervalo de confianza al 99%. La forma de construcción de los intervalos de confianza para los índices de capacidad C_p, C_{pk}, C_{pm} y C_{pmk} , dados en esta sección, se llamará *metodología teórica*. La construcción de los intervalos de confianza para los índices de capacidad mencionados y sus porcentajes de cobertura son descritos en el algoritmo 1 de la sección 3.

2.4 Regresión lineal simple e intervalos de confianza para los índices de capacidad del proceso

La regresión lineal simple es una herramienta que permite establecer la relación lineal de una variable dependiente Y y una variable independiente o explicativa X . El modelo de tipo lineal es de la forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, donde β_0, β_1 son constantes y ε es el error del modelo que usualmente se consideran normalmente distribuidos e independientes. En la práctica, una relación lineal entre las variables Y y X se detecta por medio de un diagrama de dispersión que se obtiene al graficar en un plano cartesiano los puntos (x_i, y_i) , correspondientes a las observaciones de una muestra. De tal forma que los puntos resultantes muestran una tendencia rectilínea acentuada. Los coeficientes β_0 y β_1 son parámetros desconocidos que deben ser estimados con los valores de la muestra para obtener un modelo estimado $\widehat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i$. La estimación de los parámetros del modelo se realiza mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios.

Para saber si el modelo ajustado a los datos es el adecuado, es necesario realizar unas pruebas donde se toman los residuales del modelo ($r_i = y_i - \widehat{y}_i$) y se analizan los supuestos de normalidad, independencia y homocedasticidad sobre los residuales (Clavijo (2005)).

Guevara y Vargas (2006) presentan un método que permite construir intervalos de confianza para los índices de capacidad C_{pm} y C_{pmk} . En el caso del C_{pm} , este

método aprovecha la relación exponencial que existe entre ϕ y el $\max(\widehat{C}_{pm} - C_{pm})$. Para el C_{pmk} , se tiene en cuenta la relación exponencial que existe entre ϕ y el $\max(|\widehat{C}_{pmk} - C_{pmk}|)$. A través de una transformación de estas relaciones, se construye una relación lineal entre las observaciones, se aplican procesos de regresión lineal y mediante simulación se encuentran los valores estimados de los coeficientes de regresión que permiten construir el intervalo de confianza para cada índice, de la forma $\widehat{C}_{pm} \pm \widehat{y}$ o $\widehat{C}_{pmk} \pm \widehat{y}$, con $\widehat{y} = \exp(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1\phi)$ para procesos estacionarios gaussianos con modelos $AR(1)$. El estudio arroja porcentajes de cobertura del 99% para C_{pm} y del 100% para C_{pmk} , resultados a nuestra consideración muy poco creíbles para su aplicación. Teniendo en cuenta lo anterior, se supone una modificación al método dado por Guevara y Vargas (2006) para la construcción de intervalos de confianza para los índices de capacidad, el cual es explicado en el algoritmo 2, de la sección 3. Además, se hace el cálculo del porcentaje de cobertura de los intervalos bajo esta metodología.

2.5 *Bootstrap* de bloques móviles e intervalos de confianza para los índices de capacidad del proceso

La metodología bootstrap propuesta por Efron (1979) es una herramienta computacional que permite establecer estimadores no paramétricos, teniendo en cuenta el supuesto de independencia que en muchas ocasiones no se cumple. Sin embargo, con el transcurrir de los años, se han implementado metodologías bootstrap especiales para el manejo de datos dependientes, entre los que se cuenta el bootstrap de bloques móviles propuestos por Künsch (1989), Liu y Singh (1992), el bootstrap de bloques no superpuestos por Carlstein (1986), el bootstrap de bloques por Politis y Romano (1992) y el bootstrap por Politis y Romano (1994).

El método bootstrap de bloques móviles propuesto por Künsch (1989) y posteriormente por Liu y Singh (1992) remuestra bloques aleatoriamente con reemplazamiento desde las subcolecciones $\{\mathfrak{B}(i, k) : i = 1, \dots, n - l + 1, k = l\}$; n es el tamaño de la muestra y k el número de bloques. Sea I_{11}, \dots, I_{1b} variables aleatorias independiente idénticamente distribuidas condicionadas con distribución uniforme discreta en $\{1, \dots, n - l + 1\}$, esto es, la probabilidad condicional dada la serie de tiempo $\{X_n\}$, $P_*(I_{11} = i) = (n - l + 1)^{-1}$, $1 \leq i \leq n - l + 1$, donde el tamaño de los bloques es $b = \lceil n/l \rceil$. Así el remuestreo hecho por el bootstrap por bloques móviles está dado por $\mathfrak{B}(I_{11}, l), \dots, \mathfrak{B}(I_{1b}, l)$ y la organización de b elementos de los bloques es de forma secuencial, luego la muestra bootstrap queda de la siguiente manera $X_{1,1}^*, \dots, X_{1,l}^*, X_{1,l+1}^*, \dots, X_{1,2l}^*, \dots, X_{1,b}^*$. Por ejemplo, se tiene $k = 3$ y $b = 2$, donde k es el número de bloques y b el número de elementos, $\mathfrak{B}_1 = (9, 2)$, $\mathfrak{B}_2 = (7, 4)$ y $\mathfrak{B}_3 = (4, 6)$, luego la muestra bootstrap es $(9, 2, 7, 4, 4, 6)$.

En este artículo, se propone un método alternativo para construir intervalos de confianza para C_p , C_{pk} , C_{pm} , C_{pmk} , usando la metodología bootstrap para datos dependientes propuesto por Künsch. La forma de construcción de los intervalos de confianza para los índices de capacidad y el cálculo del porcentaje de cobertura se muestran en el algoritmo 3, de la sección 3. Para el desarrollo del estudio simulación, la librería *tseries* creada por Trapletti y Hornik (2009) del paquete estadístico R permite la utilización del bootstrap de bloques móviles dado por Künsch (1989).

3 El estudio de simulación

En esta sección, se muestra la metodología, los escenarios de simulación y los resultados producto de llevar a cabo el estudio comparativo de las tres metodologías de construcción de intervalos de confianza para los índices de capacidad C_p , C_{pk} , C_{pm} y C_{pmk} , descritos en la sección 2. Resultados adicionales, pueden consultarse en Rodríguez (2011).

Tabla 1. Parámetros de simulación

<i>LEI</i>	<i>LES</i>	<i>K</i>	<i>n</i>	μ	σ	<i>T</i>	ϕ
-3	3	2	50	0	0,5	1	0,15
			100		1	2	0,20
			200		1,5	3	0,25
					2	4	0,30
						5	0,35
							0,40
							0,45
							0,50
							0,55
							0,60
							0,65
							0,70
							0,75
							0,80
							0,90

3.1 Metodología

Se simula un proceso $AR(1)$ estacionario de acuerdo con los parámetros de simulación considerados en la tabla 1. Luego se compara el desempeño de las tres

metodologías según los algoritmos en diferentes escenarios de simulación y se hallaron porcentajes empíricos mediante el conteo del número de veces que se encuentre el índice de capacidad teórico en los intervalos de confianza simulados con una confiabilidad del 95% ($K = 2$), lo cual se llamara *porcentaje de cobertura*. Los tres algoritmos fueron llevados a rutinas de programación en el paquete estadístico de uso libre R 2.13.1.

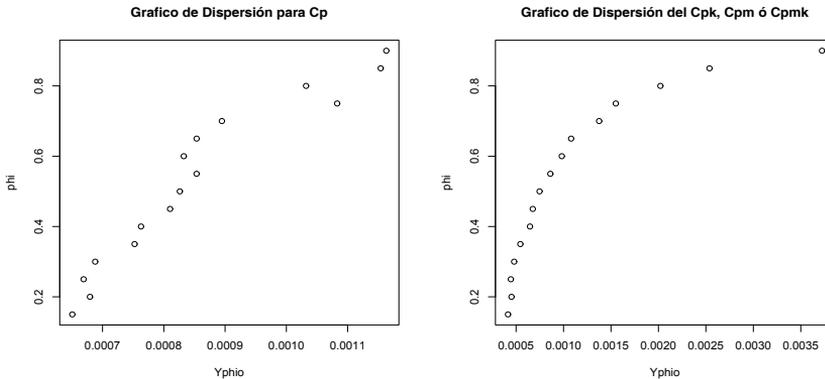


Figura 1. Gráficos de dispersión ϕ versus \widehat{var} (índice de capacidad)

3.1.1 Algoritmo 1. Cálculo de los intervalos de confianza con la metodología teórica.

1. Se fijan los valores $LEI, LES, \mu, K, n, \sigma, T$ y ϕ , donde n, σ, T y ϕ varían (ver tabla 1).
2. Se calcula el índice de capacidad teóricos C_p, C_{pk}, C_{pm} y C_{pmk} , siguiendo a las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) (ver sección 2.1).
3. Se simula una serie $AR(1)$ estacionaria de tamaño n y parámetros ϕ, μ y σ (ver sección 2.2).
4. Se calcula la estimación del índice de capacidad $\widehat{C}_p, \widehat{C}_{pk}, \widehat{C}_{pm}$ o \widehat{C}_{pmk} , donde se estima $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\sigma}$ del proceso, de acuerdo con las ecuaciones (1), (2), (3) y (4).
5. Se obtiene $\widehat{\gamma}(h)$, la función de autocorrelación muestral (ver sección 2.2).
6. Se hace el cálculo de $\widehat{Var}(\widehat{C}_p), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pk}), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pm})$ o $\widehat{Var}(\widehat{C}_{pmk})$, de acuerdo con las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) (ver sección 2.3).

7. Se realiza el cálculo del intervalo de confianza de la forma $\widehat{C}_p \pm K\sqrt{\widehat{Var}(\widehat{C}_p)}$, $\widehat{C}_{pk} \pm K\sqrt{\widehat{Var}(\widehat{C}_{pk})}$, $\widehat{C}_{pm} \pm K\sqrt{\widehat{Var}(\widehat{C}_{pm})}$, y $\widehat{C}_{pmk} \pm K\sqrt{\widehat{Var}(\widehat{C}_{pmk})}$.
8. Se repiten los pasos 1 al 7 1.000 veces, y se obtienen 1.000 intervalos de confianza.
9. Se cuenta el número de intervalos de confianza que contiene el índice teórico calculado en el paso 2, y se obtiene el porcentaje de cobertura.

3.1.2 Algoritmo 2. Cálculo de los intervalos de confianza con la metodología de regresión lineal.

1. Se fijan los valores $LEI, LES, \mu, K, n, \sigma, T$ y ϕ , donde n, σ, T y ϕ varían (ver tabla 1).
2. Se simula una serie $AR(1)$ estacionaria de tamaño n y parámetros ϕ, μ y σ (ver sección 2.2).
3. Se calcula la estimación del índice de capacidad $\widehat{C}_p, \widehat{C}_{pk}, \widehat{C}_{pm}$ o \widehat{C}_{pmk} para todos los valores de ϕ considerados, donde se estima $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\sigma}$ del proceso.
4. Se calcula $\widehat{Var}(\widehat{C}_p), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pk}), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pm})$ o $\widehat{Var}(\widehat{C}_{pmk})$, siguiendo las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) (ver sección 2.1).
5. Se realiza un gráfico de dispersión entre los valores de phi y su varianza $\widehat{Var}(\widehat{C}_p), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pk}), \widehat{Var}(\widehat{C}_{pm})$ o $\widehat{Var}(\widehat{C}_{pmk})$ (ver figura 1).
6. Se transforman las varianzas estimadas de acuerdo con el gráfico de dispersión del paso 5; para ganar linealidad se toma $\ln(\widehat{Var}(\widehat{C}_p)), \ln(\widehat{Var}(\widehat{C}_{pk})), \ln(\widehat{Var}(\widehat{C}_{pm}))$ y $\ln(\widehat{Var}(\widehat{C}_{pmk}))$.
7. Se ajustan las varianzas estimadas a una recta y se calculan $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$ (ver sección 2.4).
8. Se calcula el índice de capacidad C_p, C_{pk}, C_{pm} o C_{pmk} teórico.
9. Se realiza el cálculo del intervalo de confianza de acuerdo con los pasos 6 y 7 mediante la fórmulas $\widehat{C}_p \pm k(\sqrt{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 * \phi})$, $\widehat{C}_{pk} \pm k(\sqrt{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 * \phi})$, $\widehat{C}_{pm} \pm k(\sqrt{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 * \phi})$ y $\widehat{C}_{pmk} \pm k(\sqrt{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 * \phi})$.
10. Se repiten los pasos 1 al 9 1.000 veces, y se obtienen 1.000 intervalos de confianza.

11. Se cuenta el número de intervalos de confianza que contiene el índice teórico calculado en el paso 8, y se obtiene el porcentaje de cobertura.

3.1.3 Algoritmo 3. Cálculo de los Intervalos de Confianza con la Metodología Bootstrap.

1. Se fijan los valores $LEI, LES, \mu, K, n, \sigma, T$ y ϕ , donde n, σ, T y ϕ varían, (ver tabla 1).
2. Se simula una serie $AR(1)$ estacionaria de tamaño n y parámetros ϕ, μ y σ (ver sección 2.2).
3. Se calcula el índice de capacidad C_p, C_{pk}, C_{pm} o C_{pmk} teórico, siguiendo las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) (ver sección 2.1).
4. Se generan 500 muestras bootstrap de bloques móviles de acuerdo con la teoría de los índices C_p, C_{pk}, C_{pm} y C_{pmk} , siguiendo la serie $AR(1)$ estacionaria del paso 2 (ver sección 2.5).
5. Se forma una distribución empírica de los 500 bootstrap del índice C_p, C_{pk}, C_{pm} o C_{pmk} , luego se toma el cuantil $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución tomando ($\alpha = 0,05$) como el extremo inferior y superior, respectivamente, del intervalo de confianza.
6. Se repite los pasos 1 al 5 1.000 veces, y se obtienen 1.000 intervalos de confianza.
7. Se cuenta el número de intervalos de confianza que contiene el índice teórico calculado en el paso 3, y se obtienen el porcentaje de cobertura.

3.2 Resultados

Los porcentajes de cobertura obtenidos del proceso de simulación de los índices de capacidad con las tres metodologías empleadas son comparadas muy detalladamente en diferentes escenarios de simulación de acuerdo con las siguientes tablas, donde se incluyen los parámetros de la tabla. En cuanto a las tablas y figuras, se escogen los resultados de las simulaciones con porcentajes de cobertura con una diferencia significativa.

Tabla 2. Porcentaje de cobertura para el índice C_p con serie tamaño $n = 200$

$\phi \setminus \sigma$	Metodología											
	Teórico				Regresión				Bootstrap			
	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2
0,15	99,1	99,0	99,3	99,1	94,5	94,3	94,6	94,6	91,0	91,6	90,8	89,7
0,20	99,5	98,9	98,8	98,9	93,9	94,2	93,4	95,5	87,7	89,6	88,9	91,0
0,25	99,2	98,6	98,2	99,1	94,8	96,5	95,4	94,3	88,8	89,4	89,6	89,0
0,30	98,8	98,9	98,6	98,9	95,6	95,2	94,6	94,2	90,6	88,5	89,8	88,5
0,35	99,2	99,3	98,8	98,9	95,8	95,6	95,0	96,8	89,3	91,1	87,2	87,1
0,40	99,0	98,9	98,2	98,7	94,5	95,4	95,3	97,1	87,8	88,8	88,0	87,3
0,45	99,0	98,7	98,5	98,9	95,9	94,9	95,6	96,0	83,9	86,2	87,3	87,0
0,50	98,6	98,8	98,2	99,3	96,6	95,2	96,0	94,9	87,5	89,4	88,9	86,9
0,55	98,2	98,3	98,7	98,8	95,1	96,0	96,1	95,5	87,8	86,0	86,4	84,7
0,60	98,1	98,3	98,5	98,2	96,5	94,3	95,3	95,4	86,0	86,9	85,7	85,8
0,65	98,8	97,4	98,5	98,7	95,5	95,4	95,4	94,6	84,0	84,8	84,8	86,0
0,70	97,5	97,3	97,9	96,9	95,8	95,4	94,0	94,8	84,7	80,6	82,1	82,2
0,75	98,0	98,3	97,1	97,7	94,5	94,7	95,2	95,2	81,2	80,7	80,6	82,5
0,80	97,5	96,0	97,7	96,3	94,3	92,9	93,2	94,9	76,9	78,9	79,1	79,3
0,85	96,7	97,3	97,3	97,0	92,1	92,0	93,2	92,6	76,8	74,9	73,5	77,5
0,90	94,8	94,9	94,8	95,9	90,4	90,4	90,4	93,0	69,7	68,0	64,9	68,9

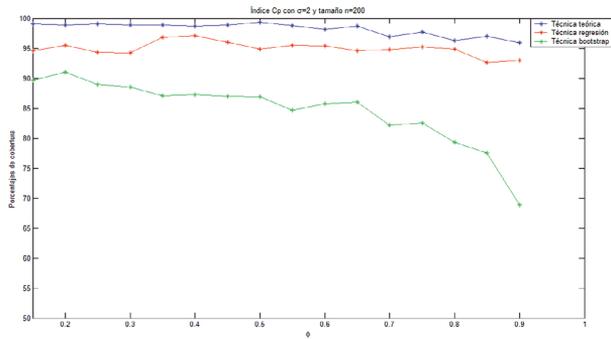


Figura 2. Gráfico comparativo de las metodologías para el índice de capacidad C_p con $\sigma = 2$ y $n = 200$

Tabla 3. Porcentaje de cobertura para el índice C_{pk} con serie tamaño $n = 100$

$\phi \setminus \sigma$	Metodología											
	Teórico				Regresión				Bootstrap			
	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2
0,15	98,6	97,6	95,8	91,6	96,1	93,2	90,2	87,1	89,2	87,4	85,3	82,7
0,20	98,5	98,3	94,5	94,3	95,2	93,1	90,8	87,3	86,7	87,2	84,4	82,3
0,25	99,2	97,0	95,4	91,6	93,8	93,7	92,2	89,4	87,9	87,9	84,9	84,6
0,30	98,5	97,9	95,0	90,6	95,3	94,6	92,1	90,9	87,5	87,9	85,1	81,7
0,35	97,7	97,5	94,6	91,1	95,7	95,5	94,2	90,9	86,5	86,6	87,3	82,2
0,40	98,5	98,1	93,7	89,5	96,4	94,9	92,1	89,5	85,8	85,9	86,1	81,7
0,45	98,8	96,0	94,9	90,2	95,5	95,2	93,2	90,4	84,9	88,7	86,2	81,1
0,50	99,2	96,8	93,1	90,2	95,2	96,1	92,4	89,8	86,5	86,7	85,3	81,3
0,55	97,9	96,2	93,9	88,9	95,2	96,0	93,4	90,6	84,7	84,9	85,4	82,4
0,60	98,3	96,6	89,4	85,9	95,5	96,2	94,6	90,4	84,0	88,9	84,4	82,1
0,65	97,5	95,9	90,2	87,0	94,4	95,8	93,9	91,3	86,3	84,6	84,9	81,7
0,70	97,1	93,9	90,7	83,2	94,0	95,1	93,6	90,5	84,6	85,9	83,2	80,3
0,75	96,7	93,0	88,5	82,1	95,7	96,1	91,4	89,4	81,9	85,0	84,6	79,1
0,80	96,8	93,2	85,3	77,8	96,3	94,3	91,8	89,1	81,5	85,4	82,3	77,5
0,85	95,7	87,4	80,1	73,7	94,9	92,9	88,1	83,7	78,5	80,9	80,5	74,5
0,90	92,6	82,0	75,2	67,8	93,9	89,6	84,0	77,3	73,7	80,3	78,2	72,9

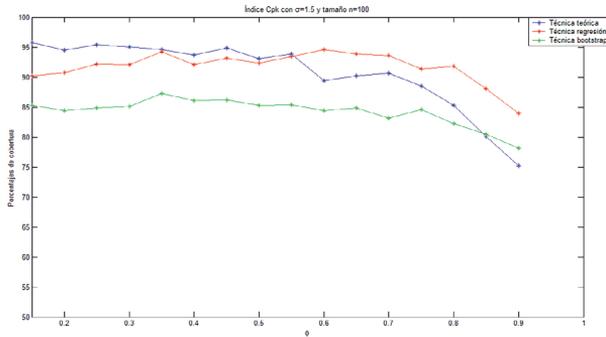


Figura 3. Gráfico comparativo de las metodologías para el índice C_{pk} con $\sigma = 1.5$ y $n = 100$

Tabla 4. Porcentaje de cobertura para el índice C_{pm} con valor objetivo $T = 3$ y tamaño $n = 50$

$\phi \setminus \sigma$	Metodología											
	Teórico				Regresión				Bootstrap			
	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2
0,15	69,5	69,6	79,8	83,1	89,8	90,2	92,8	92,4	82,0	84,4	83,7	80,9
0,20	69,8	71,9	77,4	81,8	91,2	91,9	93,5	93,0	83,3	82,6	84,0	84,0
0,25	66,9	73,2	78,7	82,4	94,2	93,4	95,9	95,6	81,9	81,7	80,8	81,1
0,30	69,4	69,5	77,8	80,1	94,5	96,3	95,3	94,2	82,0	79,4	81,5	82,2
0,35	68,1	69,5	73,5	77,8	96,8	95,6	96,5	96,1	80,0	76,5	79,9	80,7
0,40	65,6	70,2	74,2	81,3	96,5	96,3	95,8	93,9	79,0	82,8	80,6	81,9
0,45	67,8	70,4	76,1	77,0	97,4	97,1	95,8	95,1	82,2	78,6	80,4	79,6
0,50	66,3	71,9	71,7	80,9	98,1	97,3	96,9	94,7	78,2	76,9	77,6	77,3
0,55	63,4	68,1	74,8	79,5	98,6	96,9	95,1	96,2	77,7	77,1	77,8	78,1
0,60	65,3	67,7	75,4	78,2	97,9	97,4	96,5	96,2	75,5	75,7	77,3	76,3
0,65	61,7	67,9	73,9	76,5	98,1	97,4	95,2	95,9	75,8	75,3	74,3	75,8
0,70	63,6	66,3	71,4	77,2	96,6	97,3	94,6	94,8	73,5	71,4	74,2	73,9
0,75	62,3	66,0	73,1	76,0	96,2	95,8	93,8	94,5	68,0	70,5	71,0	67,7
0,80	60,5	64,0	69,6	74,8	94,6	93,0	92,7	93,7	68,4	67,5	67,3	65,9
0,85	56,7	65,8	68,3	77,5	92,6	91,3	92,1	92,7	63,7	64,5	63,8	64,0
0,90	52,5	61,8	68,3	73,4	85,4	86,7	88,5	92,0	53,8	54,8	55,5	55,6

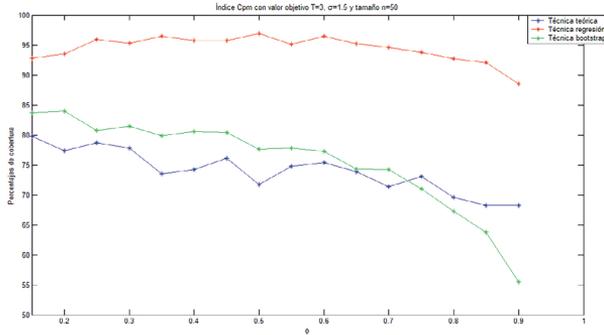


Figura 4. Gráfico comparativo de las metodologías para el índice C_{pm} con $T = 3$, $\sigma = 1.5$ y $n = 50$

Tabla 5. Porcentaje de cobertura para el índice C_{pmk} con valor objetivo $T = 3$ y tamaño $n = 200$

$\phi \setminus \sigma$	Metodología											
	Teórico				Regresión				Bootstrap			
	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2	0,5	1	1,5	2
0,15	55,6	57,8	63,0	66,4	82,9	83,4	82,9	83,1	82,2	81,1	79,8	75,2
0,20	53,0	58,5	62,1	62,8	84,3	84,3	84,3	83,5	83,9	79,2	79,0	75,8
0,25	56,1	59,7	67,3	65,6	85,4	84,5	84,7	83,1	82,9	79,4	78,6	79,1
0,30	55,6	58,3	60,8	65,4	87,1	87,0	86,2	85,6	83,4	81,2	79,4	74,9
0,35	54,7	61,2	59,1	61,8	88,1	87,0	86,9	85,8	84,6	80,9	79,5	75,9
0,40	52,8	59,9	62,2	66,2	89,0	88,0	86,5	87,4	81,8	81,4	78,3	76,6
0,45	53,1	60,1	63,9	66,3	91,6	87,7	88,0	86,5	82,6	79,2	80,3	74,5
0,50	53,4	61,5	63,8	64,5	91,4	87,6	87,3	86,7	84,3	79,8	76,8	76,2
0,55	55,4	61,1	61,7	63,8	90,8	88,0	88,5	85,9	83,1	80,3	78,3	75,5
0,60	50,8	59,6	62,5	63,6	90,4	88,9	89,0	88,7	84,4	81,9	75,9	75,7
0,65	53,1	60,2	65,2	66,3	91,1	89,3	88,3	87,6	83,2	80,3	76,7	73,7
0,70	54,9	61,9	61,3	64,4	90,8	87,4	88,6	84,0	83,5	81,2	74,9	75,4
0,75	54,9	58,8	63,0	64,4	89,0	86,2	85,8	86,4	81,2	79,6	74,4	70,3
0,80	55,9	62,1	66,1	65,7	86,8	86,0	84,2	82,7	83,2	79,4	77,4	68,8
0,85	52,8	62,2	66,6	64,3	82,6	81,2	82,2	80,0	83,3	76,7	71,6	70,3
0,90	57,0	61,0	66,0	61,2	78,1	75,7	74,0	69,3	79,5	76,0	72,4	64,3

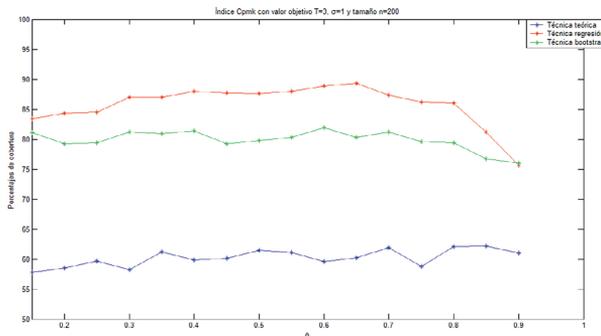


Figura 5. Gráfico comparativo de las metodologías para el índice C_{pmk} con $T = 3$ $\sigma = 1$ y $n = 200$

Los porcentajes de cobertura del índice C_p con $\sigma = 2$, $n = 200$, proporcionados por la tabla 2 y la figura 2, determinan que la metodología teórica es la más adecuada, con porcentajes entre el 95 y el 98%, seguida de la metodología de regresión con porcentajes entre el 93 y el 96%. Luego la metodología bootstrap muestra porcentajes entre el 70 y el 90%; los porcentajes de cobertura del índice C_{pk} con $\sigma = 1$ y $n = 100$, proporcionados por la tabla 3 y la figura 3, muestran porcentajes entre el 80 y el 95%, luego la metodología de regresión con porcentajes entre el 75 y el 95% y la metodología bootstrap con porcentajes de cobertura del 62 y 90%.

Los porcentajes de cobertura del índice C_{pm} con $n = 50$ y valor objetivo $T = 3$, proporcionados por la tabla 4 y la figura 4, muestran que la metodología teórica se encuentra por debajo de la metodología bootstrap, con porcentajes entre el 56 y el 79% para la teórica y entre el 65 y el 85% para la bootstrap. Luego, la metodología de regresión no muestra alteración alguna al desvío que presenta el valor objetivo $T = 3$ con porcentajes entre el 87 y el 97%.

Los porcentajes de cobertura para el índice C_{pmk} con $n = 200$ y el valor objetivo $T = 3$, proporcionados por la tabla 5 y la figura 5, muestran que los porcentajes de cobertura para la metodología teórica son bajos, entre el 55 y el 65%, a diferencia de la metodología de regresión, con porcentajes entre el 70 y el 91% y la metodología bootstrap con porcentajes entre el 65 y el 80%, lo que indica que la metodología teórica no es una buena alternativa para ser usada.

4 Conclusiones y recomendaciones

Para procesos estacionarios gaussianos, en particular para modelos autorregresivos estacionarios de primer orden, hemos mostrado tres metodologías que permiten construir intervalos de confianza para los índices de capacidad C_p , C_{pk} , C_{pm} y C_{pmk} . Las tres metodologías fueron la tradicional, la basada en regresión lineal, la cual es una modificación de la metodología propuesta por Guevara y Vargas (2006), y la que considera el bootstrap para datos dependientes, que es una propuesta dada en este artículo. Mediante simulación, se encontró lo siguiente:

1. En el cálculo de los intervalos para los índices C_p y C_{pk} , la metodología teórica y la metodología de regresión presentan porcentajes de cobertura altos. El uso de una de las dos metodologías proporciona buenas estimaciones al índice de capacidad.
2. La distancia que hay entre μ y T ($|\mu - T|$), en los índices C_{pm} y C_{pmk} , afecta de forma considerable a las metodologías teórica y bootstrap; por otro lado, permaneciendo casi invariante la metodología de regresión, no es tan afectada como las metodologías anteriores, si disminuye su porcentaje de cobertura, pero se mantiene estable a los cambios de valor objetivo, por lo que se sugiere ser utilizada para el cálculo del intervalo de confianza para estos índices.
3. Las correlaciones muy altas disminuyen el porcentaje de cobertura en la estimación de los intervalos de confianza para los cuatro índices utilizando cualquiera de las tres metodologías. Una mayor confiabilidad se espera para los intervalos de confianza de los cuatro índices de capacidad cuando

las observaciones en estudio posean una autocorrelación entre $\phi = 0,15$ y $\phi = 0,75$, para la metodología de regresión.

En general se recomienda la metodología de regresión presentada en este artículo para el cálculo de los intervalos de confianzas de los índices de capacidad bajo datos autocorrelacionados. Como estudios posteriores, se recomienda el estudio de la amplitud de los intervalos que ofrecen las tres metodologías. Otro campo de estudio es la utilización de otras metodologías bootstrap para datos autocorrelacionados y compararlas con las metodologías aquí utilizadas, además de estudiar las propiedades de los estimadores puntuales y por intervalo de los índices de capacidad para datos autocorrelacionados.

Referencias

- Brockwell, P. y Davis, R. (1996). Introduction to time series and forecasting. Springer, New York.
- Carlstein, E. (1986). The use of subseries methods for estimating the variance of a general statistic from a stationary time series. *Ann. Statist*, 14, 1171-1179.
- Clavijo, J. A. (2005). Una introducción a la estadística general. Notas de Clase, Universidad del Tolima.
- Guevara, R. D. y Vargas, J. A. (2006). Intervalos de confianza para los índices C_{pm} y C_{pmk} en procesos estacionarios gaussianos. *Revista Colombiana de Estadística*, 29, 153-162.
- Guevara, R. D. y Vargas, J. A. (2007). Comparison of process capability indices Under autocorrelated data. *Revista Colombiana de Estadística*, 30, 301-316.
- Hsiang, T. C. y Taguchi, G. (1995). A tutorial on quality control and assurance - the Taguchi methods. ASA Annual Meeting. Las Vegas, Nevada.
- Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality technology*, 18, 41-52.
- Kotz, S. y Johnson, N. (2002). Process capability indices - a review, 1992-2000. *Journal of Quality Tecnology*, 34, 2-19.
- Künsch, H. R. (1989). The jackknife and bootstrap for general stationary observations. *The Annals of Statistics*, 17, 1217-1261.

Liu, R.Y. y Singh, K. (1992). Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence. In: Exploring the limits of bootstrap. R. Lepage and L.Billard eds., 225-248. Wiley, New York.

Montgomery, D. C. (2008). Control estadístico de la calidad. Limusa Wiley, México.

Pearn, W. L., Kotz, S. y Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 24, 216-231.

Politis, D.N. y Romano, J.F. (1992). A circular block-resampling procedure for stationary data. In: Exploring the limits of bootstrap, R. Lepage and L.Billard eds., 263-270. Wiley, New York.

Politis, D. y Romano, J. P. (1994). The Stationary Bootstrap. *J. Amer. Statist. Assoc*, 89, 1303-1313.

Rodríguez, R. A. (2011). Estudio del análisis de la capacidad del proceso bajo datos autocorrelacionados. Trabajo de grado, Universidad del Tolima.

Spiring, F., Leung, B, Cheng, S. y Yeung, A. (2003). A bibliography of process capability Papers. *Quality and Reliability Engineering International*, 19, 445-460.

Trapletti, A. y Hornik, K. (2009). Tseries: time series analysis and computational finance. R package, version 0.10-22.

Zhang, N. F. (1998). Estimating process capability indexes for autocorrelated data, *Journal of Applied Statistics*, 25, 559-574.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Rodríguez, T. Raúl Andrés y González, Borja Joaquín Comparación de tres metodologías para la construcción de intervalos de confianza de los índices de capacidad del proceso bajo datos autocorrelacionados. Revista Tumbaga (2012), 7, vol. II	Día/mes/año 08/09/2011	Día/mes/año 15/07/2012