
Matemáticas y Estadística

Existencia de super y sub soluciones en un modelo de acidogénesis para producción de biogas

Existence of lower and upper solutions on acidogenic model for biogas production

Maximiliano Machado-Higuera¹ & Alexander Vladimirovich Sinitsyn²

Resumen: Probamos la existencia de super y sub soluciones en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que modela la acidogénesis en la digestión anaerobia para la producción de biogás. Las super y sub soluciones son contruidas en forma analítica y se plantea su respectivo teorema de existencia de soluciones.

Palabras claves: Biogás, digestión anaerobia, sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, super-sub soluciones.

Abstract: We prove existence of upper and lower solutions in a system of nonlinear ordinary differential equations, modeling acidogenesis in anaerobic digestion to the production of biogas. The upper and lower solutions are constructed analytically, and the corresponding existence theorems are established.

Keywords: Biogas, anaerobic digestion, system of nonlinear differential equations, upper-lower solutions.

1. Introducción

La digestión anaerobia (DA) es una fermentación microbiana en ausencia de oxígeno que da lugar a una mezcla de gases (principalmente metano y dióxido de carbono),

¹ Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, grupo de investigación Naturatu, Universidad de Ibagué. Calle 67 Carrera 22 barrio Ambalá, Ibagué-Tolima, Colombia, CP 73001. Tel. +57 8 2709400 Ext. 223, Fax. +57 8 2709401, maximiliano.machado@unibague.edu.co

² Candidato a doctor en Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana de México.

³ Ph.D. Matemáticas. Profesor Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, correo electrónico: avsinityn@yahoo.com.

conocida como “biogás” y a una suspensión acuosa o “lodo” que contiene los microorganismos responsables de la degradación de la materia orgánica. La materia prima preferentemente utilizada para ser sometida a este tratamiento es cualquier biomasa residual que posea un alto contenido en humedad, como restos de comida, restos de hojas y hierbas al limpiar un jardín o un huerto, residuos ganaderos, lodos de plantas depuradoras de aguas residuales urbanas y aguas residuales domésticas e industriales (Lorenzo and Obaya, 2005).

En la práctica, de ingeniería se acostumbra a considerar tres etapas para residuos sólidos o lodos (hidrólisis, acidogénesis, metanogénesis) y dos para residuos líquidos (acidogénesis y metanogénesis) (Jewell, 1987).

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para el proceso de DA (Bernard et al., 2001):

Balance de biomosas

$$\frac{dX_1}{dt} = (\mu_1(S_1) - \alpha D) X_1 \quad (\text{acidogénesis}) \tag{1}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2 \quad (\text{metanogénesis}) \tag{2}$$

Balance de sustratos

$$\frac{dS_1}{dt} = D (S_{1in} - S_1) - k_1 \mu_1(S_1) X_1 \quad (\text{acidogénesis}) \tag{3}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = D (S_{2in} - S_2) + k_2 \mu_1(S_1) X_1 - k_3 \mu_2(S_2) X_2 \quad (\text{metanogénesis}) \tag{4}$$

Balance de la alcalinidad

$$\frac{dA}{dt} = D (A_{in} - A) \tag{5}$$

Tasa de cambio del carbono

$$\frac{dC}{dt} = D (C_{in} - C) + k_4 \mu_1(S_1) X_1 + k_5 \mu_2(S_2) X_2 - K_{La} [C + S_2 - A - K_H P_C]. \tag{6}$$

La expresión $K_{La}(C - K_H P_C)$ describe la tasa de flujo molar del carbono inorgánico desde su fase líquida hasta su fase gaseosa y el producto $K_H P_C$ determina la concentración de oxígeno disuelto en C .

Tasa neta de producción de metano

$$\frac{dF_M}{dt} = k_6 \mu_2(S_2) X_2. \tag{7}$$

El comportamiento cinético, es no lineal y se produce debido a las velocidades de reacción, que se dan por: $\mu_1(S_1) = \mu_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}}$ - Cinética tipo Monod y $\mu_2(S_2) = \mu_{2max} \frac{S_2}{\frac{S_2^2}{K_{I2}} + S_2 + K_{S2}}$ - Cinética tipo Haldane que representa la tasa de rendimiento bacteriana asociadas a los dos bioprocesos.

Aquí las variables son:

- S_1 := Concentracion de sustrato organico [g/l]
- X_1 := Concentracion de bacteria acidogenica [g/l]
- S_2 := Concentracion acidos grasos volatiles [mmol/l]
- X_2 := Concentracion de bacteria metanogenica [g/l]
- A := Concentracion de alcalinidad [mmol/l]
- C := Concentracion del total carbono inorganico [mmol/l]
- F_M := Concentracion de metano [mmol/l d⁻¹].

El objetivo principal es la construcción de sub-super soluciones, positivas, del sistema formado por las ecuaciones (1) y (3) con orden inverso con respecto a una parte de las variables con condiciones iniciales sobre un intervalo de observación dado (Alcaraz et al., 1999).

Sus correspondientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u, v) & \text{en } I \\ v' &= g(x, u, v), & \text{en } I, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $I = [a, b]$, $u = X_1$, $v = S_1$. Cabe notar que la definición de sub-super solución de (8) depende en gran medida de las propiedades de monotonía de f y g . Por tanto siguiendo la notación de C.V. Pao's en (Pao, 1992) y los nuevos resultados presentados en (Delgado and Suárez, 2000), podemos clasificar (8) de acuerdo con su monotonía relativa, como sigue:

1. Sistema cuasi-monótono: f y g son no decrecientes en v y en u respectivamente, o f y g son no crecientes en v y en u respectivamente.
2. Sistema cuasi-monótono mixto: f es no decreciente en v y g es no creciente en u o viceversa.
3. Sistema no cuasi-monótono: si el sistema no cae en cualquiera de los casos anteriores.

El caso 1, implica la existencia de sub (u_*, v_*) y super (u^*, v^*) soluciones con orden en I .

$$u_* \leq u \leq u^*, \quad v_* \leq v \leq v^*.$$

Es imposible que se cumpla la cuasi-monotonía para el caso 2, por una simple transformación. En el caso 3, se requiere imponer algunas condiciones de regularidad sobre f y g . Nosotros empleamos el teorema de Müller, el cual generaliza la existencia de sub y super soluciones acopladas, para sistemas arbitrarios (McKenna and Walter, 1986).

En el sistema antes mencionado, el orden usual $(X_{10} \leq X_1^0)$ son considerados para las sub y super soluciones. Para la variable S_1 la situación es distinta porque se

presenta el caso opuesto $S_1^0 \leq S_{10}$. Consideramos la ecuación no lineal (Franco et al., 2003)

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I = [0, T], \quad T > 0 \tag{9}$$

satisface la condición

$$g(u(0), u(T)) = 0, \tag{10}$$

donde $f : I \times R \rightarrow R$ y $g : R^2 \rightarrow R$ son funciones continuas. Si $g(x, y) = x - c$ con $c \in R$, entonces (10) es la condición inicial

$$u(0) = c.$$

Definición 1.1 ((Franco et al., 2003)).

- $\omega \in C^1(I)$ es sub solución de (9) si

$$\omega'(t) \leq f(t, \omega(t)), \quad t \in I$$

con la condición

$$\omega(t) \leq \beta(t), \quad t \in I \tag{11}$$

- $\beta \in C^1(I)$ es super solución de (9) si

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad t \in I$$

con la condición

$$\beta(t) \leq \omega(t), \quad t \in I \tag{12}$$

Para $u, v \in C(I)$, $u \leq v$ definimos el conjunto

$$[u, v] = \{w \in C(I) : u(t) \leq w(t) \leq v(t), \text{ con } t \in I\}.$$

Definición 1.2 (Franco et al., 2003). Decimos que $\omega, \beta \in C(I)$ son sub y super soluciones acopladas para el problema (9)-(10) en orden directo si ω es una sub solución y β una super solución para la ecuación (9), con condición (11) y

$$\max\{g(\omega(0), \omega(T)), g(\beta(0), \beta(T))\} \leq 0 \leq \min\{g(\beta(0), \beta(T)), g(\beta(0), \omega(T))\}.$$

Definición 1.3 (Franco et al., 2003). Decimos que $\omega, \beta \in C(I)$ son sub y super soluciones acopladas para el problema (9)-(10) en orden inverso si ω es una sub solución y β una super solución para la ecuación (9), con condición (12) y

$$\max\{g(\omega(0), \omega(T)), g(\beta(0), \omega(T))\} \leq 0 \leq \min\{g(\beta(0), \beta(T)), g(\omega(0), \beta(T))\}.$$

Teorema 1.1 (Franco et al., 2003) Se asume que ω, β son sub y super soluciones acopladas en orden inverso para el problema (9)-(10). Adicionalmente se supone que las funciones

$$h_\omega(x) := g(x, \omega(T)), \quad h_\beta := g(x, \beta(T))$$

son monotónicas (ambas no crecientes o no decrecientes) en $[\beta(0), \omega(0)]$. Entonces existe al menos una solución del problema (1)-(3) en $[\beta, \omega]$.

A continuación enunciamos el teorema de Müller el cual generaliza la existencia de sub y super soluciones para sistemas acoplados.

Teorema 1.2 Teorema de Müller. (Walter, 1998) Sea $f(x, y) : D \rightarrow R^n$ satisfice una condición Lipschitz local en y . Sea $y, v, w : J = [\xi, \xi + a] \rightarrow R^n$ diferenciable, $v \leq w$ en J , $v(\xi) \leq y(\xi) \leq w(\xi)$, $y' = f(x, y)$, y

$$v'_i \leq f_i(x, z) \text{ para todo } z \in R^n \text{ tal que } v(x) \leq z \leq w(x), \quad z_i = v_i(x),$$

$$w'_i \geq f_i(x, z) \text{ para todo } z \in R^n \text{ tal que } v(x) \leq z \leq w(x), \quad z_i = w_i(x),$$

para $i = 1, \dots, n$. entonces $v \leq y \leq w$ en J .

El orden inverso de sub y super soluciones para el sistema no son previamente considerados para el sistema (1)-(7). El esquema de este documento comprende los siguientes momentos: definición de soluciones triviales del sistema completo, construcción de sub y super soluciones del subsistema en estudio y formulación del correspondiente teorema para la existencia de sub y super soluciones.

Definición 1.4 Una solución trivial del sistema (1) – (7) tiene la forma

$$\begin{aligned} E_1(S_{1in}, 0), E_2(S_{1in}, 0, S_{2in}, 0), E_3(0, 0, S_{2in}) \\ E_4(S_{1in}, 0, S_{2in}, 0, A_{in}), E_5(A_{in}), E_6(0, S_{2in}, 0) \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = S_{1in} \\ S_2 = S_{2in}, A = A_{in}, C = C_{in}, F_M = 0 \end{aligned}$$

No consideramos otras posibilidades de soluciones triviales en este documento. Un enfoque similar se puede ver en (Benyahia et al., 2012).

2. Sub y super soluciones para el problema de valor inicial (14)

Estamos interesados en soluciones del sistema no lineal con condiciones iniciales, el cual modela la dinámica de la biomasa y el sustrato en la acidogénesis.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \left(\mu_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S_1}} - \alpha D \right) X_1 && \triangleq F(t, X_1(t), S_1(t)), \\ \frac{dS_1}{dt} &= D(S_{1in} - S_1) - k_1 \mu_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S_1}} X_1 && \triangleq G(t, X_1(t), S_1(t)), \\ X_1(0) &= c_1, \\ S_1(0) &= c_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Donde $t \in [0, T] = I$, con $T > 0$ y F, G son funciones clase $C^0(I) = C(I)$, es decir, funciones contínuas en I .

Definición 2.1 (Sub-super solución). *Un par $[(X_{10}, S_{10}), (X_1^0, S_1^0)]$ es llamado*

(a) *Se dice una sub-super solución del problema (14), si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$(X_{10}, S_{10}) \in C^1(I), \quad (X_1^0, S_1^0) \in C^1(I), \quad t \in I$$

$$\dot{X}_{10} - F(t, X_{10}, S_{10}) \leq 0 \quad (\text{sub}) \quad (15a)$$

$$\dot{X}_1^0 - F(t, X_1^0, S_1) \geq 0 \text{ en } I, \quad \forall S_1 \in [S_1^0, S_{10}], \quad (\text{super}) \quad (15b)$$

$$\dot{S}_{10} - G(t, X_1, S_{10}) \leq 0 \quad (\text{sub en orden inverso}) \quad (15c)$$

$$\dot{S}_1^0 - G(t, X_1, S_1^0) \geq 0 \text{ en } I, \quad \forall X_1 \in [X_{10}, X_1^0] \quad (\text{super en orden inverso}) \quad (15d)$$

y con condiciones iniciales

$$X_{10}(0) \leq c_2 \leq X_1^0(0), \quad S_1^0(0) \leq c_1 \leq S_{10}(0); \quad (15e)$$

(b) *Se dice una sub-sub solución del problema (14), si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\dot{X}_{10} - F(t, X_{10}, S_{10}) \leq 0 \text{ en } I$$

$$\dot{S}_0 - G(t, X_{10}, S_{10}) \leq 0 \text{ en } I$$

y con condiciones iniciales $S_1^0(0) \leq c_1 \leq S_{10}(0)$;

(c) *Se dice una super-super solución del problema (14), si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\dot{X}_1^0 - F(t, X_1^0, S_1^0) \geq 0 \text{ en } I$$

$$\dot{S}_1^0 - G(t, X_1^0, S_1^0) \geq 0 \text{ en } I$$

con $X_{10} \leq X_1^0, \quad S_1^0 \leq S_{10}$ en I .

Definición 2.2 *Las funciones $\Phi(t, t_{S_{1i}}, \mu_{1max}, K_{S_1}, D, \alpha), \Phi(t, t_{X_{1i}}, D, S_{1in}, k_1, \mu_{1max}, K_{S_1})$ llameremos una solución semitrivial del problema (14),*

Si $\Phi(t, t_{S_{1i}}, \mu_{1max}, K_{S_1}, D, \alpha)$ es una solución de ODE:

$$\dot{X}_1 = \left(\mu_{1max} \frac{t_{S_{1i}}}{t_{S_{1i}} + K_{S_1}} - \alpha D \right) X_1 \quad (16)$$

y si $\Phi_1(t, t_{X_{1i}}, D, S_{1in}, k_1, \mu_{1max}, K_{S_1}, \alpha)$ es una solución de la siguiente ODE:

$$\dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) + k_1 \mu_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S_1}} t_{X_{1i}}. \quad (17)$$

Aquí $t_{S_{1i}}, i = 1, 2, 3$ y $t_{X_{1i}}, i = 1, 2, 3$ son respectivamente, los indicadores de soluciones semitriviales $\Phi(t, t_{S_{1i}}, \mu_{1max}, K_{S_1}, D, \alpha)$ y $\Phi_1(t, t_{X_{1i}}, D, S_{1in}, k_1, \mu_{1max}, K_{S_1})$ definidas por la siguiente vía:

Si $S_1 = S_{1in}$, entonces $t_{S_{11}} = S_{1in}$;

Si $S_1 = S_1^0$, entonces $t_{S_{12}} = S_1^0$ es una super solución del problema (17);
 Si $S_1 = S_{10}$, entonces $t_{S_{13}} = S_{10}$ es una sub solución del problema (17);
 Si $X_1 = 0$, entonces $t_{X_{11}} = 0$;
 Si $X_1 = X_1^0$, entonces $t_{X_{12}} = X_1^0$ es una super solución del problema (16);
 Si $X_1 = X_{10}$, entonces $t_{X_{13}} = X_{10}$ es una sub solución del problema (16).

De la Definición 2.2, obtenemos los diferentes tipos de soluciones semitriviales de las ecuaciones del sistema (14):

$$\dot{X}_1 = \left(\mu_{1max} \frac{S_{1in}}{S_{1in} + K_{S_1}} - \alpha D \right) X_1 \quad (18a)$$

$$\dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) \quad (18b)$$

para (X_1, S_1) con orden de las sub-super soluciones así

$$X_{10}(t) \leq X_1^0(t), \quad S_1^0(t) \leq S_{10}(t).$$

Teorema 2.1 Se asume que F y G satisfacen la condición Lipschitz local en X_1, S_1 con la propiedad de cuasi-monótona mixta: $\frac{\partial F}{\partial S_1} > 0$, $\frac{\partial G}{\partial X_1} < 0$ y existe un par (X_{10}, S_1^0) , (X_1^0, S_{10}) de sub-super, super-sub, respectivamente, soluciones del sistema (14). Entonces existe al menos una solución (X_1, S_1) de (14) tal que

$$X_{10} \leq X_1(t) \leq X_1^0, \quad S_1^0 \leq S_1(t) \leq S_{10}, \quad t \in I.$$

Prueba.

Introducimos el espacio

$$K \equiv [X_{10}, X_1^0] \times [S_1^0, S_{10}] \subset E \equiv C(I) \times C(I).$$

K es un cerrado, acotado y un conjunto convexo en E . Sea $\lambda > 0$ y consideremos el problema modificado

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1(t) + \lambda X_1 &= F^*(t, X_1(t), S_1(t)), \quad t \in I \\ X_1(0) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_1(t) + \lambda S_1 &= G^*(t, X_1(t), S_1(t)), \quad t \in I \\ S_1(0) &= c_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$F^*(t, X_1, S_1) = \begin{cases} F(t, X_1, S_1) + \lambda X_1^0, & \text{si } X_1^0 < X_1 \\ F(t, X_1, S_1) + \lambda X_1, & \text{si } X_{10} \leq X_1 \leq X_1^0 \\ F(t, X_1, S_1) + \lambda X_{10}, & \text{si } X_1 < X_{10}. \end{cases}$$

and

$$G^*(t, X_1, S_1) = \begin{cases} G(t, X_1, S_1^0) - \lambda S_1^0, & \text{si } S_1^0 < S_1 \\ G(t, X_1, S_1) - \lambda S_1, & \text{si } S_1^0 \leq S_1 \leq S_{10} \\ G(t, X_1, S_{10}) - \lambda S_{10}, & \text{si } S_{10} < S_1. \end{cases}$$

and

$$p(t, x) = \max \{ X_{10}, \min \{ x, X_1^0 \} \}.$$

$$p_{\text{reverse}}(t, x) = \max \{S_1^0, \min \{x, S_{10}\}\}.$$

Note que si (X_1, S_1) es una solución de (15a)-(15e) entre X_{10} y X_1^0 , y también entre S_1^0 y S_{10} , entonces (X_1, S_1) es una solución de (14).

Consideremos el problema (15a)-(15e) y definimos el mapeo

$$L : C(I) \longrightarrow C_0(I) \times \mathbb{R}$$

$$N : C(I) \longrightarrow C_0(I) \times \mathbb{R}$$

por

$$[L X_1](t) = \left(X_1(t) - X_1(0) + \lambda \int_0^t X_1(s) ds, X_1(0) \right)$$

y

$$[N X_1](t) = \left(\int_0^t F^*(t, X_1(t, x), p(0, x)) \right).$$

Claramente N es continua y compacta (por el teorema Arzelá-Ascoli). Por otro lado, resolviendo (19) es equivalente a encontrar un punto fijo de $L^{-1}N : C(I) \longrightarrow C(I)$. Ahora, por el teorema del punto fijo de Schauder's garantizamos la existencia de al menos un punto fijo desde $L^{-1}N$ que también es continua y compacta. De aquí solo resta mostrar que X_1 satisface

$$X_{10}(t) \leq X_1(t) \leq X_1^0(t), \quad t \in [0, T].$$

Sea $s_0 \in [0, T]$. Se assume que $X_{10} - X_1^0$ alcanza un máximo positivo, de s_0 en $[0, T]$ en s_0 . Entonces existe un $\tau \in (0, s_0)$ tal que

$$0 \leq X_{10}(t) - X_1^0(t) \leq X_{10}(s_0) - X_1^0(s_0), \quad \text{para todo } t \in [\tau, s_0].$$

Esto produce una contradicción ya que

$$\begin{aligned} X_1^0(s_0) - X_1^0(\tau) &\leq X_{10}(s_0) - X_{10}(\tau) = \int_{\tau}^{s_0} [F(s, X_1^0(s)) - \lambda(X_{10}(s) - X_1^0(s))] ds \\ &< \int_{\tau}^{s_0} (X_1^0)'(s) ds = X_1^0(s_0) - X_1^0(\tau). \end{aligned}$$

El caso s_0 se prueba con condición cuasi monótona mixta en F y condición de Lipschitz en X_1 . Consecuentemente $X_1(t) \leq X_1^0(t)$ para todo $t \in [0, T]$.▲

En forma similar, uno puede mostrar que $X_{10}(t) \leq X_1(t)$, en I . La prueba del Teorema 2,1 con orden inverso de super-sub soluciones en la variable S_1 ($S_1^0 \leq S_{10}$) para el problema modificado (20) con $p_{\text{reverse}}(t, x)$ es análogo a la prueba de la primera parte del Teorema 2,1 con orden normal en la variable X_1 ($X_{10} \leq X_1$) para el problema modificado (19).

2.1. Soluciones semitriviales S_1 y X_1

Considerando en el sistema (14) la solución trivial $E_1(0, S_{1in})$ definida en (13) y buscamos soluciones analíticas de la ecuación lineal (15d)

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} - D(S_{1in} - S_1) &= 0, \\ S_1 &= S_{1in} - [S_{1in} - S_1(0)] \exp(-Dt). \end{aligned} \tag{21}$$

Cuando $S_{1in} > S_1(0)$ la gráfica de la solución para $t \rightarrow \infty$ decrece asintóticamente hacia el valor S_{1in} . Y para $S_{1in} < S_1(0)$ la gráfica de la solución para $t \rightarrow \infty$ crece asintóticamente hacia el valor S_{1in} .

Sin embargo probaremos el método de sub-super soluciones. Tomamos $\epsilon > 0$, entonces la solución

$$S_1 = S_{1in} - [S_{1in} - S_1(0)] \exp(-Dt) + \epsilon.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} - D(S_{1in} - S_1) &\geq 0. \\ D(S_{1in} - S_1) \exp(-Dt) - D(S_{1in} - S_1) \exp(-Dt) + D\epsilon &\geq 0. \end{aligned}$$

Entonces $D\epsilon \geq 0$ para $D > 0$ y la solución $S_1 = S_1^0$ es una super solución de (18b). Si $\epsilon < 0$, entonces S_{10} es una sub solución de (18b).

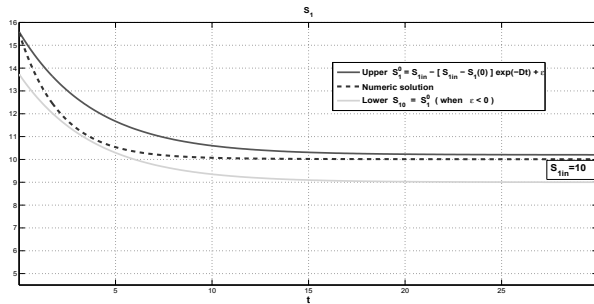


Figura 1: Tendencia gráfica de S_{1n} cuando $t \rightarrow \infty$

La Figura 1 muestra que la solución tiende al valor S_{1in} cuando $t \rightarrow \infty$. En el proceso, esto representa que la bacteria se alimenta del sustrato S_1 al pasar el tiempo.

Los parámetros de simulación fueron tomados de (Bernard et al., 2001). La solución del problema del valor inicial de la ecuación lineal (18a) con condición $X_1(0)$ es

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(0) \exp\left(\left(\mu_{1max} \frac{S_{1in}}{S_{1in} + K_{S_1}} - \alpha D\right) t\right) \\ X_1 &= X_1(0) \exp(m t) \quad \text{con} \quad m = \frac{\mu_{1max} S_{1in}}{S_{1in} + K_{S_1}} - \alpha D. \end{aligned}$$

Parámetro	Valor	Unidad	SD
$S_1(0)$	5	[g/l]	
D	0.395	[d ⁻¹]	0.135
S_{1in}	10	[g/l]	6.4

Tabla 1: Parámetros para la simulación. (SD = desviación estándar)

Tomamos $\Gamma > 0$ por lo tanto, la solución

$$X_1^0 = X_1 + \Gamma \quad y \quad X_{10} = X_1 - \Gamma \tag{22}$$

son una super y una sub solución de (18a) respectivamente. La Figura 2 muestra que

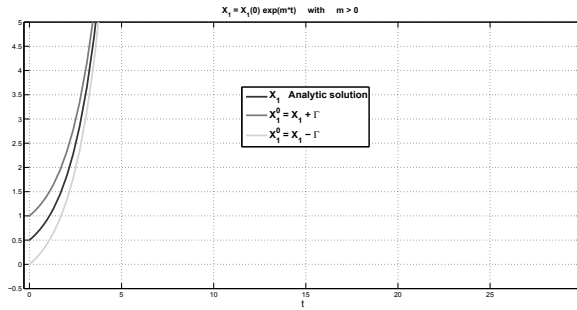


Figura 2: Tendencia gráfica de $X_1 \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, con $m > 0$. Los valores de los parámetros son tomados de la Tabla 1, con condición inicial $X_1(0) = 0, 5$.

si $m > 0$, entonces la solución $X_1 \rightarrow \infty$, lo cual no es representativo en el proceso.

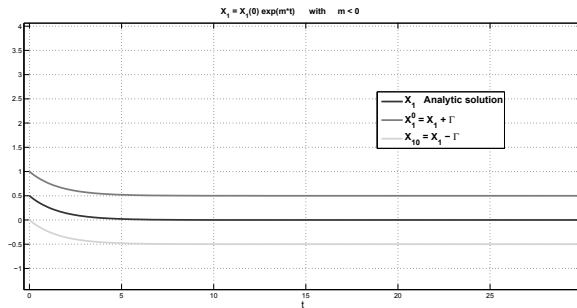


Figura 3: Tendencia gráfica de $X_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, con $m < 0$. Los valores de los parámetros son tomados de la Tabla 1, con condición inicial $X_1(0) = 0, 5$.

La Figura 3 muestra que, si $m < 0$, entonces la solución $X_1 \rightarrow 0$. Este comportamiento se conoce como *condición de lavado*.

Ahora consideramos la sub-super solución de la parte no lineal de (15c)-(15d), de la definición 2.1 para S_1

$$\begin{aligned} \dot{S}_1^0 - D(S_{1in} - S_{10}) + k_1 \mu_{1max} \frac{S_{10}}{S_{10} + K_{S_1}} X_1^0 &\leq 0 \quad (\text{sub}) \\ \dot{S}_1^0 - D(S_{1in} - S_1^0) + k_1 \mu_{1max} \frac{S_1^0}{S_1^0 + K_{S_1}} X_{10} &\geq 0 \quad (\text{super}) \end{aligned} \quad (23)$$

Nosotros analizamos el caso cuando donde $X_{10} \neq 0$, para la super-solución de S_1 , entonces

$$\implies \frac{dS_1^0}{dt} = D(S_{1in} - S_1^0) - \left[\frac{k_1 \mu_{1max} S_1^0}{S_1^0 + K_{S_1}} \right] X_{10}$$

se toma X_1^0 de (22):

$$\frac{dS_1^0}{dt} = D(S_{1in} - S_1^0) - \left[\frac{k_1 \mu_{1max} S_1^0}{S_1^0 + K_{S_1}} \right] [X_1(0) \exp(m t) - \Gamma]$$

tenemos $V = (S_1^0 + K_{S_1})^{-1}$ de donde se obtiene la ecuación de Abel de primer tipo

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = D \cdot V + [-D(S_{in} + K_{S_1}) + k_1 \mu_{1max} X_1(0) \exp(m t) - k_1 \mu_{1max} \Gamma] \cdot V^2 \\ + [-k_1 \mu_{1max} X_1(0) K_{S_1} \exp(m t) + k_1 \mu_{1max} \Gamma] \cdot V^3, \end{aligned} \quad (24)$$

la cual resolvemos en forma numérica para representar la gráfica de la solución S_1^0 .

Aquí la dificultad está en encontrar soluciones de la ecuación diferencial de Abel (24) de primer tipo. La solución general de la ecuación de Abel (24), es un problema abierto. No existen resultados sobre la construcción de soluciones generales analíticas de la ecuación de Abel (24) en forma evidente; sin embargo, en (Salinas et al., 2013) se propone un nuevo método constructivo de soluciones particulares analíticas para la ecuación de Abel (24) de primer tipo, en forma evidente. La Figura 4 muestra que la super solución S_1^0 tiene orden inverso. En el proceso esto representa que la bacteria acidogénica X_1 se alimenta del sustrato S_1 , al pasar el tiempo.

Ahora buscamos una super-solución semi-trivial X_1^0 de la ecuación (15b) y (21). De la Definición 2.1 para X_1^0, S_1^0

$$\dot{X}_1^0 - \left(\mu_{1max} \frac{S_1^0}{S_1^0 + K_{S_1}} - \alpha D \right) X_1^0 \geq 0$$

se toma (16) y (21) en (15b), con $c_8 = S_{1in} - S_1(0)$ obtenemos

$$\implies \dot{X}_1^0 - \left(\mu_{1max} \frac{S_{1in} - c_8 \exp(-Dt)}{S_{1in} - c_8 \exp(-Dt) + K_{S_1}} - \alpha D \right) X_1^0 = 0$$

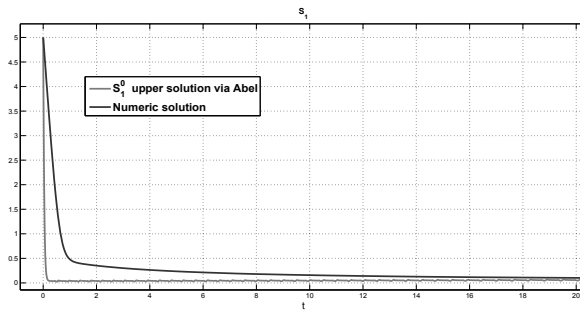


Figura 4: La super-solución S_1^0 tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Los valores de los parámetros son tomados de la Tabla 1, con condición inicial $S_1(0) = 0, 5$.

entonces

$$X_1^0 = c_9 * \frac{[c_8 \exp(-Dt) (S_{1in} + K_{S_1} - c_8 \exp(-Dt))]^{\frac{\mu_{1max} S_{1in}}{D(S_{1in} + K_{S_1})}}}{[S_{1in} + K_{S_1} - c_8 \exp(-Dt)]^{\frac{\mu_{1max}}{D}}} * \exp(-\alpha D t)$$

y su representación gráfica es:

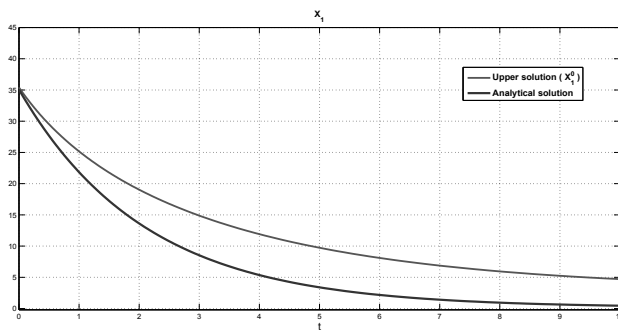


Figura 5: La gráfica de la solución X_1 tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Los valores de los parámetros son tomados de la Tabla 1, con condición inicial $X_1(0) = 0, 5$.

La Figura 5 muestra que la super solución X_1^0 presenta la *condición de lavado*.

3. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un estudio de la existencia de sub y super soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela la etapa de

acidogénesis el proceso de la DA. Se considera orden inverso de sub y super soluciones en una parte de las variables. Se encontró que la conexión entre la solución superior de la variable sustrato (S_1) con la solución de la ecuación de Abel.

Agradecimientos. El primer autor es parcialmente apoyado por el SNI-CONACYT. El primer autor también agradece su apoyo parcial al programa de Doctorado en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas en la Universidad Veracruzana de México.

4. Referencias

- Alcaraz, V., Genovesi, A., Harmand, J., González, V., Rapaport, A., and Steyer, J. P. (1999). Robust exponential nonlinear interval observers for a class of lumped models useful in chemical and biochemical engineering. Application to a wastewater treatment process. *International Workshop on Application of Interval Analysis to Systems and Control, MISC'99, Girona, Espagne*, pages 24–26.
- Benyahia, B., Sari, T., Cherki, B., and Harmand, J. (2012). Bifurcation and stability analysis of a two step model for monitoring anaerobic digestion processes. *Journal of Process Control*, 22(6):1008–1019.
- Bernard, O., Sadok, Z. H., Dochain, D., Genovesi, A., and Steyer, J.-P. (2001). Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process. *Biotechnology and Bioengineering*, 75(4):424–438.
- Delgado, M. and Suárez, A. (2000). Existence of solutions for elliptic systems with Hölder continuous nonlinearities. *Differential and integral equations*, 13(4,6):453–477.
- Franco, D., Nieto, J. J., and O'Regan, D. (2003). Upper and lower solutions for first order problems with nonlinear boundary conditions. *Extracta Mathematicae*, 18(2):153–160.
- Jewell, W. (1987). Anaerobic sewage treatment. *Environmental Science and Technology*, 21(1):9–21.
- Lorenzo, Y. and Obaya, M. C. (2005). La digestión anaerobia. aspectos teóricos. parte I. *ICIDCA. Sobre los Derivados de la Caña de Azúcar*, 39(1):35–48.
- McKenna, P.-J. and Walter, W. (1986). On the Dirichlet problem for elliptic systems. *Applicable Analysis*, 21:207–224.
- Pao, C.-V. (1992). *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press, New York.
- Salinas, E., Muñoz, R., Sosa, J.-C., and López, B. (2013). Analysis to the solutions of Abel's differential equations of the first kind under transformation $y = u(x)z(x) + v(x)$. *Applied Mathematical Sciences*, 7(42):2075–2092.

Walter, W. (1998). *Ordinary differential equations*. Springer-Verlag, New York.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Maximiliano Machado-Higuera & Alexander V. Sinitsyn. Existencia de super y sub soluciones en un modelo de acidogenesis para la producción de biogás Revista Tumbaga (2014), 9 vol. I, 109-122	Día/mes/año 04/11/2013	Día/mes/año 12/03/2014