DESARROLLO DE UN ESQUEMA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL

Marcela Parraguez
marcela.parraguez@ucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Asuman Oktaç
oktac@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN, México

Recibido 13/01/2012 **Aceptado:** 18/04/2012

RESUMEN

Aplicamos la Teoría APOE y la Tríada Intra, Inter y Trans para explicar el desarrollo de un esquema de espacio vectorial. Caracterizamos los niveles de desarrollo de dicho esquema, a partir de una descomposición genética, como resultado de nuestro análisis teórico, que señala un camino por el cual los estudiantes pueden construir el concepto espacio vectorial. Con base en dicho análisis teórico diseñamos una entrevista semiestructurada para averiguar la viabilidad de las construcciones mentales que habíamos considerado en la descomposición genética preliminar, eligiendo las preguntas de tal manera que permitirían obtener información profunda respecto al desarrollo del esquema espacio vectorial. Este instrumento fue aplicado a los estudiantes matriculados en un programa de Licenciatura en Matemáticas. El análisis de los resultados obtenidos con estos datos empíricos permite refinar el análisis teórico y presentar una caracterización mejorada de los niveles de esquema del concepto espacio vectorial. Este análisis teórico, además de ser un modelo de aprendizaje, representa una herramienta didáctica que señala estrategias de enseñanza del concepto espacio vectorial.
Palabras Clave: Teoría APOE, Esquema, Nivel Intra-Espacio Vectorial, Nivel Inter-Espacio Vectorial, Nivel Trans-Espacio Vectorial.

DEVELOPMENT OF A VECTOR SPACE SCHEMA

ABSTRACT

We apply APOS theory and the Intra-Inter-Trans triad with the aim of explaining the development of a vector space schema. We characterize the levels of the development of this schema, starting from a genetic decomposition, which is the result of a theoretical analysis that indicates a possible way with which students can construct the vector space concept. Based on this theoretical analysis we designed a semi-structured interview with the purpose of verifying the viability of the mental constructions predicted by the preliminary genetic decomposition. Interview questions were designed in such a way as to obtain relevant information about the development of a vector space schema. This interview was applied to a group of students majoring in mathematics. Analysis of the results obtained from the empirical data allows a refinement of the initial theoretical analysis and a better characterization of the levels of a vector space schema. This theoretical analysis, in addition to being a learning model, serves as a didactic tool pointing to teaching strategies for the vector space concept.
Key words: APOS theory, Schema, Intra-Vector Space Level, Inter-Vector Space Level, Trans-Vector Space Level.

Antecedentes

El concepto de espacio vectorial (EV), de gran importancia en Álgebra Lineal, y prerrequisito primordial para tópicos de matemáticas, de ciencias y de ingeniería, ha sido estudiado por investigadores en diferentes países. Se ha reportado que el discurso matemático escolar del Álgebra Lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

Según Dorier (1995a; 1996; 1997, 2000) la axiomatización en sí misma del álgebra lineal no permitió solucionar nuevos problemas, sino un acercamiento y un lenguaje más universal utilizable en una variedad de contextos (análisis funcional, formas cuadráticas, aritmética, geometría…). Este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción: el concepto de EV, abstracción de objetos ya abstractos –vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series, funciones…–. Este cambio de perspectiva induce otro, sofisticado, a nivel de las operaciones mentales. De hecho, uno puede distinguir dos fases en la construcción de ciertos conceptos: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización (Dorier y Sierpinska, 2001).

Varios investigadores franceses (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997) plantean la noción del obstáculo del formalismo. Este se manifiesta en los estudiantes que manipulan objetos como vectores, ecuaciones, coordenadas, etc., "sumergiéndose en una avalancha de términos nuevos, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas, y de teoremas nuevos" (Dorier y Sierpinska, 2001, p. 258). Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es sólo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan" (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997, p. 116), y advierten de la dificultad para encontrar situaciones al nivel de los estudiantes donde los conceptos del Álgebra Lineal jugarían el papel de herramienta para resolver problemas.

Un análisis epistemológico cuidadoso lleva a Dorier (1990, 1995a y 1995b) a concluir que el concepto de EV pertenece a una clase de conceptos que él llama *unificadores y generalizadores*, porque no fueron creados para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes.

Otro acercamiento a la enseñanza del concepto de EV ha sido desarrollado por Harel (1987, 1989a, 1989b, 1990). Harel identifica la introducción repentina de los conceptos abstractos del álgebra lineal y su concretización en modelos principalmente algebraicos, como la causa principal de las dificultades que los estudiantes enfrentan en su curso de álgebra lineal. Al entrar en contacto con estos conceptos, los estudiantes no cuentan con una mínima base intuitiva y visual sobre ellos y están muy poco familiarizados con aquellos modelos algebraicos. Harel (1989b) aplica el "principio de representación múltiple" para diseñar secuencias de enseñanza con base en concretizaciones geométricas y algebraicas que resultarían más familiares a estudiantes. Harel contempla tres fases: primero se discuten conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales, usando modelos geométricos sin coordenadas; luego se introducen esos mismos conceptos usando como modelos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para llegar a establecerlos en $\mathbb{R}^n$; finalmente, se discuten los espacios vectoriales de dimensión menor igual a tres pero con elementos indefinidos, por ejemplo, el espacio: $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) /\ A + A^t = 0\}$. Los estudiantes usarían las representaciones gráficas ya aprendidas para visualizar conceptos y resolver problemas.

Los investigadores Oktaç, Trigueros y Vargas (2006) se propusieron estudiar la comprensión del EV por un grupo de 6 estudiantes, desde la perspectiva APOE. Los resultados de esa investigación muestran que los estudiantes no habían encapsulado el proceso de operación binaria y no se habían formado esquemas ricos del concepto EV. Además agregan que los estudiantes, suelen interpretar los axiomas limitándose al cuerpo de los números reales y se corresponden con la imagen visual que tienen de las operaciones con estos números.

La investigación de Maracci (2005, 2006) se enfoca en las dificultades y los errores de estudiantes graduados y no graduados al resolver problemas de álgebra lineal, y analiza dificultades de los estudiantes en nociones básicas de espacios vectoriales, según las teorías de los modelos tácitos de Fischbein y la dualidad proceso-objeto de Sfard. Más tarde Maracci (2008) examina principalmente la noción de la combinación lineal, que considera central en el enfoque axiomático habitual.

En nuestra investigación estudiamos el concepto de EV desde un punto de vista cognitivo, utilizando el modelo del desarrollo de los esquemas cognitivos de la teoría APOE, a través de las fases Intra, Inter y Trans (Piaget y García, 1983/1989).

Teoría APOE

La teoría denominada APOE, por sus componentes esenciales o construcciones (**A**cciones, **P**rocesos, **O**bjetos y **E**squemas), es el resultado de la interpretación de la teoría constructivista de Piaget, y sus ideas relativas a la *abstracción reflexiva*, aplicadas al estudio específico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991).

APOE para esta investigación es un marco teórico y metodológico que describe y explica, a través de construcciones y mecanismos mentales dispuestos en una descomposición genética (*DG*), la construcción de un concepto matemático en la mente de un estudiante. Ahora bien, Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas no ocurren en una secuencia lógica simple, lineal; por el contrario, estas construcciones pueden aparecer simultáneamente y requerir unas de otras.

Un estudiante que muestra una **concepción acción** de un concepto matemático está limitado a realizar transformaciones reaccionando sólo a indicaciones externas que le proporcionen detalles precisos de los pasos a dar (Asiala, Brown; DeVries; Dubinsky; Mathews y Thomas, 1996).

Si muestra una **concepción proceso** del concepto, puede intuir un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos; además es capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizar los pasos. El estudiante percibe el proceso como una trasformación interna y que controla, en vez de algo que hace como respuesta a señales externas. Decimos que una acción es *interiorizada* en un proceso, cuando ella puede ser realizada o imaginada para ser ejecutada en la mente del estudiante sin necesariamente llevar a cabo cada paso específico. Así también, un proceso puede generarse por el mecanismo mental *coordinación* de dos o más procesos, el que permite establecer relaciones entre procesos, por ejemplo la coordinación mediante conectores lógicos (Sánchez-Matamoros y García, 2006), para determinar un nuevo proceso.

Un estudiante que muestra una **concepción objeto** de un concepto matemático está consciente del proceso como una totalidad, aprecia que una transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él, y es capaz de construir la transformación. Entonces el proceso se ha *encapsulado* en un objeto. A veces es necesario *desencapsular* el objeto, en el sentido de invertir un proceso, para desde ahí usar sus propiedades y manipularlo (ver figura 1).

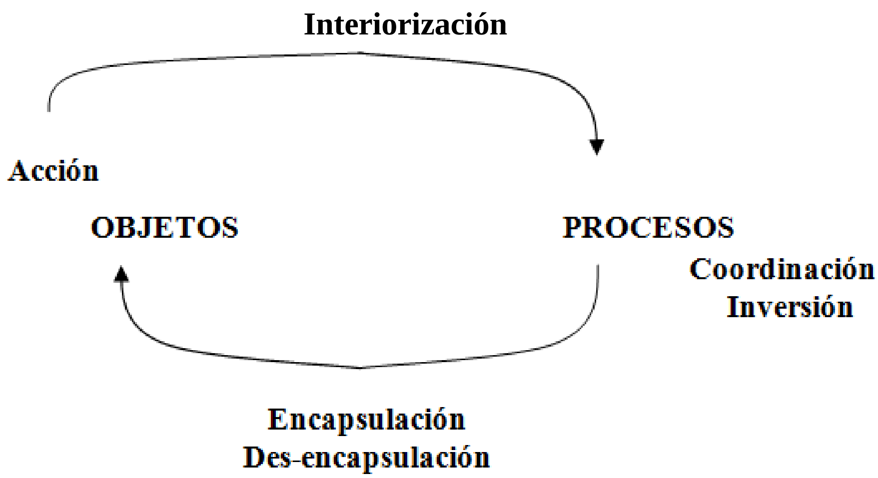


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales según APOE (Dubinsky, 1991, p. 107)

Niveles de esquema

En la teoría APOE, un *Esquema* es una colección coherente y personal de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos que son coordinados y sintetizados por el estudiante para formar estructuras cognitivas que pueden ser evocadas para tratar una situación problemática determinada. Es posible que el estudiante reflexione sobre el esquema y lo transforme como si se tratara de un objeto; en este caso se habla de la *tematización* del esquema. Así también un nuevo objeto puede ser *asimilado* por un esquema existente, obteniéndose un esquema ampliado para incluir nuevos objetos (Roa & Oktaç, 2010).

Según Piaget y García (1983, 1989), el desarrollo cognitivo de los esquemas, que lleva a la comprensión o construcción de los conceptos, pasa por tres niveles: Intra, Inter y Trans. En el nivel *Intra* los componentes del esquema que los estudiantes ponen en juego, consisten en una colección de reglas o criterios para trabajar en una actividad, que incluyen casos especiales, pero sin reconocer vínculos entre ellas; en el nivel *Inter* el estudiante tiene la habilidad de percibir todos los casos diferentes en una determinada actividad y en ocasiones distinguir que están relacionados; y en el nivel *Trans* el estudiante construye la estructura o modelo con todos sus vínculos, que subyace la actividad que está desarrollando.

Hay pocas investigaciones que usan como marco teórico la tríada anteriormente expuesta (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries; John, Tolias y Vidakovic, 1997; McDonald, Matjews y Strovel., 2000; Sánchez-Matamoros y García, 2006). Un ejemplo es la de Trigueros (2005), que describe la evolución de los esquemas en la integración de conceptos de cálculo diferencial cuando los estudiantes enfrentan problemas de graficación.

La idea de utilizar APOE con énfasis en la tríada para estudiar la comprensión de un concepto matemático no es nueva. Por ejemplo, la investigación de Baker, Cooley y Trigueros (2000) analizó la comprensión que los estudiantes tenían de los conceptos del cálculo, cómo ellos los manejaban cuando resolvían problemas gráficos no rutinarios, y procuró determinar cómo ellos integraron aquellos conceptos, dónde presentaron más dificultades, y cómo intentaron superarlas. Como veremos a continuación, algunos de sus objetivos se intersecan con los nuestros.

Objetivos de investigación

Creemos que para poder superar las dificultades que enfrentan regularmente quienes enseñan el tema de EV, primero hay que entender cómo se construye este concepto. Así, nos hacemos la siguiente pregunta general: ¿Cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto de EV?

Para contestarla, otras preguntas particulares servirán de guía: ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema del concepto EV? ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo del esquema del concepto EV? ¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo del esquema al siguiente? ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de EV?

Cuando decimos *"comprensión profunda",* pensamos que las siguientes construcciones estarían involucradas: interiorizar acciones; coordinar dos o más procesos, de modo que los estudiantes respondan a situaciones en las que se necesita dicha coordinación; encapsular procesos en objetos; hacer evolucionar los esquemas a través de la tríada.

Con esta investigación buscamos aportar un análisis cognitivo de la evolución de uno de los conceptos básicos del Álgebra Lineal, el de EV; para ello, lo abordamos desde su definición matemática formal como una estructura algebraica que involucra a un grupo y a un cuerpo, ligados por una operación, sujetos a ciertos axiomas; sin embargo, las descripciones de aprendizaje se hacen en términos cognitivos.

Basados en aquellas preguntas, nuestros objetivos generales son: caracterizar los niveles de desarrollo del esquema Intra-EV, Inter-EV y Trans-EV; determinar relaciones y elementos matemáticos que se manifiestan en cada nivel de desarrollo de esquema; y documentar posibles dificultades y errores de los estudiantes de pregrado, en la comprensión del concepto EV.

UNA Descomposición Genética (DG) del Concepto EV Como Esquema

Tomando como antecedente el trabajo realizado por RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*), en Parraguez y Oktaç (2010) presentamos una DG que modela un posible camino mediante el cual los estudiantes pueden construir el concepto EV. En ese trabajo describimos tanto las construcciones como los mecanismos mentales que podrían tomar lugar cuando los estudiantes están aprendiendo este concepto, centrándonos tanto en la coordinación entre la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar, como en la relación del esquema EV con otros conceptos como independencia lineal y base.

De acuerdo a la DG presentada (ver figura 2), el concepto EV se puede construir como un objeto, fundamentalmente por la relación de tres esquemas: **conjunto, operación binaria y axioma**; a través de la coordinación de los procesos que se derivan del objeto suma de vectores y del objeto multiplicación por escalar mediante la coordinación de los procesos involucrados en las leyes distributivas y los axiomas que van estructurando ambas operaciones. De estas construcciones emerge un nuevo objeto que puede ser llamado EV.

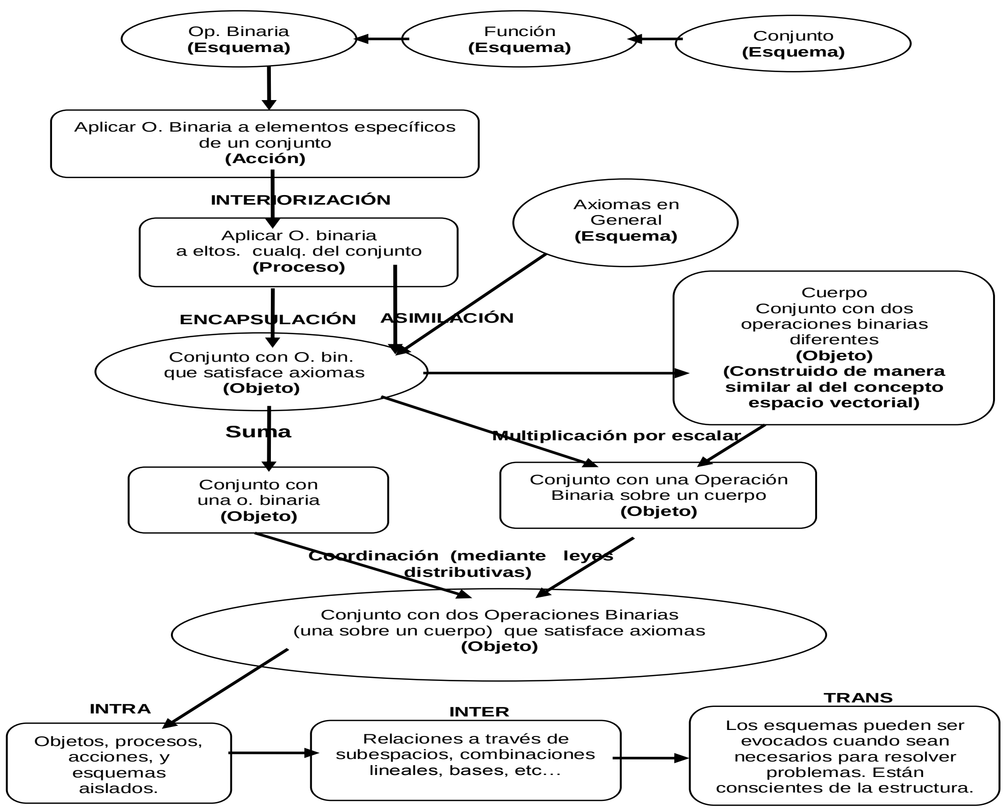


Figura 2. DG del Concepto EV como Esquema (Parraguez y Oktaç, 2010, p. 2115).

Cuando distintos objetos espacio vectorial, como $\mathbb{R}^n$ y $M_{mxn}(\mathbb{R})$, se reconocen como objetos matemáticos que comparten la misma estructura, se construye un esquema (en el sentido de la teoría APOE) que se considera en el nivel trans. Para llegar a ese nivel, dicho esquema evoluciona a través de los niveles de la tríada mediante la construcción de relaciones entre el objeto EV y los esquemas, objetos, procesos y acciones relacionados con los conceptos tales como conjunto generador, base y dimensión.

En Parraguez y Oktaç (2010) se describió la construcción del objeto EV. En este artículo discutimos la evolución del esquema EV a través de los tres niveles, Intra-EV, Inter-EV y Trans-EV.

A continuación presentamos una caracterización de cada uno de los niveles de esquema EV.

Nivel INTRA-EV

Piaget y García (1983, 1989) caracterizan el desarrollo de un esquema a nivel Intra del siguiente modo:

> Lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades interna o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar no hay coordinación de esta preocupación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse. (p.163).

Ahora nuestra caracterización para este nivel se presenta como una interpretación de esa descripción en el contexto del concepto EV.

En este nivel no existe conexión entre distintos objetos EV y otras nociones como independencia/dependencia lineal y base. El estudiante puede necesitar expresiones algebraicas o fórmulas para trabajar con situaciones que involucran dichos conceptos.

Ese objeto que se construye al principio puede no ser el objeto general con todas sus propiedades y estructura, sino corresponder a instancias específicas de este concepto. Por ejemplo el estudiante puede construir el EV $\mathbb{R}^n$ como un objeto, sin reconocer otros espacios vectoriales.

Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTRA-EV, cuando en sus respuestas observamos algunos de los siguientes tipos de concepciones y argumentos: reconocer únicamente espacios vectoriales familiares como $\mathbb{R}^n$ y M_{mxn} para m y n específicos; no poder establecer relaciones entre diferentes EV, ni entre un EV y sus subespacios; para verificar que una estructura $(\mathbb{K},\ \mathbb{V},+,\ \odot)$ no es EV, recurrir uno a uno a los axiomas que definen un EV, en lugar de pensar en cuál axioma puede fallar o bien usar otro tipo de resultados; no poder establecer una relación entre un EV y sus bases.

Nivel INTER-EV

Piaget y García (1983/1989) caracterizan el desarrollo de un esquema a nivel Inter del siguiente modo:

> Una vez comprendida la operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucren ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos (p.165).

Ahora nuestra caracterización para este nivel se presenta como una interpretación de esa descripción en el contexto del concepto EV.

En este nivel, los estudiantes, dependiendo del contexto del problema, relacionan los objetos independencia/dependencia lineal y base con el objeto EV; aunque pueden existir dificultades y la estructura global del esquema todavía no se percibe.

Consideramos que un estudiante se encuentra en este nivel de esquema, cuando sus argumentaciones muestran algunos de los siguientes razonamientos y concepciones ante situaciones específicas: reconocer que todos los espacios vectoriales tienen un vector nulo, bases, dimensión, entre otros, según la estructura correspondiente; establecer relaciones estructurales entre un EV y sus subespacios; para verificar que $(\mathbb{K},\ \mathbb{V},+,\ \odot)$ no es un EV, además de los axiomas, recurrir a teoremas y propiedades de los espacios vectoriales, en sentido contrapositivo, es decir usar la relación: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$ cuando es necesario; establecer relaciones entre un EV y sus bases, reconociendo que todo vector de EV se puede escribir como combinación lineal de los vectores de una de sus bases.

Nivel TRANS-EV

Piaget y García (1983/1989) caracterizan el desarrollo de un esquema a nivel Trans del siguiente modo:

> En función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis de ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de estructuras (p.167).

Ahora nuestra caracterización para este nivel se presenta como una interpretación de esa descripción en el contexto del concepto EV.

En este nivel existen estructuras o modelos que se pueden evocar, cuando la actividad que se desarrolle lo requiera, porque las estructuras se conectan entre sí, a través de leyes o propiedades que entrelazan los tres conceptos fundamentales descritos en la DG –operación binaria, conjunto y axiomas–; entre esas leyes o propiedades podemos nombrar: leyes distributivas entre escalares y vectores, isomorfismos de espacios vectoriales, funciones definidas en conjuntos no usuales.

Consideramos que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema Trans-EV, cuando en sus argumentaciones se muestran algunos de los siguientes razonamientos y concepciones: reconocer adecuadamente todas las relaciones entre espacios vectoriales, en particular poder establecer isomorfismos con $\mathbb{R}^n$ y otros espacios vectoriales; reconocer algunas relaciones entre espacios vectoriales mediante isomorfismos, trasformaciones lineales y dimensión; reconocer adecuadamente todas las relaciones entre la estructura de un EV y las nociones del Álgebra Lineal; poder trabajar con ejemplos nuevos para él y más complicados de espacios vectoriales que los que suelen aparecer en los textos de Álgebra Lineal; poder trabajar con espacios vectoriales no estándares, por ejemplo, de funciones; tener pleno reconocimiento de las operaciones Suma y Ponderación en la estructura que forma un EV (cuerpo, conjunto de vectores, suma de vectores, multiplicación de un escalar por un vector), es decir, distinguir claramente cuándo y cómo se utilizan las diferentes operaciones del cuerpo en una situación matemática determinada.

En este nivel el esquema que tiene el estudiante es coherente (Dubinsky, 1991, p.102), esto es, el estudiante puede decidir si alguna situación matemática se puede resolver o no, utilizando el concepto de EV y sus propiedades.

Aspectos Metodológicos

Estudiantes participantes en la investigación

Los participantes fueron 10 voluntarios estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática de una universidad latinoamericana: 6 de 4º semestre (cursaban Álgebra Lineal 1) y 4 de 8º semestre (cursaban Teoría Algebraica de Números).

La totalidad de ellos había cursado la asignatura “Algebra y Geometría”, del plan común –primer año– de las carreras de Pedagogía en Matemática y Licenciatura en Matemática. Este es un curso inicial de Álgebra Lineal, con énfasis en las aplicaciones sobre espacios geométricos de dimensiones dos y tres, que se propone el manejo de métodos del Álgebra Lineal, tanto en el ámbito de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales como en el de problemas elementales al alcance de esos métodos. Se les prepara así para un estudio más avanzado en el tópico y se provee además de una herramienta para el Cálculo de varias variables y de una conceptuación adecuada para el estudio de la geometría.

En ese curso, el concepto de EV suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la definición de espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dicho procedimiento de explicación consiste en aclarar qué significa que $(V, +)$ tenga estructura de grupo, que $\mathbb{K}$ tenga estructura de cuerpo, y que V va a ser un $\mathbb{K}$ -EV, *si y sólo si cumple con:*

1. *$(V, +)$ es un grupo abeliano.*

2. $\odot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, *es una función que cumple:*
   - *(a)* $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x, y \in V)(a \odot (x + y) = a \odot x + a \odot y)$
   - *(b)* $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall x \in V)\big((a + b) \odot x = a \odot x + b \odot x\big)$
   - *(c)* $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall x \in V)\big((ab) \odot x = a \odot (b \odot x)\big)$
   - *(d)* $(\forall x \in V)(1 \odot x = x)$

Los estudiantes que participaron en nuestro estudio habían trabajado los contenidos básicos del Álgebra Lineal: sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Sin embargo, tomando en cuenta las consideraciones expuestas arriba, esto no necesariamente implica una comprensión profunda de los conceptos involucrados.

Instrumentos de recolección de datos

Como mencionamos anteriormente, en Parraguez y Oktaç (2010) nos centramos en la parte de la DG que corresponde a la coordinación entre los procesos relacionados con las operaciones suma y multiplicación por un escalar, que junto a su axiomática definen al concepto EV. Los resultados de esa investigación muestran que cuando los estudiantes carecen de las construcciones pre-requisito descritas en la DG, se hace muy difícil para ellos desarrollar un esquema lo suficientemente fuerte del concepto EV.

En este trabajo nos enfocamos en la construcción del concepto EV como esquema, así como su evolución a través de los niveles de la tríada.

En lo que se refiere a la evolución de los esquemas a partir de la construcción objeto de EV, preparamos entrevistas semi-estructuradas; donde cada pregunta fue diseñada para examinar si los estudiantes muestran las construcciones mentales específicas relacionadas con los niveles del esquema. Las entrevistas se videograbaron y tuvieron en promedio una duración de dos horas.

Para cada una de las 12 preguntas de la entrevista se realizó un análisis a priori, explicando qué parte de la DG se abordaría a través de ella. Como ejemplo, a continuación presentamos este análisis para el caso de la pregunta 7 de la entrevista, ya que la utilizaremos más adelante cuando presentamos los datos empíricos:

> $\mathbb{R}-\{0\}$ es un grupo abeliano con la operación SUMA definida como sigue:
>
> SUMA: $x+y=:x\cdot y$, donde $x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$.
>
> Definir la otra operación, MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR sobre un cuerpo K para que $\mathbb{R}-\{0\}$ sea espacio vectorial sobre K, con esas dos operaciones.

Análisis a priori

Esta pregunta permite que el estudiante reflexione para llegar a determinar la otra operación "multiplicación por escalar" de tal manera que se cumplan los axiomas que faltan, para que la estructura $(\mathbb{R}-\{0\},\mathbb{K},+,producto\ por\ escalar)$ sea un espacio vectorial. Aunque pensar en operaciones requiere una concepción proceso, una vez definida es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de las operaciones y averiguación de axiomas que le permita manipularlas y determinar si la estructura resultante con esa operación es un espacio vectorial. Un estudiante podría pensar en operaciones conocidas y empezar a chequear los axiomas, así mediante ensayo y error posiblemente podría encontrar operaciones que cumplan los axiomas que se necesitan.

Por otra parte, este problema permite observar las conexiones que los estudiantes pueden estar estableciendo con los conceptos: conjunto, cuantificadores, función, operación, averiguación de axiomas. En este caso diremos que tal estudiante puede encontrarse en un nivel de esquema inter de espacio vectorial, si la operación por escalar que está considerando es la trivial (suma y multiplicación usuales). Ahora si por el contrario el estudiante considera como operación por escalar una no trivial como por ejemplo: potencia, diremos que el estudiante puede encontrarse en un nivel más alto de evolución de su esquema de espacio vectorial (trans). A continuación mostramos algunas de las posibles respuestas que un estudiante podría dar frente a esta situación:

- Un estudiante podría pensar en las operaciones usuales y como la suma está definida como un producto, intentar definir el producto como suma:

  $$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$ pero no cumple los axiomas de distributividad.

- Por otro lado un estudiante podría pensar en operaciones poco usuales y definir, por ejemplo:

  $\alpha \cdot x = x^{\alpha}$; donde $\alpha \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y chequear que se cumplen los 5 axiomas siguientes:

(a) $\alpha \cdot x = x^{\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\}$; (b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(c) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$; (d) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$; (e) $1 \cdot x = x$

Esta pregunta especialmente será útil para observar si las dos operaciones están coordinadas en la mente del estudiante, para definir la estructura de un espacio vectorial.

Los resultados que obtuvimos los analizamos desde la descomposición genética (ver figura 2) a partir de la exploración de las construcciones que muestran los estudiantes que han construido el objeto-EV, para posteriormente distinguir entre estudiantes que muestran un esquema-EV en distintas etapas de evolución.

A continuación damos a conocer resultados de las entrevistas para mirar con detalle las construcciones mentales que parecen estar mostrando los estudiantes. En los extractos que siguen, los estudiantes son numerados de ES1 a ES10 y el entrevistador es E.

Análisis de los Datos

La *concepción objeto*-EV requiere la aplicación de acciones sobre el EV, donde éste se percibe como un todo por el estudiante. Las acciones que se pueden realizar pueden consistir en considerar a espacios vectoriales como elementos de una familia, realizar operaciones entre ellos, o bien hacer preguntas sobre las propiedades que debe cumplir un EV y contestarlas.

Algo que es de interés es mirar si un estudiante puede construir un contraejemplo cuando sea necesario, pues esto requiere desencapsular el objeto y recuperar el proceso que le dio origen.

A continuación presentamos la pregunta 5 de la entrevista, y un análisis que explica cómo puede ayudar a detectar una concepción objeto en el estudiante.

Pregunta 5:

Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no, en ambos casos justifica tu respuesta:

"Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que:

V +W = V + Z

Entonces: W = Z".

En esta pregunta, se considera que un estudiante muestra una concepción proceso de EV, cuando intente justificar sus elecciones de los subespacios U, V y W a través de sus elementos, para así construir los subespacios *V+W y V+Z,* es decir: $(v+u) \in V+W$ cuando $v \in V$ y $u \in W$ (análogo para *V+Z*). En cambio, si el estudiante tiene una concepción objeto, y considera al EV como una totalidad es capaz de operar con los espacios sin considerar describir sus elementos o de construir un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

Ahora daremos algunos ejemplos de las entrevistas realizadas con los estudiantes e interpretamos los datos desde nuestro marco teórico. Iniciamos con el ES5 quien, antes de empezar a realizar algún tipo de procedimiento escrito sobre las condiciones dadas, reflexiona sobre la pertinencia de los datos, es decir verifica si el problema bajo las condiciones dadas tiene solución:

[167ES5][1] ¿Qué suma es eso? La suma de espacio del conjunto de todos los vectores que son uno de acá más uno de allá.

[168E][2] : Suma de espacios, porque son espacios ¿cierto?

[168ES5] : Claro, o son de conjuntos también se puede.

[169E] : Pero son espacios, suma de espacios.

[169ES5] : Entonces hay que demostrar que *W* es igual a cero, si es que es verdadero, no, no, no, yo creo que no.

[170E] : ¿Por qué?

[1] **[167ES5]** quiere decir que el estudiante 5 en la intervención número 167 de la entrevista, realizó esa aseveración.

[2] **[168E]** quiere decir que el entrevistador en intervención número 168 de la entrevista, realizó esa aseveración.

[170ES5] : Porque estoy pensando en lo más fácil, ℝ estoy pensando, pero perdón acá son todos los vectores que son de la forma *v* + *w* donde *v* pertenece a ℝ y *w* a ℝ, esa es la definición de suma de espacio ¿cierto?

[171E] : Claro.

[171ES5] : Entonces, pensemos en *V* igual a ℝ ahí todo esto falso, pensé mas en *V* igual a ℝ; entonces pensemos ℝ más un conjunto igual a ℝ más otro conjunto por ejemplo si yo, aquí pongo el espacio nulo, eso me da ℝ ¿cierto?

[172E] : Sí.

Este estudiante muestra evidencias de su capacidad para pensar en el proceso que dio origen al objeto EV, ya que puede desencapsularlo y mirar allí, conjuntos con estructura algebraica que son espacios vectoriales, como el conjunto de los números reales y el conjunto $\{0\}$ y al mismo tiempo establecer operaciones entre ambos, para construir el contraejemplo que anda buscando. Veamos el escrito del ES5 (ver figura 3):

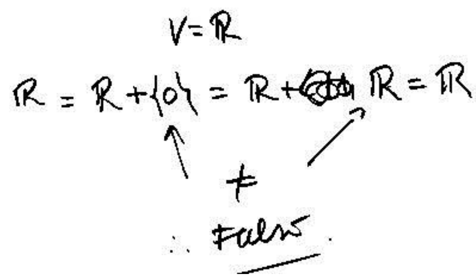


Figura 3. Contraejemplo elaborado por el ES5.

En este contraejemplo el ES5 consideró $V = \mathbb{R}$, $W = \{0\}$ y $Z = \mathbb{R}$; que verifican la igualdad $\mathbb{R} + \{0\} = \mathbb{R} = \mathbb{R} + \mathbb{R}$; sin embargo $W \neq Z$.

Contrario a esto podemos ver cómo, el ES10 todavía no tiene una concepción objeto de EV, ya que en esta misma pregunta, intenta justificar sus elecciones de los subespacios *U*, *V* y *W* a través de sus bases como sigue, sin mucho éxito, para resolver el problema.

Este estudiante comienza diciendo que la base de la suma de espacios *V*+*W* es la base de *V* unión la base de *W* (análogo para *V*+*Z*). Posteriormente procede a igualar *V*+*W* = *V*+*Z* y elimina los vectores que son linealmente dependientes, que según él, son los vectores de la base para V, que aparecen a ambos lados de la igualdad: *V*+*W* = *V*+*Z*. Como resultado de esa eliminación el estudiante argumenta que realmente *W* = *Z*.

Otro ejemplo de construcción del objeto se muestra en el caso del E6 en la misma pregunta. Este estudiante muestra un proceso que encapsuló, que corresponde a un EV, que se genera mediante combinaciones lineales de elementos específicos. Veamos un extracto del diálogo con el ES6:

[122ES6] **:** Ya se me vino a la cabeza una... algo de teoría de conjuntos, por ejemplo, si yo tengo que *A* unión *B* es igual a *A* unión *C* no necesariamente *B* = *C*, hay contra ejemplos para eso. Pero estaba tratando de pensar en un contraejemplo para eso y yo creo que es análogo, creo que es análogo.

[125E] **:** Entonces ponga ahí lo que está pensando usted. Estoy pensando que ésta es la relación que hace.

[123ES6] **:** En teoría de conjuntos, tengo que si *A* unión *B* es igual a *A* unión *C* entonces *B* no necesariamente es igual a *C*. ¿Escribo un contraejemplo?

[124ES6] **:** Por ejemplo, si tomo *A* como, claro, uno: a *B* uno coma dos; y a *C* como dos no más, entonces *A* unión *B*, esto es uno coma dos; y *A* unión *C* también es uno coma dos…(ver figura 4)

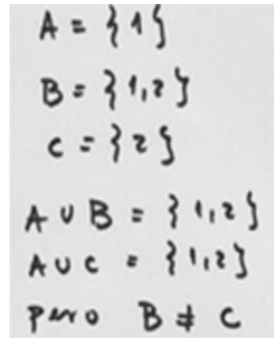


Figura 4. Un ejemplo concreto.

[127E] **:** Pero…

[125ES6] **:** Pero *B* es distinto de *C*.

[128E] **:** Perfecto.

Este estudiante, al desencapsular el objeto EV, mira el proceso que le dio origen, y resulta jugar un papel importante el esquema de conjuntos. Es en este esquema de conjuntos en el cual procesa y construye tres conjuntos a partir de los cuales fabrica espacios vectoriales como el generado de esos conjuntos, los que le permitirán elaborar el contraejemplo para la pregunta 5 de la entrevista, como veremos a continuación.

[137ES6] **:** … ah, si yo tengo que *V* por ejemplo, es el generado por *a* y *W* es el generado por *b*, entonces *V* + *W* es el generado por *a* unión *b*, entonces ahí tengo algo como parecido. Ya ahora voy a tomar *V* como el uno coma dos y dos coma uno… no, yo creo que ese no.

[140E] **:** Le pone "no" entonces.

[138ES6] **:** Voy a tomar *V* como el uno coma dos no más, voy a tomar *W* como cero coma tres y *Z* cero coma tres y uno coma dos, entonces en este caso *V* + *W*, esto es uno coma dos y cero coma tres y *V* + *Z* también es lo mismo (ver figura 5).

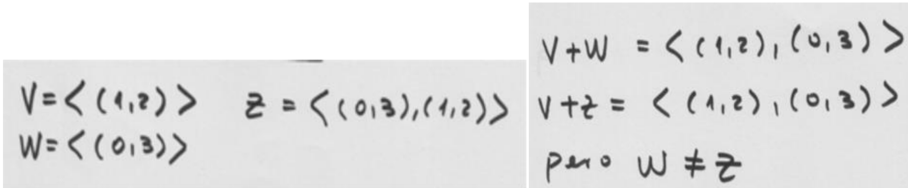


Figura 5. Contraejemplo elaborado por el ES6.

ES6, a diferencia de ES5 usa el esquema de conjuntos para construir el contraejemplo; pero es capaz de mostrar el contraejemplo una vez que aclara sus ideas en los conjuntos, y esas las reconstruye para EV.

La concepción objeto-EV se evidenció en ocho de los estudiantes entrevistados, con base en su respuesta a la totalidad del instrumento; cabe mencionar que la pregunta 5 proporcionó evidencias muy importantes para ello.

Fue interesante constatar que distintos estudiantes utilizan elementos de diferentes grados de complejidad al responder a la pregunta 5: los estudiantes 1, 2, 5, 6 y 7 consideran subespacios específicos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, para elaborar su contraejemplo; en cambio los estudiantes 3, 9 y 8 consideran subespacios genéricos para sus contraejemplos, como por ejemplo *W* = *V* y $Z - \{0\}$.

Como se comentó en la DG, con la construcción objeto-EV comienza la construcción y evolución del esquema EV, el cual describiremos a continuación.

Evolución del Esquema EV

Nivel Intra-EV

Tomando en consideración únicamente a los estudiantes que mostraron una construcción objeto-EV, es posible observar diferencias en sus repuestas a las preguntas de las entrevistas, que permiten poner en evidencia que utilizan en ellas esquemas que se encuentran en distintos niveles de evolución, descritos en la DG.

Mostraremos en primer término algunos resultados del análisis de los datos que ejemplifican el uso de un esquema-EV a nivel Intra.

Retomando el trabajo con el ES6, pero ahora mirado desde el nivel Intra-EV, nos damos cuenta que este estudiante, quien encapsuló un proceso que corresponde a un EV específico –$\mathbb{R}^n$– y que se genera mediante combinaciones lineales de elementos específicos –los subEV $\mathbb{R}^n$–, no puede relacionarlo con otras instancias de EV; él considera que una estructura $(\mathbb{K}, V, +, \odot)$ es un EV, cuando la combinación lineal, $\alpha \odot v + w$ pertenece a V, donde $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v,\ w \in V$. Utilizó este mismo argumento para responder la pregunta 1 de la entrevista, y que especificamos a continuación:

Se han definido sobre $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

SUMA
$$+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\big((x,y),(a,b)\big) \longrightarrow (x,y) + (a,b) = (2y + 2b, -x - a)$$

PONDERACIÓN
$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\big(\alpha,(x,y)\big) \longrightarrow \alpha \odot (x,y) = (\alpha x, -\alpha y)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con las operaciones anteriormente definidas un EV sobre $\mathbb{R}$?

El ES6 caracteriza los espacios vectoriales a través de combinaciones lineales (ver figura 6), a partir de las operaciones que lo definen, suma (+) y producto por escalar ($\odot$). Esto muestra que la concepción que tiene el estudiante del concepto EV está centrada sólo en la cerradura de la combinación lineal sobre $\mathbb{R}^2$; como lo muestran sus escritos:

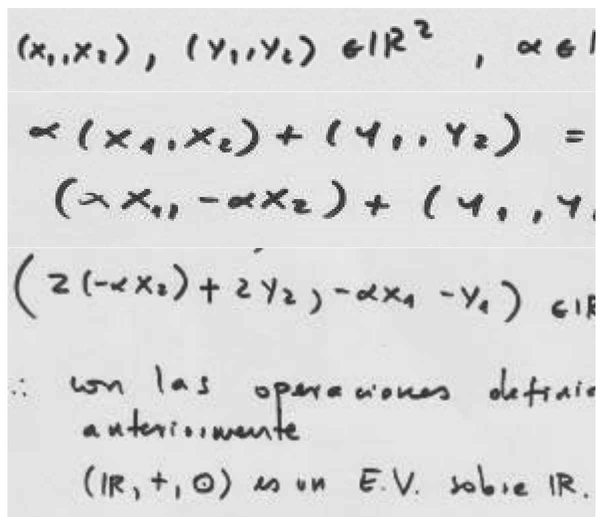


Figura 6. Caracterización que realiza ES6.

Es importante mencionar que hablar en términos de combinaciones lineales de vectores cualesquiera y determinar ejemplos de ellos, no es una condición suficiente para garantizar que un estudiante que posee una concepción objeto de EV muestre un esquema en el que se hayan relacionado sus componentes. El objeto EV que maneja E6 es un caso particular de EV que no se puede relacionar con otros espacios que comparten la misma estructura EV. Asimismo E6 no considera el rol de los axiomas cuando se enfrenta a EV con operaciones no usuales.

Otro estudiante, el ES7, trabaja los problemas como si las operaciones suma y multiplicación por escalar fueran las usuales y/o el vector nulo fuera la n-upla (0,0,…,0), cuando se sale del ámbito del conjunto de los números reales con las operaciones usuales. Veamos la argumentación que realizó en la pregunta 8, inciso 4 de la entrevista:

Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x,\ y,\ z > 0\}$ un EV con las operaciones:

SUMA: $u \oplus v = (xa,\ yb,\ zc)$ donde $u = (x, y, z)$, $v = (a, b, c) \in V$

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR: $\lambda \otimes u = \left(x^{\lambda},\ y^{\lambda},\ z^{\lambda}\right)$, donde $u = (x, y, z) \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea W el subEV de todos los puntos de V situados sobre el plano $Z = 1$.

8.1 Escriba dos vectores de W.

8.2 ¿Cuál es el vector nulo de W?

8.3 Si $v = (3,2,1) \in W$, ¿Quién es $-v$?

8.4 ¿Los vectores $(2, 2, 1)$ y $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ de W son linealmente independientes?

8.5 ¿El conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3,\ 1\right)\right\}$ es una base para W?

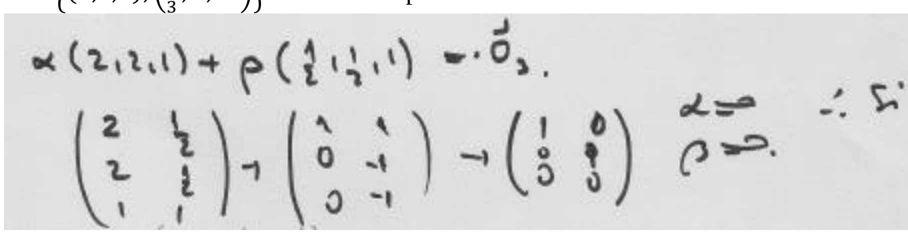


Figura 7. El ES7 trabaja la combinación lineal con operaciones usuales.

Basándonos en el trabajo escrito y en la argumentación del ES7 (ver figura 7), en particular a la pregunta 8.4, podemos concluir que muestra evidencias de utilizar un esquema de EV a un nivel Intra-EV. Es difícil para el ES7 hacer las conexiones necesarias, entre el objeto EV, las operaciones binarias no usuales y los elementos de la estructura algebraica como el elemento neutro y el concepto de dependencia lineal.

El mismo ES7, en la pregunta 11:

Sea $V = \{(a, b) /\ a,\ b \in \mathbb{R}^+\}$ un $\mathbb{R}$- EV, con las operaciones:

SUMA: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ $\quad (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V$

PONDERACIÓN: $k(a, b) = (a^k,\ b^k)$, $\quad k \in \mathbb{R},\ (a, b) \in V$

Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V, dados por:

$S_1 = \{(2,1), (3,2)\}$ $\qquad S_2 = \{(1,1), (2,1)\}$

consideró el vector nulo como (0,0) (ver figura 8), y no como el elemento neutro del EV dado.

Por otro lado, tal vez influenciado por el diseño de esta misma entrevista, donde en muchas preguntas se dio énfasis a las operaciones que definen la estructura de un EV, ES7 consideró las operaciones que tenía el problema y no las operaciones suma y producto por escalar triviales que usualmente se definen en $\mathbb{R}^2$.

$$\alpha(2,1)+\beta(3,2)=(0,0)$$
$$(2^{\alpha},1^{\alpha})+(3^{\beta},2^{\beta})=(0,0)$$
$$(2^{\alpha}3^{\beta},2^{\beta})=(0,0)$$
S.d.

Figura 8. El ES7 considera el vector nulo usual.

ES7 puede trabajar con EV específicos como $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales pero no relaciona estos objetos con otros EV.

Los estudiantes entrevistados que muestran un esquema a nivel Intra-EV recurren a los axiomas que definieron el EV, en lugar de usar argumentos más eficientes para verificar que una estructura no es EV. Es el caso del ES2 quien en la pregunta 1 de la entrevista, enlista algunos de los axiomas que debería tener la estructura de EV.

Revisando uno por uno los axiomas, cuando vino su turno, ES2 descubrió y probó que el axioma $1 \odot v = v$ no se cumple para cualquier vector v del espacio dado (ver figura 9):

SEA $1 \in \mathbb{R}$ EL ELEMENTO NEUTRO PARA LA PONDERACION

~~ASÍ~~ $1 \odot (x,y) = (x,-y)$

CLARAMENTE $(x,y) \neq (x,-y)$

Figura 9. El ES2 prueba que el axioma no se cumple.

Responde finalmente que en la pregunta 1 la estructura dada no es espacio vectorial (ver figura 10):

$\therefore$ $(\mathbb{R}^2,+,\odot)$ NO ES EST. VECTORIAL

Figura 10. Respuesta dada por el ES2, para la pregunta 1.

Es así que basándonos en los datos empíricos que hemos recogido observamos que los estudiantes que muestran un esquema Nivel Intra-EV, como ES2 y ES7 prueban que un conjunto no es EV verificando uno a uno el cumplimiento de los axiomas; para ellos el vector nulo de un EV es el vector nulo de $\mathbb{R}^n$ o "algo" que está conformado por ceros y que no necesariamente es un elemento del espacio vectorial dado; reconocen a $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial, así como sus subespacios; consideran las operaciones suma y multiplicación por escalar como las usuales; y averiguan la independencia/dependencia lineal de vectores mediante una combinación lineal igualada al vector nulo de $\mathbb{R}^n$.

Consideramos que restringirse a las operaciones usuales y el vector nulo en $\mathbb{R}^n$ puede convertirse en un obstáculo para la evolución del esquema.

Nivel Inter-EV

De acuerdo con nuestra caracterización para el nivel Inter-EV, mostraremos evidencias de que hay estudiantes que presentan las siguientes características: reconocen que existe un vector nulo para la suma de vectores y un escalar cero del cuerpo, que poseen roles distintos en la estructura EV, lo que les permite establecer relaciones entre la estructura de EV y teoremas que de él se derivan. Veamos para ello el trabajo que realizó ES5, en la pregunta 1, donde escribe con alguna imprecisión el teorema siguiente (ver figura 11):

Figura 11. Argumento ES5.

El estudiante ES5 se da cuenta de que el negar la siguiente proposición: *"Si V es EV, entonces* $0 \odot v = 0$*"* le ayuda a dar respuesta a la pregunta:

[86ES5]	: ¿Para qué? Porque por ejemplo a ver esa proposición de que por ejemplo el teorema que dice que…¿Cómo se llama? El elemento…neutro del cuerpo, multiplicado por un vector es el vector nulo.
[87E]	: A eso sí.

[87ES5]	: ¿Cierto? Entonces eso lo ponen como teorema y es importante porque sirve para verificar -que sea por ejemplo EV- o cosas así, entonces a veces lo ponen todo junto y ahí uno no sabe, hay unas cosas que son importantes pero son axiomas o cosas así.
[88E]	: Cuando dices que sirve para verificar que sea un espacio ¿Cómo fue eso? Sirve para…
[88ES5]	: Claro para verificar si -es que es un EV- por ejemplo si acá yo pongo el cero, y no me entrega el cero, entonces no puede ser EV con esa operación; no puede estar definido un EV.

Sin embargo, ES5 luego desecha esta argumentación y prueba que la estructura definida en la pregunta 1 de la entrevista no es EV, porque $1 \odot (x, y) \neq (x, y)$, para algún $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; citando para ello el siguiente contraejemplo: $1 \odot (1,2) = (1, -2) \neq (1,2)$.

También en este nivel los estudiantes establecen relaciones entre el objeto EV, conjuntos linealmente independiente y base, con operaciones suma y ponderación diferentes de las usuales. Veamos las relaciones que estableció ES5 al enfrentar la pregunta 8, en particular, el punto 8.5, en el cual aplica adecuadamente las definiciones de suma y ponderación, de combinación lineal, de independencia/dependencia y de base, al demostrar que el conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ es una base para W. ES5 primero prueba que el conjunto es linealmente independiente (ver figura 12):

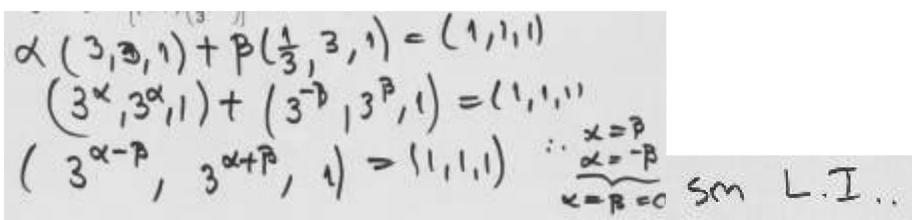


Figura 12. Trabajo del ES5 con las operaciones no usuales que definen al EV.

Y después verifica que el conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ genera a W.

Por su parte, ES3 mostró evidencias de haber construido relaciones entre distintos objetos EV y el objeto base de un EV. Al resolver la pregunta 8.5 de la entrevista, ES3 comienza diciendo que $\dim(W) = 2$, por lo que sólo le resta probar que el conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ sea linealmente independiente para que sea base de W.

Por otro lado, en las argumentaciones de nuestros entrevistados pudimos apreciar que para argumentar que una estructura es EV, no necesariamente recurren a la axiomática que lo define, sino que utilizan conexiones con otros conceptos como el de subespacio, cuando les resulta más eficiente. Este es el caso de ES8, en la pregunta 4 de la entrevista (ver figura 13):

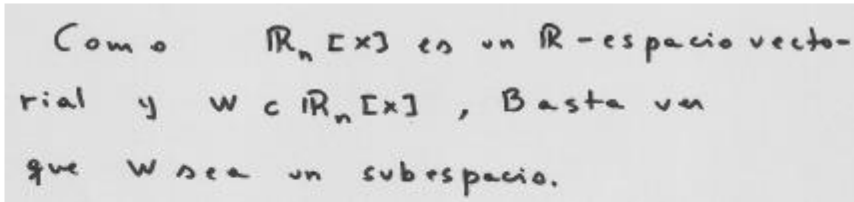

Como $\mathbb{R}_n[x]$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $W \subset \mathbb{R}_n[x]$, Basta ver que W sea un subespacio.

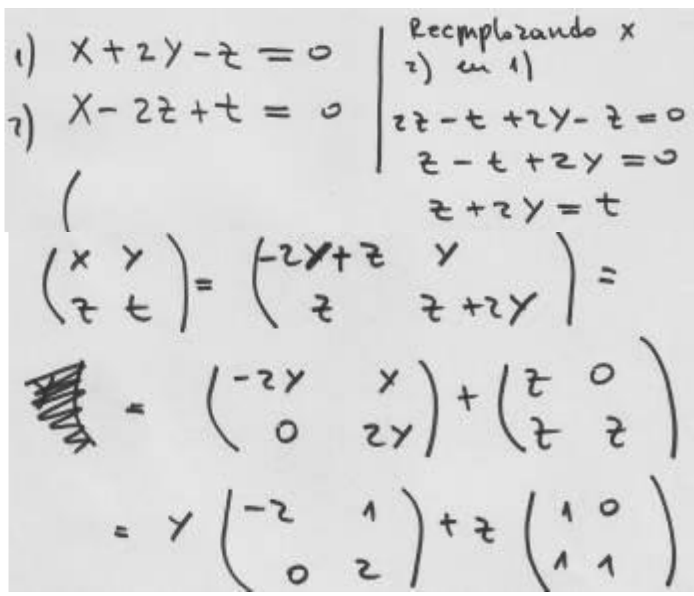
Figura 13. ES8 argumenta que es suficiente mostrar que *W* sea subEV de $\mathbb{R}_n[x]$.

También encontramos evidencias de relaciones del espacio vectorial y su base, en las argumentaciones de las respuestas a la pregunta 10 de la entrevista.

Pregunta 10:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;/\; \begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ x - 2z + t = 0 \end{matrix} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$ Determine una base para *V*.

Veamos el escrito de ES9 (ver figura 14):


1) $x + 2y - z = 0$

2) $x - 2z + t = 0$

Reemplazando x 2) en 1)

$2z - t + 2y - z = 0$

$z - t + 2y = 0$

$z + 2y = t$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+z & y \\ z & z+2y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2y & y \\ 0 & 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ z & z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 14. Respuesta dada por ES9, para la pregunta 10.

En ese escrito podemos apreciar que cualquier matriz cuadrada de orden 2 se escribe como combinación lineal de dos matrices según las condiciones de la pregunta; el estudiante asegura que las matrices son linealmente independientes, mostrando que una no es múltiplo de la otra (ver figura 15):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\nexists\, \lambda \in \mathbb{R} \ni \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 15. ES9, prueba que esas matrices no son múltiplos.

ES9 llega a concluir lo siguiente (ver figura 16):

$$\therefore \left\} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\{$$

es una base de V

Figura 16. ES9 concluye que las matrices forman una base para *V*.

Para finalizar este apartado, queremos enfatizar que los estudiantes que se encuentran en este nivel no sólo reconocen las operaciones involucradas en la definición de distintos EV y el vector nulo como parte de esas estructuras, sino también han construido relaciones entre EV, subespacio vectorial, base, independencia/dependencia lineal, entre otros. Sin embargo, todos ellos muestran dificultades cuando se les pide construir un espacio vectorial a partir de ciertas propiedades dadas, lo cual se considera necesario para mostrar un esquema a nivel Trans-EV.

Nivel Trans-EV

En el nivel Trans el estudiante puede reconocer y trabajar con ejemplos de espacios vectoriales no-estándares, puede invocar su esquema y en sus argumentaciones mostrar su coherencia cuando sea necesario.

Observemos cómo ES1 en la pregunta 7 invoca su esquema de EV para coordinar los procesos relacionados a las dos operaciones de un EV, a través de los axiomas de distributividad.

Pregunta 7 de la entrevista:

$\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ es un grupo abeliano con la operación SUMA definida como sigue:

SUMA: $x + y =: x \cdot y$, donde $x, y \in \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$.

Definir la otra operación, MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR para que $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ sea EV, con esas dos operaciones.

ES1, después de leer la pregunta, inmediatamente trata de definir la operación como $\alpha v = \alpha^v$ donde α y v son números reales. Cuando él se da cuenta que, para que α^1 sea igual a 1, α

tiene que ser uno y entonces uno de los axiomas no se cumple, continúa pensando sobre otras operaciones posibles. Intenta $\alpha v = v^{\alpha}$ y verificando las propiedades, muestra que lo que tiene es un EV. Este estudiante desde el principio muestra una buena comprensión del tipo de operación que está buscando. Aunque tiene que hacer una prueba primero, la coordinación de los procesos involucrados en las dos operaciones lo llevó a descubrir una operación correcta.

ES1 se da cuenta que puede definir la operación multiplicación por escalar solicitada como: $(\alpha,\vec{v}) \longrightarrow (\vec{v})^{\alpha}$, y probar exitosamente que el resto de los axiomas se verifica (ver figura 17):

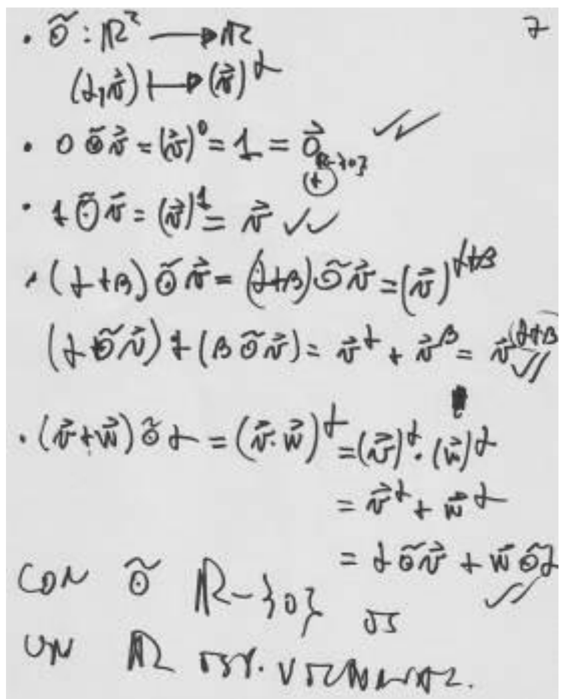


Figura 17. ES1 prueba que la operación Multiplicación por Escalar cumple los axiomas.

También el estudiante puede reconocer el objeto EV con todas sus características y se da cuenta de la estructura de los espacios vectoriales, que subyace todos los ejemplos. Las preguntas que nos ayudaron a buscar evidencias de esto, fueron 2 y 4 de la entrevista. Miremos con detalle el trabajo que realizó ES1, en cada una de esas preguntas.

En la pregunta 2 de nuestra entrevista:

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \ \ es \ \ función\}$. Se definen las siguientes operaciones:

SUMA $\quad +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad (a,b) \longrightarrow a+b$

PONDERACIÓN $\quad \odot: F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad (f,x) \longrightarrow f \odot x = f(x)$

Si sabemos que $(\mathbb{R},+)$ es un Grupo abeliano, ¿Qué axiomas faltan para que $\mathbb{R}$ sea un EV sobre $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$? , ¿Se cumplen dichos axiomas?

ES1 reflexionó y analizó por separado cada uno de los axiomas que faltan, para que $\mathbb{R}$ sea un EV sobre $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ver figura 18).

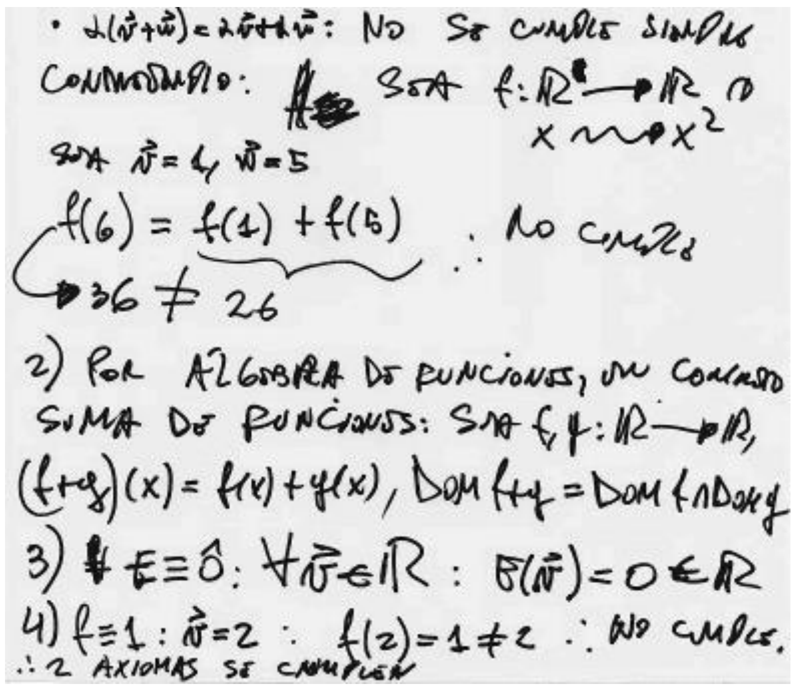


Figura 18. ES1 analiza por separado 4 axiomas.

De los argumentos que ha escrito ES1 podemos rescatar que para probar o refutar cada uno de los axiomas, él se basa en estructuras matemáticas que subyacen los conjuntos dados, por ejemplo: Para probar que no se cumple el axioma de distributividad del producto sobre la suma, ES1 recurre a mirar la no linealidad de las funciones; mostrando específicamente que la función cuadrática en $\mathbb{R}$ no es lineal; Para probar que se cumple el axioma de distributividad de la suma sobre el producto, ES1 se basa en el álgebra de funciones.

Ahora, miremos el trabajo de ES1 en la Pregunta 4 de nuestra entrevista:

$W = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] / \int_0^1 p(t)dt = 0\right\}$ con las operaciones usuales, ¿es un EV?. ¿Por qué? (JUSTIFICA).

Apreciamos que en su justificación, también reconoce estructuras matemáticas que subyacen W y con las cuales las relaciona, en este caso la estructura de Operadores Lineales para la integral definida, y la estructura de subespacio para W. Para ES1 W es un EV, porque W es subespacio de los polinomios $\mathbb{R}_n[x]$, ya que la integral definida cumple la propiedad de linealidad y el polinomio nulo está en W.

Este estudiante ES1 es el único de los estudiantes entrevistados que mostró haber construido el esquema-EV a un nivel Trans. De las evidencias recogidas, podemos señalar que este estudiante tiene pleno reconocimiento de las operaciones involucradas en el concepto EV y de la estructura matemática que le subyace en los conjuntos y operaciones que lo definen, lo que le permite establecer con claridad relaciones entre esas estructuras.

ES1 distingue claramente lo que es un EV con todas sus propiedades de aquello que no lo es. Una interpretación de estos resultados es que el desarrollo cognitivo del esquema EV no está necesariamente vinculado a conocer muchos elementos adicionales del concepto, como por ejemplo, suma directa de espacios vectoriales; sino a alcanzar la coherencia del esquema-EV.

Conclusión y Reflexiones

En esta investigación tomando como referencia a Piaget y García (1983/1989), presentamos una caracterización de los niveles de desarrollo del esquema correspondiente al concepto EV y posteriormente evidenciamos estos niveles en estudiantes de licenciatura mediante datos empíricos. En particular documentamos cómo los estudiantes conciben el vector nulo y las operaciones suma (+) y producto por escalar ($\odot$) involucradas en una estructura de EV: $(K, V, +, \odot)$, donde K es un cuerpo y (V,+) es un grupo abeliano.

Un resultado importante que arrojó esta investigación es que el aceptar vectores nulos distintos del usual (n-upla nula o matriz nula), así como operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar distintas a las que se definen normalmente en $\mathbb{R}^n$, es una condición necesaria para que el esquema de espacio vectorial evolucione mas allá del nivel intra-EV.

El nivel Inter del esquema-EV también se ve reflejado en la posibilidad del estudiante de utilizar definiciones y teoremas de conceptos del álgebra lineal relacionados con el EV. Se observa en los datos que los estudiantes que muestran este nivel del esquema-EV, en lugar de verificar cada axioma, para decidir si un conjunto es espacio vectorial, utilizan argumentos basados por ejemplo en proposiciones de conjunto generador, base y dimensión.

Hemos verificado que un criterio a tomar en cuenta para caracterizar los niveles del esquema Intra-EV e Inter-EV sería el rol del vector nulo. Por ello basándonos en los datos que obtuvimos, consideramos pertinente modificar la caracterización dada al inicio de los niveles de este esquema, de la siguiente manera: un estudiante que muestra un nivel de esquema Intra-EV interpreta el vector nulo de un EV como la n-upla $(0,0,\ldots,0)$, elemento constituido sólo por el número cero de $\mathbb{R}$, sin considerar su pertinencia de acuerdo a la definición del espacio EV; un estudiante muestra por lo menos un nivel de esquema Inter-EV, cuando acepta que el vector nulo de un EV es o puede ser un elemento no necesariamente constituido por ceros.

Así, como fruto de nuestra investigación, podemos presentar nuevos elementos para caracterizar de manera más concreta los niveles de la tríada incluyendo las observaciones anteriores, en términos de comportamientos de estudiantes ante problemas específicos sobre espacios vectoriales, como se sintetiza en la Tabla 1.

En particular, la caracterización de estos niveles permite materializar la forma en la que el esquema del concepto EV se construye y la forma en que se desarrolla, a través del análisis de las respuestas de los estudiantes que participaron en nuestra investigación, a diferentes preguntas de la entrevista.

Consideramos que los resultados que aporta esta investigación están relacionados, por un lado con el rol que juega la generalización del vector nulo en la evolución del esquema-EV, y por otro la posibilidad que los estudiantes trabajen los EV con operaciones diferentes a las usuales; contribuyen ambos a consolidar la coherencia del esquema, mostrada a través de un uso efectivo de los conceptos y propiedades relacionadas con el EV.

Tabla 1: Nuevos elementos de caracterización de Intra-EV, Inter-EV y Trans-EV.

Nivel Esquema Intra-EV	Nivel Esquema Inter-EV	Nivel Esquema Trans-EV
▪ Considerar que el vector cero es la n-upla (0,0,…,0), elemento constituido sólo por el número cero de $\mathbb{R}$. ▪ Para averiguar si los vectores dados son linealmente independientes o dependientes, igualar una combinación lineal al vector cero de $\mathbb{R}^n$, sin importar el tipo de elementos que constituyen dicho espacio. ▪ Considerar a la operación suma y multiplicación por escalar como las usuales en la estructura formada por un Cuerpo y un Conjunto con $+$ y $\odot$. No pensar que una misma estructura formada por un Cuerpo y un Conjunto puede tener asociado otro tipo de operaciones Suma y Ponderación.	▪ Reconocer que el vector nulo no siempre es un objeto con ceros y aceptar la posibilidad de que el vector nulo de algún EV sea un elemento del espacio que no tenga el número real cero. ▪ Aceptar que una estructura formada por un Cuerpo y un Conjunto pueda tener definidas operaciones Suma y Ponderación diferentes a las usuales: $\oplus$, $\odot$. ▪ Realizar la averiguación de vectores linealmente independientes/dependientes igualando una combinación lineal al elemento neutro, para la operación suma. Particularmente se chequea que cuando uno es múltiplo del otro, dos vectores son linealmente dependientes.	▪ Reconocer claramente cuándo un conjunto es un EV y cuándo no, recurriendo a las estructuras subyacentes en ellos. ▪ Construir ejemplos de espacios vectoriales que satisfacen condiciones dadas, haciendo uso de la estructura subyacente.

En relación a estos resultados de investigación nuestra propuesta pedagógica primera es que debe haber especial énfasis en la construcción del esquema-EV, dando a los estudiantes la oportunidad de experimentar con diferentes tipos de vectores nulos y operaciones no habituales que definen a un EV, donde se haga patente la estructura de EV, para que hagan evolucionar su esquema. Esa sugerencia tiene que ver con la forma en que se relacionan las operaciones del EV con otras nociones del álgebra lineal, como por ejemplo dependencia/independencia lineal, base, entre otros. Por lo general en la enseñanza del concepto EV, los axiomas que le definen, junto a otras nociones que se le relacionan son trabajados desde lo habitual. Por ello reiteramos una vez más, que debe haber actividades destinadas a facilitar la coherencia del esquema-EV. Las preguntas que nos dieron información y las respuestas de los estudiantes pueden ser utilizadas en el diseño de estrategias de enseñanza para favorecer la coherencia que forma parte de los esquemas-EV en sus niveles más altos.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) *Research in collegiate mathematics education*, Vol. 2 (pp. 1-32), Providence: American Mathematical Society.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**(5), 557-578.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries; D. J., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, **16**(4), 345-364.

Dorier J.-L., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dorier, J. L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear algebra, in first year of french university. *Proceedings of the 14th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 35-42.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, **22**(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **29**(2), 175-197.

Dorier, J. L. (1996). Basis and Dimension: From Grassmann to van der Waerden, G. Schibring (ed.), Hermann Günther Grassmann (1809/1877): *Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar –Papers from a Sesquicentinnial Conference, Boston Studies in the Philosophy of Science,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 175-196.

Dorier, J. L. (1997) (ed.). *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*. Grenoble: La Pensée Sauvage editions.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications* (275), **1** (4), 141-160.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. En J. L. Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers: Netherlands. pp. 255-273.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, pp. 85-106.

Harel, G. (1987). Variations and linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics*, 7, 29-32.

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11**(1-2), 139-148.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, **21**(3), 387-392.

Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory. In European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1778–1787. Sant Feliu de Guixols, Spain.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. *Proceedings of the 30th PME conference*, 4, 129 -136. Prague, Czech Republic.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *40(2),* 265-276.

McDonald, M. A., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, J. J. Kaput, y A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 77-102. Providence, R.I.: AMS and Washington D.C.: MAA.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory, *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Estambul, Turquía.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112-2124.

Piaget, J. y García, R. (1983/1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Obra original publicada en 1983)

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 13(1), 89-112.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques*, 29 IREM de Paris VII.

Sánchez-Matamoros, G. y García, M. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias* 24(1), 85-98.

Sierpinska, A., Nnadozie A. y Oktaç A. (2002). *A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra.* Concordia University: Montreal.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática,* 17, 5-31.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 157-176.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Trigueros, M. y Dubinsky E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL, Preliminary Version*. Disponible en http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/ Consulta: 30/01/2012.

Autoras:
Marcela Parraguez González
Profesora e Investigadora del Instituto de Matemáticas (IMA), de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Doctora en Matemática Educativa.
Investigadora en el área del Pensamiento Matemático Avanzado.
Línea de Investigación: Didáctica del Álgebra Lineal y el Álgebra
IMA-PUCV
Blanco Viel nº596, Cerro Barón, Valparaíso. Chile
56-32-2274014
marcela.parraguez@ucv.cl

Asuman Oktaç
Investigadora Titular y Coordinadora Académica del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. Doctora en Matemáticas. Temas de investigación: didáctica del álgebra lineal, álgebra abstracta; niños talento en matemáticas.
Cinvestav-IPN
Av. IPN 2508
Departamento de Matemática Educativa
Col. San Pedro Zacatenco
México, D.F. 07360
52 55 5747 3800 Ext. 6040
oktac@cinvestav.mx