A DENSIDADE DOS NÚMEROS REAIS: CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Benedito Antonio Da Silva
benedito@pucsp.br
Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUC/SP)
Cristina Berndt Penteado
crispenteado@uol.com.br
Fundaçao Armando Alvarez Penteado, Facultad de Administración

Recibido: 14/08/2009 **Aceptado:** 03/03/2010

Resumen

Este artículo presenta el tema de la densidad de los números reales y discute las concepciones de maestros de la enseñanza secundaria sobre esta propiedad. No describe solamente las concepciones, pero también las reacciones de los maestros frente a la proposición de dos procedimientos para obtener un numero real entre otros dos: el procedimiento de la media aritmética de los números dados y un procedimiento inspirado en el método de la diagonalización usado por Cantor para probar que el conjunto de los números reales entre cero y uno, no es numerable. A partir del cuestionamiento sobre la posibilidad de comenzar los estudios ya en la enseñanza secundaria, que puedan contribuir para la comprensión de la propiedad de densidad de los números reales, relata la disponibilidad manifestada por los participantes de la investigación en usar la intervención propuesta en sus clases, por juzgarla adecuada y exequible.
Palabras clave: números reales y irracionales, densidad de los números reales; representación decimal infinita; recta real

Resumo

O artigo aborda o tema da densidade dos números reais e discute as concepções de professores do Ensino Médio sobre tal propriedade. Descreve não só as concepções, mas também as reações dos professores frente à proposta de dois procedimentos para a obtenção de um número real entre dois outros: o procedimento da média aritmética dos números dados e um procedimento inspirado no método da diagonalização utilizado por Cantor para provar que o conjunto dos números reais entre zero e um, não é enumerável. A partir do questionamento sobre a possibilidade de se iniciar estudos, já na Educação Básica, que possam contribuir para a compreensão da propriedade da densidade dos números reais, relata a disponibilidade manifestada por participantes da investigação em utilizar a intervenção proposta em suas aulas, por julgarem-na adequada e exeqüível.
Palavras chave: números racionais e irracionais; densidade dos números reais; representação decimal infinita; reta real.

THE DENSITY OF REAL NUMBERS: CONCEPTIONS OF TEACHERS OF BASIC EDUCATION

Abstract

The paper discusses the density of real numbers and the conceptions of teachers of high school on this property. Describes not only the concepts but also the reactions of teachers against the proposed two procedures for obtaining a real number between two others numbers: the procedure of the arithmetic mean of two supplied and a procedure based on the Cantor's diagonalization argument used to prove that the set of real numbers between zero and one, have no countable enumeration. From the question on the possibility to initiate studies, as in Basic Education, which may contribute to the understanding of the density property of real numbers, reports the readiness expressed by participants in the research using the proposed intervention in their classes by judging if it is appropriate and feasible.

Keywords: rational and irrational numbers; density of the real numbers; infinite decimal representation; straight line which represents real numbers.

Introdução

O trabalho apresenta concepções de professores do Ensino Médio a respeito da densidade dos números reais, estudadas en Penteado (2004). A noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais.

No desempenho de nossas funções de professores nos deparamos frequentemente com situações em que os alunos questionam, por exemplo, se 1,60 é maior ou não que 1,6 e qual seria o sucessor de 2,5. Estas questões nos incentivam a estudar e pesquisar a respeito de números reais e a reta real para podermos tentar desempenhar melhor nosso papel de educadores.

Pesquisas como as de Robinet (1993), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); e Tirosh (1985) apontam dificuldades de alunos no estudo de conteúdos matemáticos devido à falta de conhecimento a respeito de números reais e de suas propriedades como, por exemplo, a caracterização dos números racionais e dos irracionais, e a noção de densidade dos reais.

Robinet realizou sua pesquisa na França, com alunos dos equivalentes últimos anos do Ensino Médio brasileiro e o primeiro ano de graduação, objetivando investigar que modelos de números reais os alunos possuíam e como se dá a interação entre suas concepções e a aprendizagem das noções de Análise Matemática.

A pesquisa de Fischbein, et al, teve por objetivo avaliar, em que medida, certas dificuldades na conceituação dos irracionais como, por exemplo, a existência de grandezas incomensuráveis e o fato de o conjunto dos racionais ser denso no conjunto dos reais e não cobrir a reta toda (isto é, na reta existem "buracos" que são preenchidos pelos números irracionais), constituem obstáculos de aprendizagem futura. Esta pesquisa foi realizada em Tel Aviv com estudantes que estavam terminando o Ensino Médio e também com iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática.

A pesquisa de Tirosh teve como objetivo avaliar as concepções que os alunos têm sobre o infinito. Também foi realizada em Tel Aviv com estudantes entre 11 e 17 anos e sua autora visou apresentar sugestões que poderiam possibilitar a compreensão dos alunos sobre o infinito, principalmente o atual.

As duas primeiras pesquisas trouxeram à tona a forte idéia que os estudantes descrevem número irracional como sendo aquele que possui uma representação decimal infinita, mesmo sendo uma representação periódica. A terceira explicitou o fato que os alunos estendam para conjuntos infinitos propriedades de conjuntos finitos, como por exemplo 'a parte é maior que o todo', ao afirmarem que existem mais números naturais que números ímpares, já que estes formam um subconjunto próprio dos primeiros A dificuldade de distinguir a cardinalidade do conjunto dos números naturais e a dos reais esteve presente nas três pesquisas.

A associação de número irracional a um número que não é exato apareceu nas duas primeiras pesquisas. A concepção de que um número irracional é aquele que não é inteiro ou que é negativo foi revelada na pesquisa de Fischbein et al, na qual também se percebeu que os alunos consideram que duas grandezas são sempre comensuráveis alegando que basta diminuir a unidade o quanto for necessário para ser um submúltiplo comum das grandezas em questão. Também nas duas primeiras foi revelado que o modelo geométrico da reta não corresponde à reta de Dedekind, pois suas propriedades permaneciam válidas mesmo quando a reta fosse composta apenas por racionais.

Motivados por essas investigações, pesquisadores brasileiros levaram a cabo dois estudos o primeiro realizado por Igliori e Silva (2001), foi desenvolvido com alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e com finalistas do curso de licenciatura em Matemática, de uma universidade em São Paulo, evidenciou que os alunos investigados, ao representarem números decimais na reta real, não consideraram a densidade da mesma.

Essa pesquisa desvelou também a confusão entre os conceitos de número racional e irracional quanto à representação decimal e quanto à existência de sucessor de número real. Alguns alunos descreveram número irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda, as raízes. Identificaram número racional como sendo exato ou inteiro. Percebeu-se também que o símbolo de reticências causa instabilidade nas respostas, mesmo se houver um número finito de casas, associando-o a um número irracional, como por exemplo, na representação 1,333...3, que indica a última casa decimal, apesar de não se conhecerem todos os algarismos entre a terceira e a última casa decimal. A irracionalidade foi considerada como sendo sinônimo de número negativo em algumas respostas. A grande maioria dos entrevistados não identificou a igualdade entre as representações 1,999... e 2. Artigue (1995, p. 113, tradução nossa) também descreve que:

> Em muitas investigações, se tem pedido aos estudantes universitários que comparem os números 0,9999... e 1. A frequência das respostas erradas bem como a força das convicções que nelas se manifestam, demonstra a dificuldade que existe para perceber a expressão 0,9999... como sendo algo diferente de um processo dinâmico que não se detém jamais, e [demonstra a dificuldade] para lhe atribuir a designação de um número.

A pesquisa concluiu que a maioria dos alunos identifica a existência de infinitos números racionais entre dois racionais em um determinado intervalo da reta, mas não a existência de infinitos irracionais neste mesmo intervalo. Esse resultado nos alerta que a densidade dos números reais não é de todo familiar a esses estudantes.

Uma segunda pesquisa brasileira realizada por Soares, Ferreira, e Moreira (1999) com 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC identificou que um número irracional é aquele que não é exato, ou que possui infinitas casas decimais, isto é, associam os irracionais a tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido, ou ainda, número irracional é associado à imprecisão e a não exatidão. Assim como foi revelado nas pesquisas de Igliori e Silva (2001) e de Tirosh (1985), entre esses estudantes existe a noção de que toda medida é expressa por um número racional. Também nesse estudo, muitos alunos não expressaram a existência de números irracionais entre dois racionais, dados no registro de representação fracionária e ainda associaram as dízimas periódicas com a irracionalidade.

Destacamos ainda que nessas investigações foram identificadas as seguintes concepções: a de que duas grandezas quaisquer são sempre comensuráveis, que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais, a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos reais, a afirmação de que existem mais números naturais que ímpares, a identificação entre as representações 3,1416 e π e também entre 2,7182 e *e*, a classificação de 3,1416 como sendo a de um número irracional, a identificação entre uma representação fracionária com número racional, independentemente da natureza do numerador e do denominador, a não identificação das representações 1,999... e 2 como sendo de um mesmo número, a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes, a confusão entre número e um valor aproximado deste atribuindo-lhes o mesmo significado, a transposição da noção de sucessor dos números naturais para os números reais, o desconhecimento da existência de infinitos números entre dois reais: a idéia de que um número racional é exato ou inteiro, que número irracional é aquele que possui uma representação decimal ilimitada ou um número que não é exato, que não é inteiro ou que é negativo e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Diante desse manancial de informações sobre a realidade do ensino e aprendizagem dos números reais nos indagamos se não seria possível inserir intervenções junto a alunos da Educação Básica que possam contribuir para a iniciação desses estudantes no estudo da construção de tais números. Decidimos focar nosso trabalho na associação do número com sua representação, na caracterização dos números racionais e irracionais e suas representações decimais, na densidade dos números reais, bem como na contribuição desta propriedade na construção do modelo de reta real, cada vez mais próximo da realidade. Estas dificuldades ainda estão presentes nas produções dos alunos apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) sugerirem a introdução do estudo de números irracionais já no 4º ciclo (a partir da 7ª série). Este documento, no que se refere aos conceitos e procedimentos, sugere que se criem oportunidades para a "constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do π, da $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ etc.)." (p.87).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (MEC, 2000, p.114 e 116) também sugerem a utilização de vários registros de representação, bem como a identificação de um objeto nas suas diferentes representações:

> Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez [...] Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto [...] Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, bem como, localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações [...] Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.

Assim sendo procuramos investigar quais concepções são explicitadas por professores do Ensino Médio a respeito da densidade do conjunto dos números reais, tanto a densidade do conjunto dos racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais. Analisamos como eles reagem frente a questões que discutem o conceito de densidade enfocando diferentes registros de representação.

Noções sobre a densidade dos números reais

Segundo Lima (1977, pp. 73-74): "O conjunto Q dos números racionais é denso em R. Também o conjunto R - Q, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais". Neste trabalho empregaremos o termo densidade no sentido dado por Caraça (1989, p. 56): "um conjunto é denso se entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto".

Até o século XVI predominavam as idéias gregas segundo as quais as quantidades tinham dois componentes disjuntos: o discreto (número) e o contínuo (grandeza). Estes componentes refletiram na Matemática como o estudo das grandezas e números, isto é, como o estudo da Geometria e da Aritmética. O conceito grego de número foi desenvolvido como um resultado de um processo de abstração aplicado ao mundo material (Boyer, 1974; Katz, 1993).

Este cenário mudou com o trabalho de Simon Stevin de Bruges (1548–1620), que, em 1585, publicou seu livro *L'Arithmetique* produzindo um avanço epistêmico no conhecimento matemático. Esta obra é um tratado sobre os aspectos teóricos e práticos da aritmética e apresenta uma nova conceituação: "número é aquilo através do qual os aspectos quantitativos de cada coisa são revelados" (Moreno – Armella; Waldegg, 2002, p.186). Desse modo, Stevin elimina a dicotomia entre o discreto e o contínuo, tornando essas componentes, propriedades circunstanciais do objeto quantificado. Por exemplo, segundo o autor, referindo-se a uma pessoa, o número "um" era discreto, entretanto ligado a uma jarda, o número "um" era contínuo. Deste modo não poderia haver distinção entre o objeto de estudo da Aritmética (discreto) e da Geometria (contínuo).

Também no ano de 1585, um pouco antes de *L'Arithmetique*, publicou um trabalho em que enfatizava o aspecto operacional, intitulado *De Thiende* (O décimo), apresentando uma sistematização com algumas inovações da notação decimal já conhecida na época. No mesmo ano apareceu uma versão em francês intitulada *La Disme* (Stevin, 1980), alcançando grande popularidade. Nesse trabalho "identificou grandeza e número, atribuindo propriedades numéricas a quantidades contínuas e continuidade a números" (Moreno – Armella; Waldegg, 2002, p.187). A partir daí, não era possível, para os matemáticos, separarem o conceito de quantidade de sua representação simbólica.

A nova representação, proposta por Stevin, era flexível, no sentido de lidar com problemas de quantidade discreta e simultaneamente com os problemas de divisibilidade. Esta representação que lidava com partes da unidade foi a notação decimal que acabou com a tensão entre o discreto e o contínuo.

Com o surgimento do problema da incomensurabilidade já no séc. IV a.C., Eudoxo propôs a utilização de aproximações para designar quantidades tais como, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado um; no entanto, foi Stevin que reconheceu tais aproximações como números, dando-lhes o status de número decimal. Para ele, número revelava a quantidade de cada coisa, assim operações aritméticas eram sustentadas ou apoiadas por transformações que eram praticadas sobre quantidades, considerando então, os resultados de operações aritméticas, feitas com números, como números. Foi encaminhada assim, a ampliação do domínio numérico. Deste modo propôs uma estrutura teórica baseada no processo de medida pelo qual um número é associado a uma grandeza.

Resumindo, foi estabelecido um conceito de número capaz de lidar com quantidades discretas e grandezas contínuas e também uma nova linguagem algébrica que enfatizava o estudo dos processos matemáticos. A contribuição de Stevin foi unificar as noções gregas de número discreto e grandeza contínua, por meio da introdução de decimais. O número e grandeza contínua tornaram-se integradas num mesmo conceito.

Apesar de não ter sido o inventor nem o primeiro a recomendar a utilização das frações decimais foi o primeiro a organizar o sistema divulgando-o entre o povo e os usuários de Matemática. Já em 1579, François Viète (1540–1603) havia recomendado com insistência o uso de frações decimais em vez de as sexagesimais. Mas foi Stevin quem as ensinou por meio de um sistema elementar e completo, concentrado nos décimos, centésimos, milésimos, etc., das frações como sendo numeradores inteiros, não escrevendo suas expressões decimais como um denominador; como fazia Viète. Em vez disso escrevia num círculo acima ou depois de cada dígito, a potência de dez, assumida como denominador. Segundo sua representação, o valor aproximado de π expressava-se como:

⓪ ① ② ③ ④ ou 3⓪1① 4②1③ 6④

3 1 4 1 6

Outra representação sugerida por Stevin encontrada em Dantzig (1970, p. 223) é:

$$24\ 3^{(1)}\ 7^{(2)}\ 5^{(3)},$$

para a representação atual de 24,375, fugindo da notação fracionária até então utilizada, isto é, $\frac{375}{1000}$. Aqui os círculos colocados acima dos dígitos são substituídos por parênteses acima e à direita dos mesmos e omitindo o círculo com o zero para indicar a parte inteira do número.

Stevin foi mais além ao sugerir que tais notações fossem usadas também para expoentes fracionários. Embora não tivesse usado a notação com índice fracionário, ele manifestou explicitamente que $\frac{1}{2}$ dentro de um círculo significava raiz quadrada e que $\frac{3}{2}$ dentro de um círculo indicaria a raiz quadrada de um cubo.

Sua obra possibilitou ensinar de uma maneira simples, todas as computações necessárias sem utilizar o registro fracionário, sendo que seu autor sugeriu que o Governo dos Países Baixos, sua pátria, adotasse o sistema decimal, antecipando o sistema métrico decimal, sendo assim responsável por chamar a atenção para o mundo do novo sistema de numeração.

Durante algum tempo acreditou-se que não existissem grandezas incomensuráveis. Isto é, que não haveria, por exemplo, dois segmentos que não admitissem uma unidade de comprimento, não importando quão pequena, que não coubesse um número inteiro de vezes em cada um deles. Desse modo, os números inteiros e as razões entre eles (ou seja, os números racionais), eram suficientes para medir todas as grandezas. Já na época de Pitágoras, no século V a.C., descobriu-se que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis, isto é, ficou estabelecida a impossibilidade de se medir a diagonal dispondo-se apenas dos números racionais. Este fato é uma visão geométrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$, medida da diagonal do quadrado de lado um. Para os gregos esta foi uma descoberta embaraçosa, pois em muitas de suas demonstrações geométricas eles supunham que dois segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade comum de comprimento.

Eudoxo (408-355 a.C.) resolveu temporariamente o problema da existência de números não racionais e foi o primeiro a lidar com grandezas incomensuráveis há 25 séculos. Sugeriu que para se conhecer um número irracional basta utilizar aproximações racionais deste número por falta e por excesso. Por exemplo, $\sqrt{2}$ pode ser aproximada por valores racionais como $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, isto significa que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$. Além disso, estabeleceu a definição de proporção que abrangia tanto as comensuráveis quanto as não comensuráveis. Esta definição conduziu a matemática grega a uma visão exclusivamente geométrica; exemplo disso pode ser encontrado nos *Elementos de Euclides,* em que número é representado por um segmento de reta.

Segundo Caraça (1989, p. 80), com o problema da incomensurabilidade, que só poderia ser explicado pelo conceito "quantitativo de infinito", isto é, a estrutura contínua da reta, cai a escola Pitagórica que acreditava que, dados dois segmentos quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sempre seria possível encontrar um terceiro $\overline{EF}$ contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, ou seja, que dois segmentos são sempre comensuráveis.

O tratamento geométrico da incomensurabilidade conduziu naturalmente para o tratamento aritmético e algébrico dos números irracionais. Desde Pitágoras até Weierstrass, os irracionais ocuparam as atenções de uma parte considerável do mundo que se empenhou em achar um valor aproximado para expressões como $\sqrt{2}$.

Esta fundamentação geométrica da matemática perdura praticamente até o século XIX, quando a geometria começa a dar sinais de insuficiência para a demonstração de certos resultados e parte-se, então, em busca de um sistema numérico que tenha todas as propriedades do geométrico.

Por muito tempo, pensou-se que o conjunto dos números racionais seria um modelo adequado para tomar o lugar do modelo geométrico, uma vez que possui propriedade da densidade, assim como reta (entre dois pontos quaisquer de uma reta existem infinitos pontos). Porém esse corpo numérico não "preenche" todos os pontos da reta: Existem pontos que correspondem a números, como por exemplo, a $\sqrt{2}$, isto é, o conjunto dos racionais não completa a reta. A ele falta uma propriedade essencial, a saber, a continuidade. Foi Dedekind que, retomando as idéias de Eudoxo, criou o modelo, procurado, construindo, pelo processo de cortes, o corpo dos números reais.

Para Niven (1984, p. 3) a geometria oferece um esquema simples e intuitivo para descrever os números reais, ou seja, os números necessários para medir, por exemplo, todos os possíveis comprimentos em termos de uma dada unidade. Se considerarmos a representação dos números no registro gráfico, como pontos de uma reta, qualquer segmento independente de seu tamanho contém, além de uma infinidade de pontos racionais, também muitos outros pontos como $\sqrt{2}, e, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \pi, \text{etc}$, medindo comprimentos que não podem ser expressos por números racionais. Estes números, chamados de irracionais, juntamente com os racionais constituem o conjunto dos números reais.

Considerando agora todos os números reais, todo ponto da reta corresponde a um número real e todo número real corresponde a um ponto da reta. O fato de todos os comprimentos poderem ser expressos como números reais, é conhecido como a propriedade da completude destes números. Tal propriedade é chamada de Axioma de Dedekind-Cantor: "É possível associar a qualquer ponto na reta um único número real e, inversamente, qualquer número real pode ser representado de maneira única por um ponto numa reta" (Dantzig, 1970, p. 157).

Cantor utilizou um argumento baseado no princípio posicional do sistema decimal para provar a não enumerabilidade do conjunto dos números reais. Este argumento que é conhecido como o processo diagonal de Cantor, o de troca de algarismos de uma representação decimal, deu-nos idéia para propor um procedimento para a obtenção de números irracionais entre dois reais quaisquer, nas atividades propostas em nosso trabalho de introdução ao estudo da densidade dos números reais.

Registros de representação semiótica

Como os objetos matemáticos são abstratos, não sendo diretamente acessíveis à percepção, necessitamos para sua apreensão o uso de uma representação. Para abordarmos, em nosso trabalho, a densidade do conjunto dos números reais, buscamos fundamentação na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Duval (2003, pp.14-15) afirma que: "O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar [...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.".

Afirma também (p. 13) que as representações semióticas têm importância primordial:

> É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Ora, a importância das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais. Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, o sistema de numeração decimal de posição oferece mais possibilidades que os sistemas grego ou romano de numeração e, no entanto, a aquisição desse sistema de numeração pelos alunos não é simples.

A representação é necessária e carrega o poder de substituir o objeto matemático, não sendo ele próprio. Duas representações de um mesmo objeto, em diferentes registros, não possuem o mesmo conteúdo, explicitam propriedades e aspectos diferentes em cada um deles. Segundo Duval, a articulação deles possibilitará o acesso à compreensão em Matemática. É importante mencionar que "um sucesso Matemático não corresponde a um sucesso cognitivo" (p.27), pois nem sempre quem manipula adequadamente os algoritmos tem total compreensão do significado do objeto envolvido.

A questão que motivou o autor a desenvolver sua teoria cognitiva foi: *Como se processa a aprendizagem em Matemática?*

O autor procura responder sua questão propondo que, pelo fato de haver várias representações para um mesmo objeto, a sua apreensão efetiva pode ser alcançada a partir do momento em que o sujeito consegue transitar de uma representação a outra utilizando os diferentes tipos de registros de representação: o numérico, algébrico, gráfico, geométrico ou da língua natural. Defende que uma condição necessária para possibilitar a apreensão do objeto matemático é a articulação entre, pelo menos, dois registros de representação semiótica. A representação semiótica é um sistema particular de signos, por exemplo, enunciados, em linguagem natural, notações, escritas algébricas, gráficos cartesianos, figuras geométricas, cada um com suas dificuldades próprias de significado e funcionamento.

As representações devem ser identificáveis, ou seja, análogas às descrições de um enunciado. Esta descrição por sua vez, respeita regras já estabelecidas culturalmente, tanto lingüísticas, como da construção de figuras e símbolos matemáticos, que devem ser utilizadas para reconhecer as representações. Uma representação será identificável se houver uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado. O sujeito deve, portanto, conhecer, compreender e saber como utilizar essas tais regras, por exemplo: o reconhecimento do sistema de numeração hindo-arábico, o desenho de uma figura ou a escrita de uma fórmula.

Surge então uma questão: Como um sujeito apreende um conceito por meio da coordenação de vários registros de representação?

Para responder a esta questão é necessário mobilizar dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão.

O tratamento é a transformação de uma representação no interior de um mesmo registro. Cada um dos registros possui um conjunto de regras específicas de tratamento que não necessariamente são válidas para outro. Os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo matemático, no sentido de que um mesmo objeto matemático pode ter duas representações diferentes, com seus respectivos tratamentos que também possuem graus diferentes de dificuldade. Por exemplo, no registro de representação decimal dos números racionais e irracionais: “o tratamento exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão destas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo.” (Damm, 1999, p. 145).

Exemplos:

a) tratamento no registro numérico fracionário: $\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) tratamento no registro numérico decimal: $0,5 = 0,50 = 0,500$

c) tratamento no registro numérico da notação científica:

$5.10^{-2} = 50.10^{-3} = 500.10^{-4}$

O tratamento, que é interno a um mesmo registro, pode auxiliar no procedimento de justificação ou prova.

A segunda transformação, chamada conversão, processa-se entre dois diferentes registros. A realização de conversões pode possibilitar a compreensão de vários aspectos de um mesmo objeto, pois cada representação explicita apenas alguns de seus aspectos componentes.

A coordenação entre ao menos dois registros de representação, segundo Duval, pode possibilitar a conceitualização, pois ela estabelece as relações entre os registros evidenciando vários pontos de vista diferentes de um mesmo objeto matemático. Isto não se alcança somente com a habilidade de realizar tratamentos em cada registro separadamente. Cada linguagem oferece possibilidades diferentes de representações e seus respectivos tratamentos, e a coordenação deles oferece possibilidades de novas aprendizagens.

Os diferentes registros que representam o mesmo número têm significação diferente e custos de tratamento também diferentes.

Exemplos de conversão:

a) do registro numérico fracionário para o decimal: $\frac{1}{3} = 0,333...$

b) do registro numérico fracionário para o decimal e deste para o da notação

científica: $\frac{1}{4} = 0,25 = 25.10^{-2}$

c) do registro numérico de porcentagem para o fracionário e deste para o

decimal: $10\% = \frac{10}{100} = 0,1$.

A conversão de registros, conserva a referência aos mesmos objetos e, assim, conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Porém, com ela pode ocorrer o fenômeno da não-congruência, ou seja, o fato de os sujeitos não reconhecerem o mesmo objeto representado em dois registros diferentes, em que a representação final não transparece na representação inicial.

No processo de aprendizagem, o fato de se realizar a conversão entre dois registros, em apenas um sentido não significa que a conversão no outro sentido seja automaticamente contemplada. Por exemplo, para a conversão do registro numérico fracionário, $\frac{1}{6}$ para o decimal 0,1666..., basta dividir o numerador pelo denominador. No entanto, para realizar a conversão deste registro para o fracionário, é necessário considerar a representação 0,1666... como a soma de termos de uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ (a partir do segundo termo):

$$0{,}1666... = 0{,}1 + 0{,}0666... = 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + ... =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + ... = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Deve haver tarefas tanto de produção, quanto de reconhecimento, isto é, identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais.

Numa visão mais ampla, a mobilização de diversos registros de representação pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais do indivíduo.

A intervenção

Nosso trabalho investigou, num primeiro momento, as reações explicitadas por professores do Ensino Médio frente a dois tipos de procedimentos distintos para o início de discussões a respeito da densidade dos números reais: primeiro, a obtenção de números racionais entre dois racionais dados, por meio de sua média aritmética; segundo, a obtenção de números irracionais entre dois reais dados, a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles. Este último procedimento foi inspirado no processo de diagonalização de Cantor, utilizado para demonstrar que o conjunto dos números reais entre zero e um, não é enumerável. Posteriormente, inquirimos os professores sobre a viabilidade de aplicação dessas atividades ou assemelhadas a seus alunos.

Para tanto foi realizada uma intervenção por meio da elaboração, aplicação e análise de uma seqüência de ensino, composta de dez atividades. Tanto na elaboração da seqüência como na análise dos dados obtidos, seguimos a sugestão de Duval que enfatiza a necessidade de se trabalhar com no mínimo dois registros de representação diferentes e de se realizar a articulação entre eles, criando, com isso, mais possibilidades para que ocorra a aquisição do conhecimento. Dessa forma, foram privilegiados os registros da língua natural, decimal, fracionário e gráfico, bem como a articulação entre eles.

O público alvo foi um grupo de professores participantes do PEC – Projeto de Educação Continuada, que visa capacitar os professores da rede pública por meio de palestras, aulas e oficinas totalizando 80 horas. A seqüência de ensino foi aplicada a onze professores do Ensino Médio, como oficinas pertencentes a este projeto, numa Instituição de Ensino na grande São Paulo. As atividades foram discutidas primeiramente em duplas e por fim no grupo todo, tendo sempre presente a preocupação de justificar todas as respostas apresentadas.

A expectativa era a de que estas atividades proporcionassem uma reflexão a respeito da propriedade da densidade da reta, pois sugerimos questões que podem fazer aflorar noções e particularidades dos números reais que, usualmente, não são enfatizadas no ensino básico.

As duas primeiras atividades foram inspiradas nas pesquisas citadas e contribuíram para que pudéssemos conhecer melhor nossos participantes, comparando suas concepções às já identificadas naquelas pesquisas. Aplicadas estas duas primeiras, que podemos chamar de diagnósticas, e analisados os dados obtidos, elaboramos então outras oito atividades com a meta de apurar as concepções dos professores frente a questões direcionadas à introdução do estudo da densidade dos números reais. A primeira delas foi norteadora para as atividades seguintes. A segunda, composta por catorze afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, além de diagnóstica também foi provocativa. Alguns participantes sentiram-se estimulados a pesquisar e estudar mais sobre este assunto.

A segunda atividade foi aplicada duas vezes: a primeira vez com caráter diagnóstico e para propiciar o início e o direcionamento da discussão para o foco da pesquisa. Dois meses após, foi reaplicada para averiguarmos se houve ou não alguma mudança de atitude, por parte dos sujeitos, após os procedimentos trabalhados anteriormente. As questões propostas nesta atividade eram gerais e mais teóricas do que as das demais atividades; talvez por este motivo, na resolução não foi utilizado prioritariamente o registro decimal. Para exemplificar um número racional, a maioria utilizou o registro fracionário e para um número irracional foi exclusivamente usado o registro simbólico. Estes registros utilizados podem evidenciar que os padrões de número irracional são principalmente aqueles associados às raízes quadradas não exatas e a π.

A segunda atividade, apresentada da língua natural, propiciou o desvelamento de dificuldade de compreensão do significado matemático de expressões como “um único número”, “exatamente um”, “não existe” e “um único”, dentre outras. Mesmo aqueles participantes que perceberam que este registro fornecia informações essenciais nestas expressões, às vezes sublinhando-as, demonstraram insegurança, ainda que o seu desempenho tenha sido muito melhor na reaplicação desta. A dificuldade no entendimento do enunciado foi minimizada com a discussão no interior de cada grupo. A maior delas foi justificar, por escrito, as decisões tomadas para classificar as afirmações em verdadeiras ou falsas. A maioria concordou com a fala de um sujeito*: “Colocar verdadeiro ou falso é fácil, o difícil é justificar depois”.*

As noções a respeito dos números racionais e irracionais explicitadas pelos professores foram muito semelhantes às apresentadas pelos sujeitos das pesquisas anteriormente citadas, fato que objetivávamos testar. Em seguida, aplicamos as outras oito atividades com o intuito de abordarmos questões específicas a respeito da densidade.

A terceira iniciou a discussão propriamente da questão da densidade. Nela sugeriu-se o procedimento usual da média aritmética, procedimento este que foi utilizado pelos professores, sem dificuldades, para encontrar números racionais entre outros dois, inclusive localizando-os na reta real. No caso em que cada um dos números era representado em registros diferentes (fracionário e decimal), os sujeitos fizeram a conversão para um mesmo registro, na maioria das vezes, para o decimal, antes de calcular a média entre eles.

Já, a partir da quarta atividade, este procedimento quase nunca era praticável, uma vez que nelas estavam envolvidos números irracionais. O novo procedimento então sugerido não suscitou muitas dúvidas, os trabalhos transcorreram tranqüilamente porque os participantes perceberam, sem grandes dificuldades, o processo de trocar um ou mais algarismos da representação decimal infinita um número para se obter a representação de um outro número, maior ou menor que aquele, conforme o que se pretenda e, desse modo, poder apresentar sempre um número irracional entre dois reais.

Durante todo o experimento, em muitas situações, pudemos constatar que os sujeitos associam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação. Aproveitamos todas essas ocasiões para discutir a questão da representação decimal infinita dos números reais. Para alguns dos participantes esta associação manifestou-se até o final do experimento, relacionando a representação decimal infinita, ou o sinal de reticências, com número irracional. Esta associação é evidenciada num comentário feito durante a discussão das questões da atividade IX:

"O racional é finito e o irracional é infinito".

Por outro lado, há a contestação dos acordos tácitos. Por exemplo, a preocupação com as reticências também ficou evidente no diálogo:

"0,222... não poderia ter outro número depois do dois?. O que garante que sempre é dois?"

"Também não sei, será que eu preciso escrever três vezes o '2' ou apenas uma vez?. Tem alguma regra?"

"Quando coloca os pontinhos é tudo igual."

"Não é isso não, senão sempre teríamos números racionais. Então 0,2... é o que?"

"0,2.... e 0,222... são iguais?"

"Acho que não, senão 0,456... seria 0,456456....".

Esta discussão parece indicar que este grupo percebeu que as reticências indicam infinitude e que pode tanto representar repetição de algarismos quanto a não repetição, dízimas periódicas ou não.

Destacamos também que um dos grupos questionou a biunivocidade entre os pontos da reta e os números reais, argumentando que se um número tem representação decimal infinita, o ponto a ele correspondente "pode variar" de acordo com o número de casas decimais representadas. Aqui fica evidenciada a identificação do número com sua representação, pois dependendo da quantidade de casas decimais escritas, cada representação de um mesmo número parece referir-se a números diferentes.

Em algumas respostas, a linguagem utilizada pelos sujeitos, muitas vezes, é desprovida de precisão matemática como, por exemplo, ao expressar que entre os números $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$, um grupo escreveu que há: "$\frac{3{,}1}{11}$ e $\frac{3{,}2}{11}$", sem o cuidado de representar o número racional como quociente de dois números inteiros e ainda um outro que representou 1,242425 como $\frac{1{,}242425}{1000000}$, mantendo a vírgula no numerador.

Outro exemplo pode ser encontrado no comentário: "É irracional porque não sabemos o último número de 0,123456789101112....", em que os participantes deste grupo usaram "último número" possivelmente querendo se referir a algarismo, pois se o número tivesse representação decimal finita seria racional e não irracional.

Ainda um outro grupo, ao ser solicitada a ordenação de três números, apresentou o seguinte: "1,333 , 1,3330 , 1,3331". Não evidenciando a percepção de que as duas primeiras representações são de um mesmo número, associando duas representações diferentes a dois números distintos.

Esta ocorrência está em desacordo com o que preceitua Duval, ao explicitar que uma representação não deve ser tomada no lugar do objeto. Segundo esse autor, tal associação pode dificultar a apreensão do conhecimento.

A alegação para um grupo de que 3,1415... era menor que 3,141555..., provavelmente indica que não percebeu que, pelo fato de não se conhecer a quinta casa decimal de 3,1415..., não se poderia afirmar que um número era menor que o outro.

No reencontro com os participantes da pesquisa, após um espaço de dois meses, dois deles relataram terem utilizado parcialmente algumas questões da seqüência de ensino em atividades com seus alunos do Ensino Médio.

O primeiro expressou que trabalhou com seus alunos especificamente as questões da atividade III, que tratava da obtenção de números racionais entre dois racionais por meio da média aritmética. Relatou que seus alunos questionaram o significado de número racional. Uma vez esclarecida a questão, relata o professor que seus estudantes resolveram as questões de tal atividade.

O segundo revelou que, em seu planejamento escolar para a primeira série do Ensino Médio, não incluiu o tema de número irracional, seguindo a orientação de um colega que estava há mais tempo na escola. Apesar disso, num momento que julgou oportuno, tratando de números reais, inseriu as noções de números racional e irracional, e propôs algumas questões retiradas das atividades desenvolvidas na intervenção.

Outro participante que se manifestou a este respeito, disse não ser favorável à aplicação deste trabalho a alunos do Ensino Médio, pois teria dificuldade em contextualizar este assunto com problemas do cotidiano que envolvessem o aluno.

Considerações finais

A epistemologia histórica desvela, ao longo da gênese dos números reais, obstáculos na compreensão da necessidade da construção de um sistema capaz de substituir o geométrico, para isso, satisfazendo as propriedades daquele, em especial, a densidade e a continuidade; tais dificuldades se revelam no ensino, notadamente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, no estudo de continuidade e limite de funções. Nosso trabalho deu singelas mostras que o encaminhamento de certas questões pode contribuir para a compreensão da propriedade da densidade e, talvez mesmo da continuidade da reta real, por parte de estudantes do Ensino Médio.

O procedimento de se determinar um número racional entre dois outros, calculando-se a média aritmética deles se revelou bastante eficaz e não trouxe qualquer dificuldade para os participantes. O procedimento inspirado na diagonalização de Cantor para a obtenção de um número irracional entre dois irracionais ou um irracional e um racional também se revelou adequado, apesar de não ser usual sua utilização na Educação Básica.

Assim sendo somos levados a concluir que sobre a questão específica da densidade dos números reais, parece que os professores se apropriaram desta propriedade, como podem sugerir os comentários:

"Sim, entre dois números racionais existem infinitos racionais".

"As sucessivas médias vão se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir".

"Existem infinitos números irracionais, pois entre dois irracionais existem infinitos irracionais".

De modo geral os procedimentos sugeridos, não encarados como um modelo pronto e acabado a ser seguido, foram muito bem aceitos pelos professores o que se revelou com nossa observação de que a maioria dos sujeitos ao responder questões, recorria às suas respostas anteriores, podendo isso indicar que, possivelmente houve uma tentativa de reprodução do procedimento sugerido em atividades anteriores.

O registro de representação decimal infinito leva alguns professores a uma contradição. Alguns relacionaram corretamente este registro, quando periódico, a um número racional e, em outros momentos, associaram a representação infinita a um número irracional.

A oportunidade de se trabalharem atividades numa perspectiva séria e colaboracionista, embora contemplando conteúdos não triviais, teve boa receptividade por parte dos professores participantes. Seu desenvolvimento se deu com entusiasmo e seriedade, e houve um grande empenho na resolução e discussão das questões como podem traduzir nos seguintes comentários:

"Vou estudar isso e depois a gente conversa", referindo-se à igualdade: 0,999... = 1.

"Percebi como tenho defasagem, a gente só estuda o que dá aula", mostrando que provocamos, como se pretendia, inquietações e motivações para o estudo.

"O bacana disso é a discussão depois".

O trabalho em grupos foi encarado como fator positivo para a realização do experimento. Houve comentários em seu favor ao explicitarem que modificaram sua opinião a partir da discussão com os colegas, tanto no interior do grupo quanto na plenária.

Referências

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher,

Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Caraça, B. de J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora.

Damm, R. F. (1999). Registros de Representação. In: machado, S. D. A. *Educação Matemática, uma introdução.* São Paulo, EDUC, p p.135-153.

Dantzig, T. (1970). *Número – a linguagem da ciência***.** Tradução: Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro, Zahar Editores.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, pp. 37-65.

Duval, R. (2003). Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Campinas, Papirus, pp. 11-33.

Fischbein, E., Jehian, R. & Cohen, D. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers.* Educational Studies in mathematics. Boston, Kluwwer Academic Publishers. 29, pp. 29-44.

Igliori, S. B. C.; Silva, B. A. (2001). Concepções dos alunos sobre números reais. In: Laudares, João Bosco, Lachini, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.* Belo Horizonte, FUMARC, pp. 39-67.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics an introduction*. New York. Harper Collins College Publishers.

Lima, E. L. (1977) *Análise Real*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, v. 1.

Ministério de Educação e Cultura (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasil: Autor.

Moreno – Armella. L. E.; Waldegg G. C. (2002). An epistemological history of number and variation. In: KATZ, V. J. *Using history to teach mathematics*. Washington, Mathematical Association of America, v. 51, p. 183-190.

Niven, I. (1984). *Números: Racionais e Irracionais*. Traduzido por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Penteado, C. B. (2004). *Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.* Dissertação de mestrado. PUC-SP.

Robinet J. (1993). Les réels: quels modèles em ont lês élèves?. *Cahier de didactique des mathématiques nº 21*, I.R.E.M. Université Paris 7.

Soares, E. F. E.; Ferreira, M. C. C.; Moreira, P. C. (1999). *Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura*. Zetetiké, Campinas, v. 7, n.12, pp. 95–117, jul/dez.

Stevin, S. (1980). La Disme. In: *Reproduction de textes anciens*. IREM, Paris VII, pp. 3-10.

Tirosh, D. (1985). *The intuition of infinity and its relevance for mathematics education.* Unpublished doctoral dissertation. Tel Aviv University.

Los Autores

Benedito Antonio da Silva

Atualmente é professor titular da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo *(PUC/SP)*, Br.
Colaborador da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente em investigações sobre o processo de ensino e aprendizagem das noções do Cálculo, sob o ponto de vista das componentes: saber, aluno e professor dos diferentes níveis de ensino.
benedito@pucsp.br

Cristina Berndt Penteado

crispenteado@uol.com.br
Fundaçao Armando Alvarez Penteado, Facultad de Administración
Sao Paulo, Br.