MODIFICACIÓN DE UN CONFLICTO SEMIÓTICO EN UN AMBIENTE DE TRABAJO COLABORATIVO[1]

Jaime H. Romero C.
jaimeedumat@udistrital.edu.co
Pedro Javier Rojas G.
pedroedumat@udistrital.edu.co
Martha Bonilla E.
marthabonillae@gmail.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Recibido: 4/ 08 / 2009 **Aceptado:** 03/03/2010

Resumen

En este escrito se presenta un análisis de la actividad matemática realizada por dos estudiantes en un curso de Didáctica de la Variación del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de caldas- Bogotá, para describir y analizar el uso del registro algebraico alfanumérico al resolver un problema de modelación relacionado con la función lineal cuando participaron en un entorno de aprendizaje que promueve el trabajo colaborativo. El análisis reporta evidencia de la presencia de conflictos semióticos y de la modificación de un conflicto interaccional en un conflicto cognitivo. Este análisis permite caracterizar la emergencia de los conflictos semióticos y cómo son manejados por las estudiantes, aportando información útil para comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas, en un contexto de aula en el que se adopta la resolución de problemas.
***Palabras clave**:* registro algebraico, conflicto semiótico, trabajo colaborativo.

MODIFICATION OF CONFLICT SEMIOTIC IN A COLLABORATIVE WORK ENVIRONMENT

Abstract

This paper presents an analysis of mathematical activity developed by two students in a course on Didactic of Variation which belongs to the Program of Teachers Formation in Basic Education with Emphasis in Mathematics from the Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. It describes and analyzes the use that those students did about alphanumeric algebraic register to solve a modeling problem related to the linear function when they were involved in a learning environment that promotes collaborative work. The analysis evidence the presence of semiotic conflicts and the change from interactional conflict into a cognitive conflict. This analysis allows characterizing the semiotic conflicts emergence and how they are handled by the students, providing useful information for understanding the learning processes of students trying to become a mathematics teacher in a classroom context in which the solving of problems is adopted.

[1] Este artículo es un resultado de la investigación "Conceptualizando la enseñanza a través de video-clips", que actualmente realizan los integrantes del grupo MESCUD, orientada a indagar sobre el uso de casos en la formación de profesores de Matemáticas, en colaboración de tres grupos: MESCUD de Bogotá-Colombia, Innovación y Formación Didáctica de Alicante-España y NRD de Bologna-Italia.

Keywords: Algebraic Register, Semiotic Conflict, Collaborative Work

Introducción

Aprender a enseñar matemáticas requiere, en particular, aprender matemáticas y/o re-significar la matemática escolar, lo cual entraña aprender a usar registros de representación semiótica institucionalmente promovidos (Duval, 1999). La institucionalidad se asume aquí vinculada a las comunidades de práctica matemática (Godino, 2002). A su vez, el uso de registros exige del aprendiz coordinarlos con diversos sistemas semióticos personales (Radford, Bardini & Sabena, 2006).

El aprendizaje del registro algebraico (NOTA 1) no resulta fácil para los estudiantes. Diversos resultados de investigación coinciden en que "la sintaxis algebraica no es transparente" (Radford y otros, 2006: 684). Tampoco lo es su semántica. Küchemann (1980) introduce discusiones relacionadas con la diversidad de interpretaciones que de la letra hacen los estudiantes, Pretexto (1997) encuentra que incluso los numerales son motivo de interpretaciones cuando representan números irracionales que llegan a ser similares a las de las letras y Radford (2002) enfatiza en que, con escaso número de caracteres y reglas sintácticas, este registro ofrece precisión y concisión para formar expresiones. En relación a estos aspectos, Duval (2002) indica que:

> lo que está en juego en un aprendizaje del álgebra que sea formativo es la toma de conciencia por los estudiantes de la diversidad de procedimientos discursivos de designación de los objetos tanto en lenguaje natural como en los registros «formales» (p. 68);

planteando un problema cognitivo relativo a la designación de los objetos en el aprendizaje del álgebra y un análisis del mismo.

Al estudiante se le exige el uso del registro algebraico alfanumérico, pero mientras lo domina su actividad ocurre entre los requerimientos del registro algebraico y las posibilidades y restricciones de los sistemas semióticos de representación generados por las interpretaciones personales de tal registro. Las relaciones entre la diversidad de procedimientos de designación, las diferentes interpretaciones de la letra y el uso de universos numéricos específicos en los que el aprendiz puede actuar, indican que el estudiante usa registros algebraicos diferenciados, aunque institucionalmente correspondan a un mismo registro: el registro algebraico alfanumérico. El hecho que estudiantes novatos atribuyan significados dispares o discordantes a expresiones en registro algebraico puede ser enfocado mediante la noción de *conflicto semiótico* (Godino 2002; D´Amore, Font& Godino, 2007 y Font & Planas, 2008).

En tanto el aprendizaje es entendido como participación gradual en una comunidad de práctica, en este caso la comunidad de profesores de álgebra, resulta importante indagar cómo aprenden los estudiantes que participan en un contexto que privilegia la colaboración (Llinares y Krainer, 2006); específicamente, cómo usan los instrumentos conceptuales propios de dicha comunidad, entre los que se encuentran los significados del registro algebraico alfanumérico y las características de su aprendizaje. En la investigación aquí reportada se indaga en los conflictos semióticos que emergen en el uso del registro algebraico alfanumérico cuando dos estudiantes para profesor (EPP) resuelven colaborativamente un problema de modelación relacionado con la función lineal. Este análisis permite caracterizar la emergencia de los conflictos semióticos y cómo son manejados aportando información útil para comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas.

El análisis en este escrito se centra en las representaciones producidas, individual y grupalmente, así como en el propósito de uso de las mismas, orientado a presentar evidencias de que el trabajo colaborativo –sin desconocer las dificultades generadas con las demandas cognitivas que imponen los registros semióticos de representación–, posibilitó una modificación de un conflicto semiótico de tipo interaccional hacia un conflicto de tipo cognitivo, más que la reelaboración de un conocimiento nuevo compartido.

Marco teórico

Desde una perspectiva sociocultural, aprender a enseñar matemáticas en educación básica implica incorporarse en una comunidad de práctica (Llinares, 2004). En tal comunidad se puede diferenciar dos tipos de práctica (NOTA 2): la relativa a la matemática y la relativa a su didáctica. Se entiende como práctica matemática "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicarla a otras personas, así como validarla y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994; citado por Font & Planas, 2008:17-18). Siguiendo esta idea, en este artículo se entiende como práctica didáctica cualquier acción o manifestación (lingüística o de otra forma) llevada a cabo por alguien para resolver problemas relacionados con las tareas profesionales y articuladoras de la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2008).

Los conocimientos matemático y didáctico, emergentes de las prácticas son dependientes "de las instituciones culturales y de los contextos sociales donde el aprendiz está implicado y de las actividades que él o ella desarrollan ahí" (Font & Planas, 2008:17). Las instituciones culturales proveen a las comunidades de práctica de instrumentos físicos y conceptuales que permiten desarrollar actividades específicas de la práctica y de modos de realizarla –formas de explorar, de decir, de ser; reconocidas como legítimas y deseables– (Radford, 2006). Los contextos sociales disponen de manera particular lo que proveen las instituciones culturales para que los aprendices realicen las prácticas que les permitirán manejar paulatinamente los instrumentos de la práctica como una manera de iniciar la integración en la comunidad de práctica; de manera específica, regulan las actividades instrumentales y discursivas que emergen en la realización de dichas prácticas.

Registros algebraicos.

En la actualidad se reconoce la existencia de diversas álgebras en la historia de la humanidad. Cada álgebra ha construido y usado su propio registro –maneras de designar lo desconocido, maneras de representar y de operar–, para abordar las clases de problemas que ella trata (ver, por ejemplo, Puig, 1998). La comunidad de práctica de los matemáticos usa el registro algebraico alfanumérico, proveniente de la edad media y modernidad europea (Wallis, 2007), convirtiéndolo en paradigmático y casi único; hecho que permea la comunidad de práctica de profesores de álgebra escolar.

El registro *alfanumérico* fue construido teniendo como pretensión que cada cosa sea nombrada de la manera más corta posible, usando letras para representar las magnitudes, relacionarlas y operar con ellas –si se pueden relacionar rectas y operar con las representaciones de éstas, se puede operar con las letras en tanto forma de representarlas–. La letra no sólo nombra sino que tiene un carácter operatorio y relacional. La asunción de este doble carácter de la letra no es posible sólo desde el uso del registro, pues se trata de una manera de nombrar, que además de compleja encierra sentidos diferentes a los del usual acto de nombrar: relacionar, sustituir y operar, que generan vínculos que posibilitan la expansión discursiva. Respecto a la complejidad del nombrar, para el registro algebraico Duval (2002) describe los siguientes procedimientos de designación de los objetos: *directa asociativa*, *directa sistemática* y *funcional* (dependientes de la función referencial), *escritura literal* y *equivalencia referencial* (dependientes de la función apofántica); para no confundir las formas de designación de acuerdo a su función, a las primeras las denomina designación y a las otras descripción determinativa.

Conflictos semióticos.

Desde el enfoque ontosemiótico, Godino, Batanero y Font (2007) denominan *conflicto semiótico* a:

> […] cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales (p. 15).

Se habla de *conflicto interaccional* cuando: (1) hay disparidad de significados entre dos individuos en interacción comunicativa, o, (2) se evidencia una disparidad entre los significados que una institución ha dispuesto para un objeto y el significado del que lo va dotando un individuo en sus prácticas operativas y discursivas. En la segunda opción este conflicto es reconocido por un sujeto representante de la institución, la(s) persona(s) directamente involucrada(s) quizás no lo reconozca(n) explícitamente. Por otra parte, cuando el individuo toma conciencia del contenido del conflicto interaccional, y por lo tanto se hace explícita para él una disparidad entre prácticas que forman su significado personal, se genera un *conflicto cognitivo.*

La toma de conciencia de tales conflictos es una opción que posibilita conducir al sujeto a una actividad intencional que le permita hacerse a los significados institucionales pretendidos. Dicha toma de conciencia puede estar ligada a procesos de interacción con otros (trabajo con pares, normas sociomatemáticas, etc.).

Considerando estas referencias, el objetivo de esta investigación es caracterizar la emergencia de los conflictos semióticos y cómo son manejados en situaciones de resolución de problemas que conllevan la variación en un contexto de aprender las prácticas matemáticas que son relevantes en la enseñanza de las matemáticas

Metodología

Contexto de la clase.

Los datos de esta investigación proceden de una experiencia desarrollada en un curso de Didáctica de la Variación (EPP, *n=28*), del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá-Colombia). La formación de los estudiantes para profesor (EPP) se realiza desde cuatro núcleos: *Resolución de problemas* (aritméticos, algebraicos,…), *Didáctica* (de la aritmética, del álgebra, de la estadística, …), *Práctica docente* (Investigación en el aula, prácticas I a V y práctica intensiva) y *Contextos profesionales* (ambientes y mediaciones, resolución de conflictos, …). LEBEM (1999). Dicho programa se orienta a formar profesores de matemáticas para la educación básica (grados 1° a 9°, niños y jóvenes entre 6 y 15 años).

El trabajo de los estudiantes se organizó en ciclos, cada uno de los cuales incluyó la siguiente secuencia: trabajo individual, trabajo colaborativo entre pares (grupos mínimo de dos integrantes), discusiones entre grupos y plenaria. Institucionalizaciones sucesivas se realizaron en las sesiones plenarias.

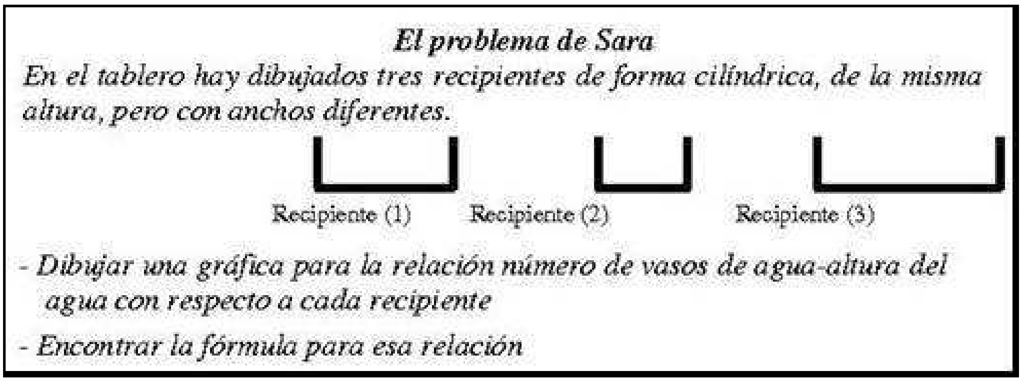
Los EPP tienen experiencia en dicho tipo de organización y asumen las siguientes normas sociomatemáticas adoptadas en la clase, (1) Todo problema es un caso particular de una clase de problemas conectada a una estructura matemática, (2) Resolver el problema es encontrar una clase de problemas y una estructura matemática conectada (3) Las producciones matemáticas de los estudiantes tienen siempre una justificación y una racionalidad que profesor y estudiantes deben tratar de comprender. Las dos primeras normas se fundamentan en las facetas duales de los objetos matemáticos (Godino, 2002) y la tercera en el principio de cooperación de Grace (1975:45) fundamental en la comunicación humana desglosado en las siguientes máximas (1) “Haz que tu contribución sea tan informativa como sea necesario”, (2) “Haz que tu contribución sea verdadera”, (3) “Sé pertinente, no digas algo que no viene al caso” y (4) “Sé claro, evita la ambigüedad, sé breve, sé ordenado”. Tales normas, en conjunto, constituyen una metapráctica matemática específica (D´Amore, Godino, Font, 2007).

El diseño de clase se basó en un enfoque de resolución de problemas (Charnay, 1993) e integró un aula presencial y un aula virtual. La actividad básica estuvo orientada por la resolución del problema planteado, denominado “El problema de Sara”; enfatizando en el aula presencial la práctica matemática y en el aula virtual la práctica didáctica.

La situación-problema propuesta.

Esta situación problema corresponde a la tarea que la profesora Sara propone a sus estudiantes de secundaria (Llinares, 2000):

Grafico 1. *Situación Problema Propuesta*



Los datos.

En este escrito se describe en detalle el trabajo realizado por Angélica y Elisa, durante 4 sesiones de 2 horas de clase cada una, en las que realizaron sus soluciones individuales, las discutieron y propusieron una solución grupal. Los datos seleccionados fueron los escritos, realizados por cada una de ellas y en grupo colaborativo, que contienen las soluciones al problema de Sara; las transcripciones de dos grabaciones en audio, una durante el proceso de discusión y producción de la solución conjunta y otra durante una entrevista individual semiestructurada realizada al final del curso.

El análisis de los datos.

El análisis de los textos de la producción individual y del texto de la producción grupal de las dos EPP, se realiza con base en la interacción entre las operaciones fundamentales en la comprensión de un texto denominadas por Duval (1999), la segmentación y la recontextualización (Rojas, P. y Bonilla, M. 2009).

El análisis enfocó las representaciones semióticas producidas por las estudiantes, individual y grupalmente y se realizó en dos fases. La primera tiene un carácter descriptivo, de la cual se obtiene una primera organización de los datos denominadas retículos representacionales. (La noción de retículo acá asumida proviene completamente de las matemáticas). La segunda fase tiene un carácter interpretativo en la que se intenta identificar la presencia de conflictos interaccionales y su modificación.

Fase I: Uso de los registros de representación y sus propósitos en la solución del problema. Los datos tomados en esta fase corresponden a los tres escritos que contienen las soluciones presentadas por las EPP, tanto de manera individual como grupal-colaborativa. Inicialmente se segmentó el texto producido por cada una de la EPP, y se reconoció en cada trabajo una secuencia de representaciones ordenada de manera lineal, conformando un discurso para dar solución a la tarea.

La segmentación fue generada por la siguiente rejilla de preguntas: ¿qué tipo de registro algebraico se utiliza?, ¿qué tipo de número utiliza? ¿qué interpretación de la letra realiza?.

Se utilizó la siguiente codificación básica adaptada de la propuesta por D'Amore (2006b); R_j^i: *j-ésima* representación en el registro *i-ésimo,* donde el índice *j* se asigna según el orden de aparición en el respectivo trabajo, mientras que a *i* se le asigna un orden según la siguiente lista: gráficos R^1 (2D/2D) y R^2 (3D/2D), aritméticos R^3, algebraicos R^4, cartesiana (R^5), lengua natural (R^6) y tabular (R^7).

Los registros algebraicos se diferencian de acuerdo con el tipo de escritura numérica aceptada y la interpretación de la letra, así: $R^{4\text{–}k,\ h}$, donde el índice *k* refiere el universo numérico (1 los naturales, 2 los enteros, 3 los números con expresión decimal finita y 4 los reales) y *h* refiere un uso de la letra (1 letra evaluada, 2 incógnita, 3 número generalizado y 4 variable, con base en la caracterización dada por Küchemann, 1980).

Para ejemplificar este tipo de análisis se presenta el siguiente texto producido por la estudiante E_2:

Representación		*Notación*	*Descripción*
Unidad $V = \pi(2.3)^2 10$ $V = 1130.4$	rec 1 $V = \pi(2.6)^2 10$ $V = 4521.6$	$R_7^{4-4,1}$ (O_6)	Representación 7 (primera fila), en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números reales (4); interpretación de la letra como evaluada (1); de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6): $V = \pi(2.3)^2 10$, $V = \pi(2.6)^2 10$, ...
rec 2 $V = \pi(2.9)^2 \cdot 10$ $V = 10173.6$	rec 3 $V = \pi(2.12)^2 10$ $V = 18086.4$	$R_8^{4-3,1}$ (O_6)	Representación 8 (segunda fila), en registro algebraico (R^4) en el conjunto de los números decimales (3); interpretación de la letra como evaluada (1); de la relación entre volumen-altura-radio del vaso unidad (O_6): V = 1130.4, V = 4521.6, ...

Tabla 1

Entre los aspectos a resaltar del texto elaborado por E2, está que para trabajar con el número π, la estudiante debe pasar a un registro de números con coma en base diez, es decir, sistemáticamente no opera con dicho número (lo hace con el número 3.14); los números con coma que usa no son de más de dos dígitos y la operatoria sobre la letra la realiza evaluándola.

El análisis de recontextualización, se centra en las transformaciones semióticas de *tratamiento* y *conversión*. Se obtiene una secuencia lineal de las transformaciones utilizadas por cada de las estudiantes, como la siguiente:

Transformación de Tratamiento: $\Rightarrow$ *Transformación de Conversión:* $\rightarrow$	$R_3^{4-4,2} \Rightarrow R_4^{4-4,2} \rightarrow R_5^{6} \rightarrow R_9^{4-4,3} \rightarrow R_{10}^{4-4,1}$

Tabla 2

De tal manera que la reconstrucción de las relaciones que permiten comprender el texto como una totalidad, permitió construir tres retículos representacionales, en cada uno de los cuales se identifican tres tramos, delimitados por la diferenciación de los propósitos discursivos en la solución dada al problema, para los que se usan registros semióticos diferentes: gráfico, algebraico y tabular. En las siguientes tablas se describen los retículos que evidencian la diversidad de registros usados y la diferencia de las tres producciones y, en particular, la mayor linealidad en la producción conjunta.

Del discurso de Angélica

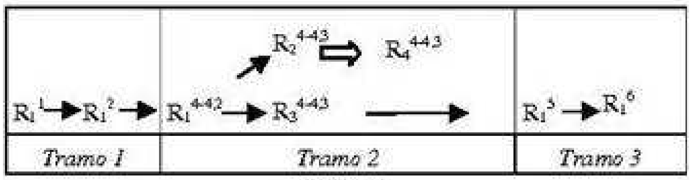


Tabla 3

Del discurso de Elisa

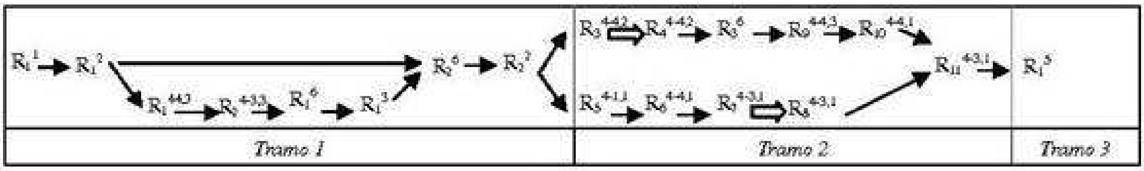


Tabla 4

Del discurso en Grupo

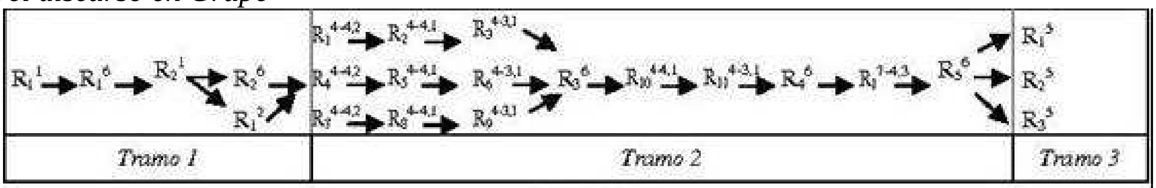


Tabla 5

Fase II: Conflictos semióticos relacionados con procedimientos de designación. En los retículos representacionales, específicamente en el tramo 2 donde se hace intensivo el uso del registro algebraico, se identificó la diversidad de procedimientos de designación, las diferentes interpretaciones de la letra y el uso de universos numéricos específicos con los cuales las EPP pudieron actuar, lo que permitió identificar dos tipos de conflictos semióticos *uno* relacionado con procedimientos de designación y el otro con la expansión discursiva (Duval, 2002).

El primero se manifiesta en la disparidad entre la designación exigida por el registro algebraico alfanumérico y el registro utilizado por cada una de los sujetos. Un segundo conflicto que se manifiesta en el uso de las transformaciones de representaciones exigidas por la institución y el usado por los sujetos, en particular mientras para la institución el uso debe ser un tratamiento para los sujetos es una conversión.

	Objeto	Nominación	Tipo de aprehensión de los objetos / Función de la lengua	Tipo de objeto
3a	Secuencia de fórmulas (volumen máximo de cada recipiente en función de la secuencia de radios)	$V_1 = \pi r^2 h$ $V_2 = \pi(2r)^2 h$ $V_3 = \pi(3r)^2 h$	Designación funcional sobre una equivalencia referencial / Apofántica	Dominio de "segundo nivel" de individuos para ser nombrados
3b	Secuencia de relaciones (volumen de cada recipiente con radio y altura)	$V_2 = \pi 4r^2 h$ $V_3 = \pi 9r^2 h$	Equivalencia referencial/ Apofántica	Dominio de individuos
3c	Secuencia de relaciones (volumen de cada recipiente con radio y altura)	$V_2 = 4\pi r^2 h$ $V_3 = 9\pi r^2 h$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos
4	Secuencia de relaciones (altura del agua en cada recipiente, el volumen respectivo y el radio)	$h_1 = V_1 / \pi r^2$ $h_2 = V_2 / 4\pi r^2$ $h_3 = V_3 / 9\pi r^2$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos
5	Secuencia de relaciones (número de vasos, volumen de cada recipiente y volumen del vaso unidad)	$Nv_1 = \pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_2 = 4\pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_3 = 9\pi r^2 h / \pi r^2 h$ $Nv_n = n^2 (\pi r^2 h) / \pi r^2 h$	Equivalencia referencial	Dominio de individuos

Tabla 6

En la tabla anterior, se puede visualizar un "conflicto" en el vínculo entre las unidades de las filas (3) y (4). Mientras en (3) se utiliza una fórmula para el volumen de cada uno de los recipientes de altura fija h, en (4) se acude a esta fórmula para "despejar" las alturas alcanzadas en cada uno de los recipientes al verter en ellos el vaso unidad de agua.

Si la expansión discursiva se da por deducción, el objeto designado en (4) no sería una transformación de tratamiento ni una de conversión del objeto referido en (3). Si se tratara de una instanciación, podría obtenerse por tratamiento de la expresión $V = \pi r^2 h$ (para todo V, r, h), pero éste no es el caso pues tal expresión no es usada por la estudiante E_1; se trata pues de una "cuasi-transformación", en tanto en (4) se introduce un nuevo objeto, intentando mantener la nominación dada en (3), más aún, asumiéndola como una transformación de tratamiento.

Resultados.

Identificación del uso de los registros de representación y sus propósitos en la solución del problema.

Las dos estudiantes –tanto en el trabajo individual como en el grupal– utilizan transformaciones entre los registros algebraicos a fin de solucionar el problema y es aquí donde cada una inició su proceso, diferenciado, respecto a la generalización.

Angélica, utilizó representaciones algebraicas para establecer secuencias [familias] de recipientes, de sus volúmenes y de sus radios, designándolos con una misma letra *n* que, en los dos primeros casos, tomó el estatus de índice, y que sin explicitarlo, asumió variando en los enteros positivos y, en el tercer caso, tomó el estatus de parámetro. A partir de una *fórmula* del volumen de un cilindro, y de establecer una relación (Volumen recipiente *i* / Volumen unidad) se propuso encontrar una *fórmula* para el número de vasos requeridos para llenar cada recipiente y para la altura respectiva, producida en cada uno de los recipientes de la familia antes dicha, cuando se les vierte el agua del vaso unitario (Figura 1). Pudo realizar la primera cuestión. No logró hacer la segunda dado que designó con la misma letra tanto la altura constante de todos los recipientes como la altura del agua en cada uno (variable).

$$N_{v_n} = \frac{n^2(\pi^2 r^2 h)}{\pi r^2 h}$$

$$h_n = \frac{h_n}{n^2}$$

Figura 1

Elisa, por su parte, pasó de una *fórmula* del volumen de un cilindro a casos particulares – *instanciaciones*– asignando valores enteros a las letras que aparecen en ella, “cambiando” los números irracionales o fraccionarios por expresiones en registro decimal de una o dos cifras flotantes (Figura 2). Por otra parte, a partir de conversiones y tratamientos de esa *fórmula* del volumen, encontró volúmenes máximos (capacidad) para cada uno de los recipientes y para la unidad de medida, así como valores para las alturas de casa recipiente cuando se vierte en ellos un vaso [unidad] de agua.

Unidad $V = \pi(2\cdot3)^2 10$
$V = 1130.4$

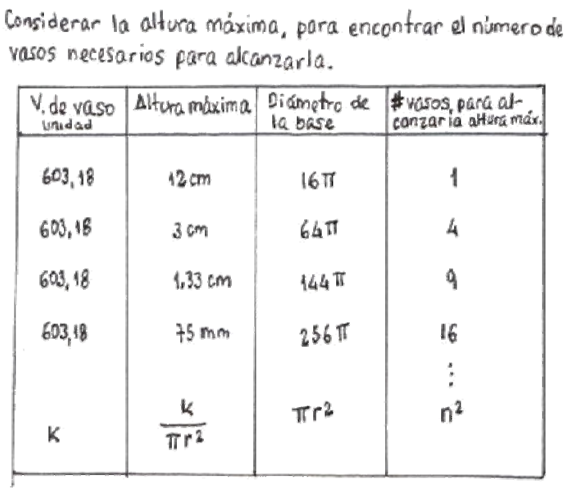
rec 1 $V = \pi(2\cdot6)^2 10$
$V = 4521.6$

rec 2 $V = \pi(2\cdot9)^2 \cdot 10$
$V = 10173.6$

rec 3 $V = \pi(2\cdot12)^2 10$
$V = 18086.4$

Figura 2

En la solución grupal utilizaron con intensidad el registro en lengua natural. Mediante su uso explicitaron las relaciones que fueron estableciendo. Las representaciones gráficas estuvieron subsumidas en representaciones multirregistro comandados por la lengua natural. Acordaron partir de casos particulares, introduciendo un registro tabular (Figura 3), con una función preponderantemente heurística, como forma de organizar y controlar los dos tipos de objetos en los problemas de álgebra las variables (mediante sus evaluaciones) y algunas de las relaciones entre ellas; además de secuencias de posibles *funciones*.



Considerar la altura máxima, para encontrar el número de vasos necesarios para alcanzarla.

V. de vaso unidad	Altura máxima	Diámetro de la base	#vasos, para alcanzar la altura máx.
603,18	12 cm	16π	1
603,18	3 cm	64π	4
603,18	1,33 cm	144π	9
603,18	75 mm	256π	16
			⋮
K	$\frac{k}{\pi r^2}$	πr^2	n^2

Figura 3

Al contrastar lo realizado en los trabajos individuales y en el grupal se pudo ver que el tramo 2 conservó el propósito de explicitar relaciones y condiciones para resolver el problema. Aquello en lo que se diferenciaron –en cómo se construyó el proceso de solución, particularización vs generalización y los usos de familias relacionadas en términos de un índice–, fue asumido mediante la construcción explícita de una tabla que les permitió a la vez tener los casos particulares y proceder a hallar reglas generales, mediante patrones y regularidades numéricas de relaciones entre variables y sobre las variables mismas. En la última fila de la tabla, y para la información respectiva en cada columna, estos patrones generalizadores aparecen expresados mediante letras. Sin embargo, no aparece un patrón o una expresión generalizadora vinculando las configuraciones generalizadoras dispuestas en cada una de las columnas.

Fase II: Conflictos semióticos relacionados con procedimientos de designación.

El análisis de las producciones representacionales de las estudiantes permitió encontrar dos conflictos semióticos, que se describen a continuación.: (i) El conflicto relativo a la diferencia en el uso exigido por el registro algebraico (institucionalizado) y el uso del registro algebraico con el cuál actúa el sujeto (personal), y (ii) El conflicto relativo a los requerimientos del uso de distintos registros algebraicos.

Primer conflicto: Relativo a la diferencia entre el uso exigido por el registro algebraico (institucionalizado) y el uso del registro algebraico con el cual actúa el sujeto (personal).

Las dos estudiantes, de manera individual y en el trabajo colectivo, usaron principalmente los registros gráficos y algebraicos para designar las cantidades conocidas –lo dado en el problema–, las cantidades desconocidas y las relaciones entre las cantidades desconocidas y conocidas. Cada una, y de manera individual, mostró en su forma de designar, usos diferenciados del lenguaje algebraico; con base en (Duval, 2002) y (Godino, et al., 2007) se puede colegir un conflicto semiótico *interaccional, entre un uso institucional y un uso personal* manifestado en las formas de expresión usadas para introducir objetos de distinto tipo en los registros algebraicos.

$V_n=\pi r_n^2 h$ V_n: Volumen del recipiente n r_n: radio del recipiente n	$V_1=\pi r^2 h$, $V_2=\pi(2r)^2$, $V_3=\pi(3r)^2$, $V_n=\pi(nr)^2 h_n$ V_n: Volumen del recipiente n nr: radio del recipiente n
$h_n=h/n^2$ h_n: altura que alcanza el agua en el recipiente al verter un vaso unidad de agua h: altura fija de los recipientes	$h_n=h_n/n^2$ h_n: altura que alcanza el agua en el recipiente al verter un vaso unidad de agua (y altura de los recipientes)
Uso institucional del lenguaje algebraico	*Uso personal del lenguaje algebraico*

Tabla 7

Los dos niveles de expresión existentes para introducir objetos en los registros algebraicos corresponden a las funciones discursivas de la lengua: la función referencial y la función apofántica (Duval, 2002). En el primer nivel de expresión donde actúa la función referencial directa, se designa con una letra el objeto altura (constante, dada) de los recipientes, delimitando previamente el ancho como el diámetro del cada recipiente. En el segundo nivel de expresión donde actúa la función apofántica de la lengua, se instituye la relación funcional entre el volumen, la altura y el radio no solo de cada uno de los recipientes presentados sino de todos los recipientes cilíndricos; en este caso se introduce un tipo de objeto sólo presente en una cultura matemática.

La designación de la altura fija (constante, dada) y de la altura del agua en cada recipiente cuando se vierte un vaso unidad (variable, no dada) mediante la misma letra, *h*, (Figura 4)

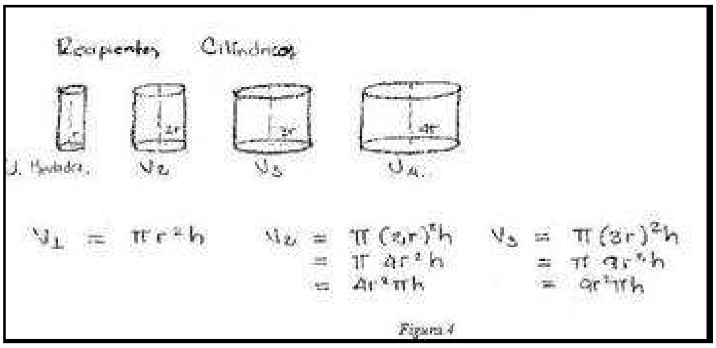


Figura 4

es una manifestación de cierta ausencia de reconocimiento, en uso, de estos dos niveles diferenciados de expresión, mientras que una cultura matemática institucional, exige del usuario mantener conciencia explícita de esta diferenciación. Específicamente, en el caso de Angélica, ella usa la letra *r* para referir un radio específico y 2*r*, 3*r*, 4*r*,…, n*r* y estuvo vacilante respecto a cuáles eran los objetos así referidos y por lo tanto sobre las descripciones de sus relaciones. Dicha vacilación se debe a que a la expresión hecha puede llegarse por conversión desde el registro lengua natural de la expresión «el radio del recipiente n-ésimo es n*r*», o sea, «*r* = n*r*», revelando también una costumbre de la cultura escolar: usar como letra para designar un objeto típico la primera letra de la palabra que lo nombra.

En el uso que esta estudiante hace del registro algebraico, mezcla la designación directa por asociación con la condensación, pertenecientes a niveles diferentes de expresión, caracterizado el uno por el uso de la función referencial y el otro por el uso de la función apofántica de la lengua. En el caso descrito anteriormente, el uso institucional del registro algebraico alfanumérico exige la designación por equivalencia referencial entre dos expresiones, por ejemplo, la relación funcional $r(n) = nr$.

Ahora bien, al interior de cada uno de los niveles de expresión también existen formas diferenciadas de expresión que, como en el caso anterior, una cultura matemática institucional, exige del usuario que las mantenga conscientemente explícitas. Cuando Elisa usa 2*r*, 3*r*, 4*r* para referir los radios de los recipientes diferentes al vaso unidad, estuvo tan vacilante como Angélica, debido a que a la expresión hecha puede llegarse por conversión desde el registro lengua natural de la expresión «el radio del recipiente 1°, 2°, 3° es 2*r*, 3*r*, 4*r*», o sea, «*r* = 2 veces *r*, *r* = 3 veces *r*, *r* = 4 veces *r*». El conflicto semiótico aquí descrito, para el caso de Elisa, se da entre una forma de uso de un registro algebraico para hacer una designación directa por asociación y el uso requerido de una designación funcional, pertenecientes ambas al nivel de expresión caracterizado por el uso de la función referencial de la lengua.

Por otra parte, cuando Angélica introdujo las distintas familias de objetos y las describió usando una misma letra *n*, lo hizo como producto generalizaciones de distintos patrones, es decir, *condensó* (Duval, 2002) en expresiones únicas distintas listas de expresiones.

Posteriormente, cuando intentó construir una expresión para la altura del agua en los recipientes en términos de las otras variables entró en conflicto al usar la misma letra *h* para referir dos clases distintas de objetos (Figura 5).

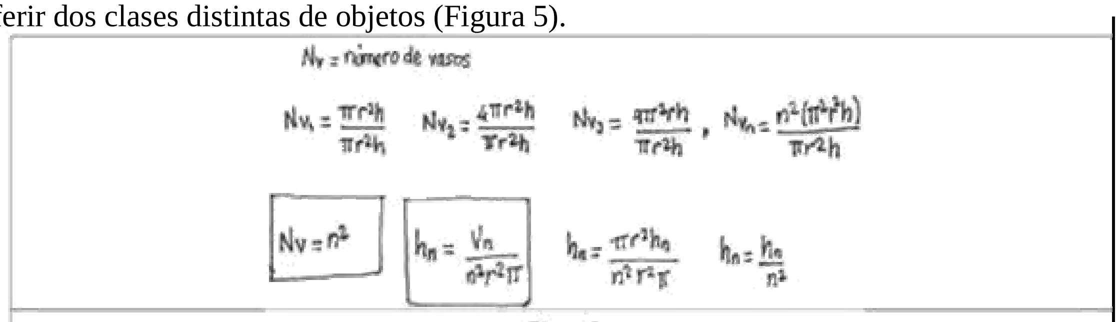


Figura 5

Este hecho significa que de dos maneras de generalización, y por tanto de introducción de objetos de distintas clases de generalidad, expresables mediante la función apofántica de la lengua, Angélica domina más la descripción de relaciones por condensación que la equivalencia referencial entre dos expresiones, y que esta última no la domina plenamente.

Desde lo expresado por las estudiantes mientras elaboraban la solución conjunta al problema, se infiere que fueron conscientes de haber designado con la misma expresión objetos de distinta clase: la altura de los recipientes, la altura del agua en los recipientes y la altura generada por el vertimiento del agua que contiene una unidad de medida (ver subrayado en líneas [2], [3], [5] y [6] de la transcripción T_1):

[1] [18:52] *Angélica: Me daría hasta dos tercios pero eso en altura sería …, o sea, para expresarlo en términos de …*

[2] *Elisa: pero es que, ¿cómo decimos?, o sea la altura, … fijemos una altura, digamos que la altura que alcanza el recipiente,… o sea* <u>*la altura de la unidad de medida del agua es lo que fijamos*</u> *que día [hace unos días], ¿cierto?,… entonces ¿cuánto sería … en el segundo recipiente?,*

[3] *Angélica:* <u>*La altura es la misma*</u>

[4] *Elisa: Ah, pues la altura es la misma, lo que varía es el volumen*

[5] *Angélica: O sea,* <u>*lo que varía es la altura del agua en el recipiente*</u>

[6] *Elisa: …* <u>*¿Qué ponemos entonces?*</u>

[Transcripción T_1]

Sin embargo, en los procesos de solución, tanto individuales como en la posterior puesta en común en el trabajo grupal, la existencia de esta conciencia se reveló insuficiente para no tener que acudir a *instanciaciones.*

En la Figura 6 se observa que Angélica realizó un ordenamiento de los recipientes y designó según ese orden los volúmenes, dejando V_1 para designar el volumen del vaso unidad, y en ese orden V_2, V_3, V_4; mientras que Elisa designó los volúmenes de la unidad y de los recipientes así: Unidad U, rec(1) V, rec(2) V, rec(3) V.

Angélica	Elisa	Grupal
$V_2 = \pi\,(2r)^2 h$	$V = \pi\,(2r)^2 h$ rec(2) $V = \pi\,(2.9)^2 10$	$V_1 = \pi\,(2.4)^2 12$ $= 64\pi.12$ $= 2412,74$

Figura 6

En el trabajo conjunto, designaron de la misma manera, V_1, el volumen de la unidad y el volumen del primer recipiente pero, dado que con éstos obtuvieron datos numéricos particulares "(r = 4), por lo tanto $(2r)^2\pi = 64\pi$, $(3r)^2\pi = 144\pi$, $(4r)^2\pi = 256\pi$…", mientras conformaban una tabla, obviaron el requerimiento de manipularlas al tiempo y por lo tanto de hacer explícitas estas diferenciaciones. Además, estos valores les permitieron calcular mediante tratamiento, en un registro algebraico, valores para la altura en cada recipiente cuando se vierte el vaso unidad.

Segundo conflicto: Relativo a los requerimientos del uso de distintos registros algebraicos. En una ecuación en registro algebraico alfanumérico hay tres tipos de símbolos diferenciados: letras y cifras del sistema decimal, símbolos de operación sobre los números, y, un símbolo de relación "="; y tres estatus de letra: incógnita, parámetro y variable (Duval, 2002). En las *retículos representacionales* hay representaciones nombradas con

$R_j^{4\text{-}h,k}$; en esta codificación el supraíndice compuesto hace visible la diversidad de interpretaciones que los usuarios hacen de las representaciones que construyen con aquellos símbolos del registro algebraico alfanumérico, puesto que éstas son formas específicas de representación mediante las que quieren o requieren expresar alguna cosa. Entender las representaciones como formas de expresión permite involucrar interpretaciones de la letra y de los numerales (Pretexto, 1997) de tal manera que se justifica reconocer ya no uno, sino distintos registros algebraicos (personales).

Así pues, las estudiantes interpretaron la *fórmula* del volumen como un enunciado que no es un objeto en sí mismo sino que requiere ser actualizado con valores numéricos específicos, dados en expresiones sistemáticas en base diez.

Por lo tanto, para operar con *r* o con π deben reemplazarlos por números "verdaderos" aunque π tenga "menos" grados de libertad que *r*, es decir, deben cambiar de "formato" para acceder a estos objetos (Figura 7).

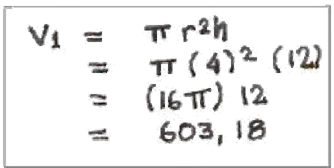


Figura 7

Luego, en tanto formas de expresión, para estas usuarias utilizar el registro algebraico y cambiar el conjunto numérico o cambiar la interpretación de la letra son representaciones en registros diferenciados, y los vínculos entre ellas son conversiones, aunque visto en el registro alfanumérico se trataría de tratamientos.

Una fórmula es un patrón de formación que engloba distintos casos particulares, esta interpretación es consistente con la interpretación de la letra como incógnita y como número generalizado, su pleno sentido matemático aparece con sus *instanciaciones*, asignando, preferiblemente, valores enteros a las letras que aparecen en ella, "cambiando" los números irracionales o los fraccionarios por expresiones en registro decimal de una o dos cifras flotantes (Figura 8).

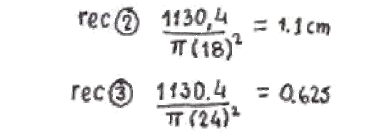


Figura 8

Con el uso de la tabla en el trabajo colaborativo, se manifiesta con nitidez un conflicto entre dos formas de generalización: la generalización por inducción de casos particulares, por reconocimiento de una misma forma de generación: descripción, mediante letras, de una relación o condensación; y la generalización que hace uso del reconocimiento de una forma específica de designación: equivalencia referencial entre relaciones.

Conclusiones

Para estas estudiantes, antes y después del trabajo colaborativo, parece haber tres registros algebraicos ligados, según el propósito de la expresión construida:

Registro algebraico	Propósito
Usa el conjunto de los números reales e interpreta la letra como variable	Referir o formular un patrón general
Usa el conjunto de los números reales e interpreta la letra como variable	Hacer comprehensible una expresión
Usa el conjunto de los números reales e interpreta la letra como variable	Operar con la expresión o, disponerla en una representación gráfica.

Tabla 8

En relación con cada uno de los trabajos individuales, en el trabajo colaborativo las estudiantes manejaron mejor los niveles de designación y por tanto el uso de la lengua y los tipos de aprehensión cognitiva de los objetos. Esto lo lograron mediante una representación intermediaria, una tabla de doble entrada, en la que combinaron los usos exitosos de las formas de designación de la una con los de la otra. El conflicto interaccional relativo al uso de los subíndices lo obvian a través de las filas en la representación tabular y el conflicto entre designación directa y funcional se obvia mediante el encabezamiento de las columnas. En cada celda de la tabla incorporan las instanciaciones de un patrón general que aparece en la última fila de la columna respectiva.

Las estudiantes tomaron conciencia sobre el método que usaron para generalizar, condensación (Duval 2002: 82), así como de la inutilidad de tal método para establecer una equivalencia referencial (Duval 2002: 87) que les hubiera permitido resolver en su forma más general el problema (ver subrayado en párrafos siguientes):

[Párrafo 1]… *cuando uno toma un caso particular uno se da cuenta de lo que sucede, pero entonces cuando generalizamos uno no encuentra cómo establecer … como esas relaciones, por ejemplo acá entre el diámetro y la altura, o sea ¿cómo uno grafica?, o sea esa relación, o sea, ¿cómo obtengo cualquier radio?, ¿cómo obtengo cualquier altura? y [cómo] las logro graficar. Porque acá, ¿si?, yo tengo que esto aumenta de tres en tres, o sea se evidencia más rápido que uno puede… o sea sabe cómo se comporta… pero entonces ¿si yo tengo cualquiera…?*

[Párrafo 2] *Lo más difícil… pues encontrar la generalización porque no, hasta ahora no, no hemos encontrado esa manera como de expresar sin necesidad de depender como de algo o sea depender de que tengo que establecer una unidad fija para poder mirar qué pasa con las otras…eso es lo que de pronto no se ha podido hacer [planteado por Angélica, mientras Elisa asiente]*

(Entrevista conjunta, Transcripción T_2)

Puede afirmarse que se trata de un cambio en el tipo de conflicto semiótico: pasan de un conflicto básicamente interaccional (personal-institucional) a un conflicto cognitivo, esto es, en el proceso de interacción lograron dilucidar un vacío de conocimiento respecto a una manera de designar que reconocen debe estar dispuesta en el álgebra.

Discusión.

En las conclusiones se ha visto la bondad del trabajo colaborativo de las dos estudiantes, particularmente en lo relacionado con el cambio de un conflicto interaccional en uno cognitivo. Pero, aún compartiendo con Duval (2002: 89) que:

> […] no se puede esperar ningún progreso significativo en este dominio en tanto que la enseñanza no asuma las condiciones de una real toma de conciencia, por los alumnos, de la diversidad necesaria de los procedimientos de designación de los objetos, la cual casi siempre es abatida sobre la designación directa. ¿Tal asunción está incluida en la enseñanza de las matemáticas?

los resultados presentados permiten preguntar qué explica que a pesar de esa fuerte toma de conciencia, las dos estudiantes no hayan modificado su posibilidad de uso del registro algebraico, en particular no hayan logrado el procedimiento de designación de equivalencia referencial.

La conformación del grupo colaborador (Elisa y Angélica) puede ayudar a dar una respuesta. En el trabajo conjunto apareció adecuadamente usado el máximo nivel de designación de entre los usados individualmente, y una estrategia de reorganización cognitiva recogiendo maneras de controlar, disponer y generar los datos. Esto explica la no elucidación de la equivalencia referencial ni de los subíndices, pero su relativa incorporación a través de las columnas de la tabla, en el primer caso, y de las filas en el segundo.

Lo anterior permite explicar la producción del grupo colaborador, pero este grupo participó de la actividad total de la clase, y en ella se dio el uso de la función apofántica de la lengua para efectuar designación por equivalencia referencial, ¿por qué el grupo colaborador no avanzó hacia esta posibilidad?

Si bien, en principio podría pensarse que tal responsabilidad recae sobre el estudiante o sobre el docente, en realidad se trata de un hecho más complejo. En tanto se reconoce que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas, una explicación plausible pasa por ubicar las prácticas matemáticas en las que participaron las estudiantes en relación con el sistema de prácticas de la cultura matemática escolar institucionalizada.

El caso aquí tratado pertenece a un sistema de práctica caracterizado por la tensión de un cambio de enfoque, desde el centrado en aspectos sintácticos del registro alfanumérico y la ejercitación –énfasis en el signo– hacia la resolución de problemas de modelación –énfasis en el sentido– (MEN, 1998; LEBEM, 1999). Ambos enfoques reflejan la ausencia de un marco comprensivo suficientemente complejo para la elaboración de sentido del registro algebraico alfanumérico (Descartes, 1987; Mockus, 1988; Radford, 2004) y de sus signos (Descartes, 1987; Frege, 1985; Duval, 2002).

Dicha tensión pone en consideración la organización de la clase de álgebra sobre la falsa oposición entre signo y sentido. Para disponer de un marco comprensivo del sentido del registro algebraico, es necesario enfocar tres aspectos de la relación signo-sentido: ¿qué tipo de signo es un signo en el registro algebraico alfanumérico?, ¿cuáles son los distintos sentidos del signo en este registro en relación con la diversidad de formas de nominación? y, ¿cuál es la relación de los sentidos de los signos con la expansión discursiva en el registro algebraico? (Duval, 2002). El sentido de los signos del registro algebraico alfanumérico puede ser dilucidado en la historia del registro; sin embargo, el sentido del propio registro, visto ahora como signo (De Saussure, 2005), sólo es posible en relación con el reconocimiento de otros registros algebraicos (arábigo, chino, etc.), de sus sentidos y el sentido de los signos propios de dichos registros.

Si bien se espera que en situaciones de transformación entre representaciones semióticas el sentido de los objetos matemáticos no cambie, las evidencias antes presentadas muestran que, en el caso de estas EPP, para poder operar, no sólo cambian las expresiones sino que cambian de objeto. Lo que desde el registro algebraico alfanumérico es considerado como una "simple" transformación tipo tratamiento, estas EPP lo asumen como una transformación de conversión, y como cambio de objeto. Por otra parte, al relacionar este hecho con el cambio de sentido de los objetos matemáticos en situaciones de tratamiento entre representaciones semióticas, reportado por D'Amore (2006b) en diversos niveles de escolaridad, expanden la problemática cognitiva ligada a la transformación de tratamiento de representaciones.

Así que construir un sentido complejo para el registro algebraico, implica el reconocimiento de la existencia de otras álgebras, de sus propósitos, de sus signos, de sus técnicas, etc., construidas por diversas culturas. El registro algebraico alfanumérico es uno entre otros. Como se ha señalado anteriormente, la cultura matemática actual da una preponderancia casi exclusiva al registro algebraico alfanumérico, lo que implica que sea plausible esperar que a través de esa práctica sea posible aprehender técnicamente el registro mismo, siendo al mismo tiempo casi imposible que se aprehenda un sentido del propio registro algebraico alfanumérico. En tanto no existe oposición con otros, no se relaciona con otros, no es signo.

Este marco complejo de comprensión del sentido del registro alfanumérico, necesario para nuevos procesos de enculturación matemática, requiere de una comunidad de práctica que proponga transformarse e instaurar nuevos sistemas de prácticas. Aunque se cuenta con elementos para dicho marco de comprensión –obtenidos por la comunidad de investigadores en educación matemática–, tales elementos todavía no han sido articulados, entre sí y menos aún a las prácticas de los profesores de álgebra (Duval 2002, 2008). La búsqueda de explicaciones sobre la situación hallada al tratamiento de los conflictos semióticos, debe incorporar, entre otras, indagaciones sobre relaciones entre la producción de la comunidad de investigadores en educación matemática y la práctica de los profesores de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por su apoyo financiero a la investigación "Conceptualizando la enseñanza a través de video-clips", desarrollado en colaboración entre los tres grupos: MESCUD de Bogotá-Colombia, Innovación y Formación Didáctica de Alicante-España y NRD de Bologna-Italia.

Agradecimientos especiales a las dos estudiantes de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas que colaboraron en este trabajo, quienes aquí fueron nombradas como Angélica y Elisa. A la profesora y compañera Omaira Tapiero quien con su lectura crítica nos ayudó a mejorar el escrito.

Grupo MESCUD
grupomescud@yahoo.es

NOTAS

NOTA 1: Este registro de representación semiótica es asumido en un contexto social que lo organiza, le dispone formas de acceso, le determina requerimientos de uso, etc., y se constituye en instrumento conceptual.

NOTA 2: En el contexto de formación de la Universidad Distrital (Bogotá), la práctica didáctica implica práctica matemática.

NOTA 3: En los retículos aquí presentados se ha omitido la referencia al objeto

Referencias

Charnay, R. (1993). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*, 51-63. En: Parra, C. y Saíz, I. (Comp.). Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós.

D'Amore, B. (2004) Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. En: *Uno*. *Didáctica de las matemáticas.* 35, 90-106.

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: *Relim*e, Número especial, 177-195 [Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático].

D'Amore, B., Godino, J. D. y Font, V. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En: *Paradigma*, (28) 2, 49-77.

De Saussure, F. (2005). *Curso de lingüística general*. Buenos Aires: Losada [Amado Alonso, Trad.]. Original publicado en francés en 1945.

Descartes, R. (1987). *Discurso del método*, Dióptrica, Meteoros y Geometría. Madrid: Alfaguara.

Duval (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En: *Antología en educación matemática*. México: CINVESTAV [Original en francés publicado en 1988].

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: Universidad del Valle [Myriam Vega, Trad.] original en francés publicado en 1995.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitif de la designation des objets. In: Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). *Actes des SFIDA* 13-16, Vol. XIII, 67-94, Nice: IREM de Nice.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: dévelopement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. In: *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55.

Duval, R. (2008) Le défi de l'enseignement des mathématiques: adopter deux points de vue incompatibles. Un cas exemplaire: l'introduction de l'algèbre au collège. Ponencia en el XXIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Font, V. & Planas, N. (2008). Mathematical Practices, Semiotic Conflicts and Socio-mathematical Norms. In: *PME 32 and PME-NA XXX*, Vol. 3, 17-23.

Frege, G. (1985). Sobre Sentido y Referencia. En: *Estudios sobre Semántica.* Buenos Aires: Orbis [Ulises Moulines, Trad.], 49-101. Original de 1892.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 7 de Julio de 2008 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Grace, P. (1975). Logic and Conversation. In: *Syntax and Semantics* Vol 3, *Speech Acts.* (Peter Cole and Jerry Morgan, Eds) New York: Academic Press.

Grupo Pretexto (1997). *La transición aritmética álgebra.* 1ª Ed., Bogotá: Universidad Distrital.

Küchemann, D. (1980). The meaning children give to the letters in generalized arithmetic. In: *Cognitive Development Research in Sci. and Math.* Leeds: University of Leeds, 28-33.

LEBEM, (1999). *Documento condiciones iniciales para acreditación previa. Proyecto Curricular de Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas*. No publicado. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. Madrid: Gedisa.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En: J. Ponte y L. Serrazina (Eds.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999.* pp. 109-132. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao.

Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria. En: *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 36, 93-113.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) Teachers and teacher's educators as learners. In: A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics *Education: Past, Present and Future*, Rotterdam. The Netherlands: Sense Publishers, 429–459.

Llinares, S. (2008). *Aprendizaje del estudiante para profesor y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación.* Conferencia invitada en el III Encuentro de programas de formación inicial de profesores de matemáticas, Abril, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Recuperado el 13 de octubre de 2008 de: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/5302/1/llinares-bogota08.pdf

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares-Área Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Mockus, A. (1988). *Representar y disponer*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwarizmi restaurado. En: Hitt, (eds.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, 109-131. Recuperado el 3 de Marzo de 2008 de: http://www.uv.es/~didmat/luis/mexico96revisado03.pdf

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking In: *Actas de la 16ª Conferencia Internacional del Grupo de Psicología de la Educación de Matemáticas*, *PME 26*, Anne D. Cockburn y Elena Nardi (eds.), Vol. 4, 81-88.

Radford, L. (2004). *The cultural-epistemological conditions of emergence of algebraic symbolism*. In: Furringhetti, Kaitjser and Tzanakis (Eds.), Proccedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4, Upssala, Sweden, 509-524 (Plenary Lecture).

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría de la objetivación. En: *Relim*e, número especial, 103-129 [Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático].

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C. (2006). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. In: *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, 17-21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain, 684-695

Radford, L. & Puig, L. (2007). *Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms.* In: Educational Studies in Mathematics (66) 145–164.

Rey, C.; Penalva, C. y Llinares, S. (2007). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. En: *Quadrante*, Vol. XV, 95-120.

Rojas, P. y Bonilla, M. (en prensa) Buscando conflictos semióticos en un contexto de álgebra a través del análisis de textos. *En:International Congress of Science Education. 10 Years of the Journal of Science Education. 15-18 July 2009. Cartagena, Colombia*

Wallis, J. (2007) *Tratado de Álgebra, histórico y práctico.* Material no publicado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá [Oriol Mora, Trad.] Original en Inglés publicado en 1685.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socio mathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Los Autores[2]:

Jaime H. Romero C.
Matemático. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación. Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Área de conocimiento Formación de profesores de matemáticas. Línea de Investigación Transición Aritmética al Álgebra.
jaimeedumat@udistrital.edu.co

Pedro Javier Rojas G.
Matemático. Magister en Matemáticas. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación. Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Área de conocimiento Formación de profesores de matemáticas. Línea de Investigación Transición Aritmética al Álgebra. pedroedumat@udistrital.edu.co,

Martha Bonilla E.
Licenciada en Matemáticas. Magister en Desarrollo Educativo y Social. Profesora Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Área de conocimiento Formación de profesores de matemáticas. Línea de Investigación Transición Aritmética al Álgebra.
marthabonillae@gmail.co

[2] Integrantes del Grupo Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Grupo MESCUD), Bogotá, Colombia