Vásárhelyi Éva – Hermann Astleitner – Hans-Jörg Herber – Karl Jose Parisot

Tanítható-e a problémamegoldás?

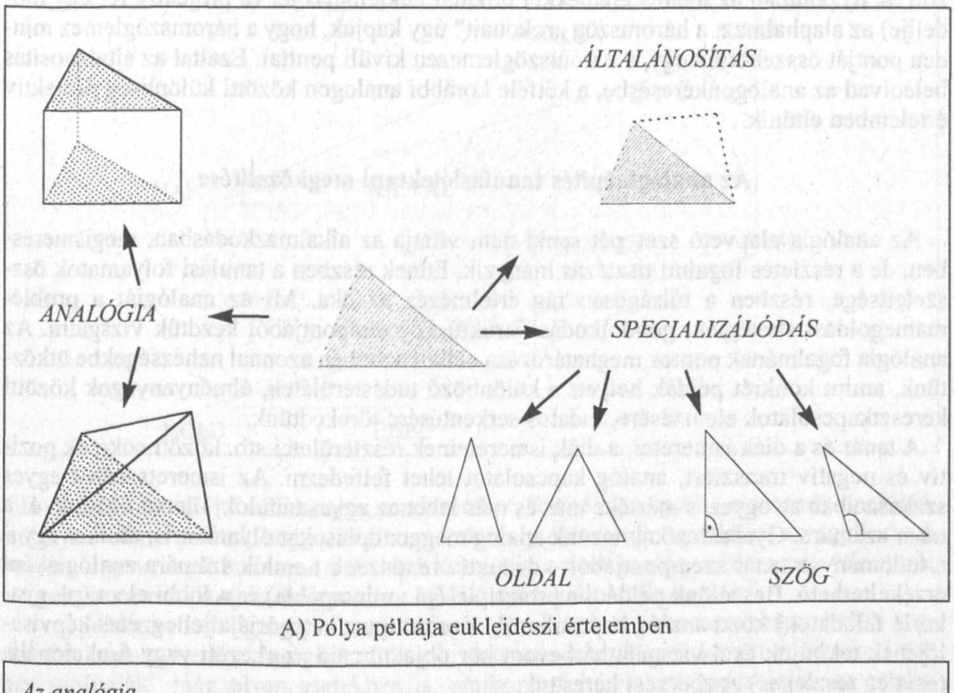
Az iskolában, az egyetemen, tanártovábbképzésen, baráti körben, a családon belül, szóval lépten-nyomon szembesülünk a következő kérdésekkel: Milyen a korszerű műveltség? Mennyi a matematikai ismeretek, a matematikai gondolkodásmód részesedése a teljes kultúrkincsben? Mit és hogyan használ a matematika tanulmányaiból az, aki esküszik rá, hogy semmit? Hol húzódnak a szakmám – matematika, fizika, ábrázoló geometria szakos tanár vagyok – határai? Mi az, amit csak a matematika, mi az, amit a matematika is (esetleg sajátosan) tud közvetíteni? Ismereteket, ismeretrendszereket, vagy az ismeretek elsajátításának, rendezésének fogásait kell-e tanítani? A szakma elkülönülő jellegzetességeinek szakavatott közvetítésére, vagy inkább az egységes világkép kialakítására kell-e a hangsúlyt helyezni? Mit és milyen szerkezetben tartalmazzon a tananyag? Tanítható-e a problémamegoldás? Mikor térül meg? Mikor van erre idő? Mi lesz a tantervvel? Mit hagyjak ki?

Tanár, diák, szülő, mindenki a „gazdaságos" tanulás fortélyait akarja megtalálni. Elődeink biztosan tudták a titkot, hiszen számos neves tudóst bocsátottak útjára. A (sikeres) magyar matematikatanítási hagyományok tartalmi és módszertani elemeit kutatva, az embernek az a benyomása támad, hogy a fentihez hasonló kérdések számukra nem választási kényszerrel, hanem súlypontválasztás, aránykijelölés formájában merültek fel. A mai tantervviták kizáró „vagy-vagy" kérdései helyett az „is" uralkodott, és talán ettől vált gazdagabbá, érdekesebbé és hatékonyabbá a matematika tanítása és tanulása. A régi Középiskolai Matematikai Lapok versenyfeladatait olvasgatva láthatjuk, hogy a matematikatanítás a konkrét ismeretek és készségek elsajátítása mellett a heurisztikus gondolkodási, problémamegoldási stratégiák használatát is megcélozta. A heurisztikus stratégiák között központi szerepet játszik a különböző tudásterületek közötti transzfer, az analógiák felismerése, az analógiás következtetés. Ezek a gondolatmenetek, gondolkodási struktúrák igen gyakran (és nem mindig tudatosan) alkották a problémaorientált oktatás, a munkatankönyvek, feladatgyűjtemények, feladatsorozatok, tanulóprogramok összeállításának bázisát.

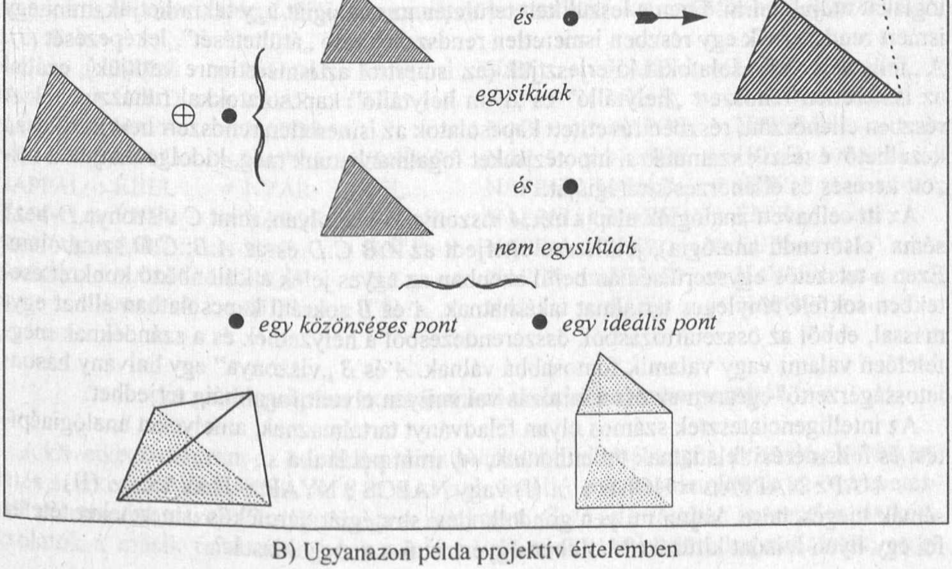
De vajon mit is értsünk analógián? 1991-ben az első osztrák–magyar matematika-didaktikai találkozón megalakult egy analógia munkacsoport. Osztrák, magyar és német tanárok, matematikusok, matematika-didaktikával foglalkozó kutatók és pszichológusok, oktatásszervezésben tevékenykedő szakemberek kilenc fős csapata határozta el, hogy példákat gyűjt a sikeresen és kevésbé sikeresen alkalmazható, analógián alapuló következtetésekre, s a szerzőként kijelölt négyes ezzel párhuzamosan keresni kezdi az analógiaépítés tanuláslélektanilag megalapozott magyarázatát.*(1)* Ebből az útkeresésből szeretnénk néhány mozzanatot felvillantani.

Az analógia fogalmának első megközelítése Pólya György nyomán

Pólya György két gondolkodási rendszert említ, amelyek a problémamegoldási folyamatban tudatosan alkalmazhatók a matematikai tartalom és matematikai gondolkodás közvetítésének eszközeként: az indukciót és az analógiát. *(2)* Ezek hatékonysága a matematikai modellalkotás és a matematika belső fejlődésével alátámasztható. Pólya György példái szépek, beleillenek a magyar matematikatanítás és tehetséggondozás hagyományaiba. A konkrét példákat olvasva mindenki úgy érzi, hogy érti, mit takar például az „analógia". A tanítási-tanulási folyamat tudatos tervezésekor azonban ennél szabatosabb fogalomalkotásra van szükség, különösen, ha a matematikán kívüli ismeretszerzésre, a jelenségek matematikai modellezésére is ki akarjuk terjeszteni ezt a gondolkodásmódot.



A) Pólya példája eukleidészi értelemben



B) Ugyanazon példa projektív értelemben

Az *A* és *B* példákban azt szeretnénk érzékeltetni, hogy két dolog „analógiás" kapcsolata a szituációtól, a tudáshátttértől, az összevetés jellegétől és az összehasonlítás szempontjától függ. Az *A*) részben az összehasonlítás alaphalmaza az eukleidészi tér, a háromszög analogonjai úgy keletkeznek, hogy hozzáveszünk egy, a háromszög síkján kívüli pontot, illetve annak síkjával nem párhuzamos irányban eltoljuk. A két analogon a tetraéder és a háromszög alapú hasáb. Az analóg társ ugyan nem egyértelmű, de legalább „világos", hogy mi a különbség az analogonkeresés, az általánosítás és a specializálás között. A *B*) pontban az ideális elemekkel bővített eukleidészi tér (a projektív tér egy modellje) az alaphalmaz; a háromszög „rokonait" úgy kapjuk, hogy a háromszöglemez minden pontját összekötjük egy, a háromszöglemezen kívüli ponttal. Ezáltal az általánosítás beleolvad az analogonkeresésbe, a kétféle korábbi analogon közötti különbség projektív értelemben eltűnik.

Az analógiaépítés tanuláslélektani megközelítése

Az analógia alapvető szerepét senki nem vitatja az alkalmazkodásban, megismerésben, de a részletes fogalmi tisztázás hiányzik. Ennek részben a tanulási folyamatok összetettsége, részben a túlságosan tág értelmezés az oka. Mi az analógiát a problémamegoldási stratégiák, gondolkodási struktúrák szempontjából kezdtük vizsgálni. Az analógia fogalmának pontos meghatározása nélkül azonban azonnal nehézségekbe ütköztünk, amint konkrét példák helyett a különböző tudásterületek, élményanyagok közötti keresztkapcsolatok elemzésére, tudatos serkentésére törekedtünk.

A tanár és a diák ismeretei, a diák ismereteinek részterületei stb. között sok-sok pozitív és negatív transzfert, analóg kapcsolatot lehet felfedezni. Az ismeretszerzés egyes szakaszaiban az egyezés mértéke más és más lehet az egyes tanulók, illetve a tanuló és a tanár számára. Gyakran alkalmazunk analóg meggondolásokat olyankor is, amikor egy – a tudomány, a tanár szempontjából – deduktív rendszer a tanulók számára analógiaként érzékeltethető. Beszélünk például a prototípus (pl.: mintapélda) és a többi elem (pl. gyakorló feladatok) közti analóg kapcsolatról. A prototípust kategóriája jellegzetes képviselőjének tekintjük és a vizsgálatba bevont kör objektumain szerkezeti vagy funkcionális (esetleg részleges) egybeesést keresünk.

A kutatás jelenlegi szakaszában az analógiák egy szűk körét, a rendszerek közötti analógiákat tudjuk leírni. Ezen a leszűkített területen az analógiát úgy tekinthetjük, mint egy ismert rendszernek egy részben ismeretlen rendszerre való „átültetését", leképezését *(3)*. A „felismert" kapcsolatokat kiterjesztjük (az ismertről az ismeretlenre vetítjük), ezáltal az ismeretlen rendszert „helytálló" és „nem helytálló" kapcsolatokkal ruházzuk fel. A részben ellenőrzött, részben rávetített kapcsolatok az ismeretlen rendszert heurisztikusan kezelhetővé teszik számunkra, hipotéziseket fogalmazhatunk meg, kidolgozhatjuk a célzott keresés és ellenőrzés stratégiáját.

Az itt célbavett analógiák alapja az „*A* viszonya *B*-hez olyan, mint *C* viszonya *D*-hez" séma (elsőrendű analógia), jelölésére elterjedt az *A*:*B* *C*:*D* és az *A*:*B*::*C*:*D* szimbólum. Ezen a tetszetős egyszerű sémán belül azonban az egyes jelek a különböző konkrét esetekben sokféle tényleges tartalmat takarhatnak. *A* és *B* sokrétű kapcsolatban állhat egymással, ebből az összetartozásból, összerendezésből a helyzetnek és a szándéknak megfelelően valami vagy valamik fontosabbá válnak. *A* és *B* „viszonya" egy halvány hasonlatosságérzettől egészen az összetartozás valamilyen elvont fogalmáig terjedhet.

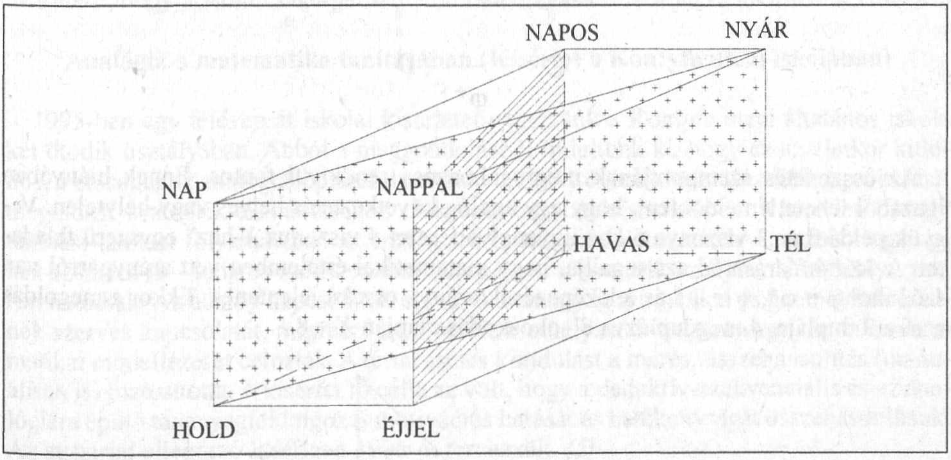
Az intelligenciatesztek számos olyan feladványt tartalmaznak, amelyeket analógiaépítési és felismerési feladatnak tekinthetünk, *(4)* mint például a

NAP : NAPPAL = HOLD : ... (I) vagy NAPOS : NYÁR = HAVAS: ... (II)

sémák kiegészítése. Vajon milyen gondolkodási stratégiát, járulékos ismereteket tételez fel egy ilyen feladat kitűzése? Valóban egyértelmű-e a megoldásuk?

Ha az A:B = C:D kapcsolatot matematikai arányosságként fogjuk fel – amint azt az analógia szó jelentése sugallja –, akkor a NAP : NAPPAL = HOLD : ... az aránypár átrendezésével nyert NAP : HOLD = NAPPAL : ... feladványnak ugyanazt a megoldást kell szolgáltatnia. Ez azonban a hagyományosan analógiának tekintett kapcsolatnak csak egy szűk körére teljesül.

Az (I) és (II) rendszereket egymással analógnak tekinthetjük, azaz az összevetés tagjai maguk is lehetnek analóg rendszerek. Az ilyeneket másodrendű analógiának nevezzük.



Ha feloldjuk az (I) és (II) analóg rendszereket, formálisan újabb „elsőrendű analógiákat" nyerhetünk azáltal, hogy a téglatest valamely élét (vagy lapátlóját) az egyik rendszernek, egy vele párhuzamos élet (lapátlót) pedig a vele analóg rendszernek tekintünk. Azt persze nem tudhatjuk, hogy az így előálló analógiák értelmesek-e.

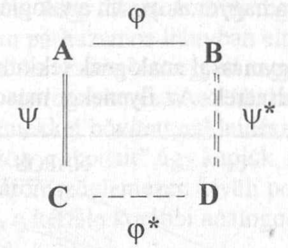
A mi példánkon elvégzett próba mutatja, hogy a kiindulási rendszereinken belüli kapcsolatok nem egyenlő erősségűek. A kombinatorikus lehetőségek között adódnak „értelmes analógiák" még olyan esetekben is, amikor a feltételezett kapcsolatok az eredeti rendszerben nem is szerepeltek (lapátlókat vetünk össze). Ugyanakkor találunk olyan eseteket is, amikor az eredeti élek semmilyen használható kapcsolatot nem képviselnek.

NAP : HOLD = NAPPAL : ÉJJEL	NAP : NAPPAL = HOLD :...
NAP : HOLD = NYÁR : TÉL	NAP : NYÁR = HOLD :...
NAP : NAPPAL = NAPOS :...	NAP : NAPOS = NAPPAL :...
NAP : HOLD = NAPOS : *HAVAS?*	NAP : NAPOS = HOLD : ...
NAPPAL : ÉJJEL = NYÁR : TÉL	NAPPAL : NYÁR = ÉJJEL :...
NAPPAL : ÉJJEL = NAPOS : *HAVAS?*	NAPPAL : NAPOS = ÉJJEL :...
NAPPAL : ÉJJEL = NAP : HOLD	NAPPAL : NAP = ÉJJEL :...
NAPOS : HAVAS = NYÁR : TÉL	NAPOS NYÁR = HAVAS ...
NAP : NAPOS = ÉJJEL : *TÉL?*	NAP : ÉJJEL = NAPOS :...

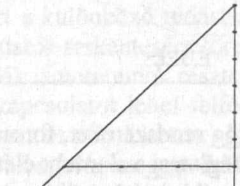
...

Az analógiaépítés matematikai-didaktikai szempontból

A következő diagram az összehasonlítás pontosabb leírását segíti, az analóg következtetés szerkezetét szemlélteti. A, B és a köztük fenálló φ kapcsolatok(nak az összevetésnél számbavett része) alkotják az egyik rendszert; C, D és a részben ismeretlen φ^* kapcsolatok a másik rendszert. A két rendszer alkotóelemei közötti kapcsolatokat, vagy azoknak az összehasonlítás szempontjából lényeges részét ψ, illetve $\psi*$ jelzik. Az analóg következtetés a $\varphi=\varphi*$ egyenlőség feltételezése.

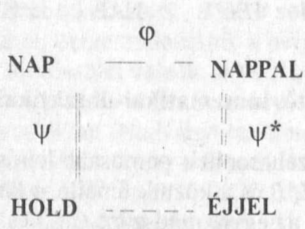


Az összevetés szempontjának megfogalmazása rendkívül fontos. Ennek hiányában igazából lehetetlen eldönteni, hogy egy analóg következtetés helyes vagy helytelen. Vegyük például a „3 viszonya 6-hoz ugyanolyan, mint 4 viszonya X-hez” egyszerű feladatot. A $3:6=4:X$ írásmód azt sugallja, hogy matematikai értelemben vett aránypárról van szó, ahol $\varphi = \varphi*$, $\psi = \psi*$ és a leképezések arányt, osztást jelentenek. Ekkor a megoldás a „6 a 3 duplája, 4 megduplázva 8” okoskodás alapján $X = 8$.



A kérdés vonatkozhat az ábrán látható $3a$, $6b$ befogójú derékszögű háromszög nagyított képére, vagy annak a háromhatod értékű törtnek a nevezőjére, amelynek a számlálója 4. A gondolatmenetet gyakran alkalmazzuk, de többnyire nem ilyen pontosan. A „3 viszonya 6-hoz ugyanolyan, mint 4 viszonya X-hez” szóbeli megjegyzés, vagy a 3:6::4:x alak kevésbé köti meg a 3:6 kapcsolatot. Teljesen jogos például a kapcsolat „6 hárommal több, mint 3” olvasata, amiből megoldásként „4 megnövelve 3-mal az 7” adódik. A tanítási gyakorlatban könnyű ilyen „félreértéseket” előidézni, hiszen egy ilyen egyszerű következtetést általában csak egy ujjmozdulattal jelzünk az ábrán.

Az „A ugyanolyan viszonyban van B-vel, mint C a D-vel” analóg következtetés az egyértelműnek tekintett „NAP : NAPPAL mint HOLD : ...” tesztkérdésben sem nyilvánvaló. Még azok a kísérleti személyek is eltérően indokolnak, akik a feladat kitűzőjének szándéka szerinti (ÉJJEL) választ adják. Gyakori jelenség, hogy a párokat automatikusan átrendezhetőnek tekintik és az indoklás az átrendezett alakra vonatkozik.



Néhány indoklást idézünk:
– NAP és HOLD égitestek (ψ), NAPPAL és ÉJJEL napszakok (ψ*). A Nap csak nappal látható tapasztalat alapján megelőlegezzük azt a megállapítást, hogy a Hold csak éjjel látható. Egyidejűség (φ = φ*).
– NAP/HOLD és NAPPAL/ÉJJEL ellentétpárok.
– NAP és HOLD fényforrások NAPPAL, illetve ÉJJEL.
Az analóg következtetés eredményének értékelése ugyancsak szituációfüggő. (Vitatni akarjuk-e, hogy a Hold csak éjjel látható? Fényforrásnak akarjuk-e tekinteni a Holdat?)

Analógia a matematika tanításában (Kísérlet a Kontyfa utcai iskolában)

1995-ben egy féléven át iskolai kísérletet végeztünk a Kontyfa utcai általános iskola két ötödik osztályában. Abból a meggondolásból indultunk ki, hogy ez az életkor különösen elősegíti az analógiaképzés folyamatát, a 10–11 évesek örömüket lelik a problémamegoldási stratégiák elsajátításához szükséges tapasztalatszerzésben. A kísérleti osztály tanulási-tanítási folyamatában az analógiára épülő gondolatmenetek – részben a gyerekek számára is – tudatos módszerként szerepeltek, a kontrollosztályban a tankönyv szerint haladtak. Az analóg kapcsolatok egyrészt a tananyag aritmetikai és geometriai részének szerves kapcsolatát, másrészt a különféle élethelyzetek azonos vagy hasonló matematikai modellezését célozták. A természetes kiindulást a mérés, összehasonlítás (manuálisan is) biztosította. A kísérlet fő célja az volt, hogy a deduktív-szekvenciális és az analógiára épülő tananyagfeldolgozás motivációs hatását és hatékonyságát összehasonlítsuk. Az ausztriai ellenőrző kísérletet 1996-ra tervezzük. *(5)*

A kísérlet „átlagos" tanulók bevonásával folyt, a módszertani feldolgozás kivételével mindent igyekeztünk egyformán szervezni a két osztályban: a kísérletet megelőző évben a két osztály matematikatanára közös volt, az osztályok létszáma egyenlő, nemek szerinti és szociális összetétele hasonló, a tananyag tartalmilag az érvényes tantervnek megfelelő, a tanulókat a kísérlet során ugyanaz a személy tanította, mindkét osztály tanulói feladatlapokon dolgoztak. Dokumentációként az írásos feljegyzéseken kívül videofelvételek is készültek. A feladatlapok az egyéni foglalkoztatást, differenciálást *(6)* szolgálták. A gyerekek által kitöltött feladatlapok azonban a dokumentáció lényeges részévé is váltak, a kísérlet lezárta után is lehetővé teszik az órai történések rekonstruálását. A videofelvételek a kísérlet közben is fontos ellenőrzési lehetőséget nyújtottak a tanár didaktikai módszerének elemzésére, annak eldöntésére, hogy mennyiben tanította másként a kísérleti osztályt, mint a kontrollosztályt. Mindezek hozzájárultak a teljesítmény, valamint motivációs és intelligenciatesztek mutatta különbségek magyarázatához. Az eredmények azt jelzik, hogy a kísérleti osztály tanulói az analóg következtetések helyes kezelésének gyakorlására fordított idő kiesése ellenére legalább olyan jó eredményeket értek el a normál tananyag elsajátításában, mint a kontrollosztály tanulói.

A következőkben bemutatunk egyet abból a nyolc feladatlapból, amelyekkel a kísérleti osztályban a tanulók az analógia felismerését, magyarázatát és képzését gyakorolták. A feladatlapok a jobb olvashatóság miatt – és hogy elegendő hely legyen a gyerekek viszonylag nagybetűs válaszainak, szöveges vagy rajzos magyarázatainak – A/4 formátumúak voltak. Megjegyzéseink a feladatlap (csak e dolgozat számára) számozott soraira vonatkoznak. A feladatlapok szerkezete, külső megjelenése mindig egyforma volt, ezzel is segíteni akartuk a környezet és a felületi ismérvek stabilizálását. A **2** (a főcím), **4** (pletyka), **8** (kakukktojás-keresés), **15** (szabálykeresés), **22** (gondolkodtató feladat) sorok változatlanul, az **1** (könyvecske), **3** (a feladatlap témája) sorok aktuális tartalommal, de lényegében változatlanul jelentek meg. Egy-egy ilyen feladatlap kiosztása, kitöltése, beszedése 15–20 percbe telt, a gyerekek hetente kaptak egy-egy ilyen jellegű feladatlapot. Tudták, hogy nem osztályzattal, hanem csak pontszámmal értékeljük azokat. A javításkor, megbeszéléskor a tanulóknak nemcsak a saját, hanem társuk megoldását is meg kellett „védeniük".

1 

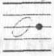
2 ## OLVASTAD-E? TUDOD-E? TALÁLD KI!

3 *PONTOZOTT HANGJEGY*

4 **PLETYKA:**

5 Ha egy hangjegy tartamát a felével meg akarjuk növelni, akkor egy pontot teszünk utána.

6 Mennyit ér egy pontozott nyolcad? ....

7 Ez a hang  felekben ...., negyedekben ...., nyolcadokban ...., tizenhatodokban .... értékű.

8 **KAKUKKTOJÁS-KERESÉS:**

9 ①

a) tapintás b) ízlelés c) hallás d) mosolygás e) látás

10 ...) kakukktojás, mert ...., a többi pedig ....

11 ②

a) $6 + 3$ b) $\frac{4}{6} + \frac{3}{6}$ c) $\frac{4}{6} + \frac{2}{6}$ d) $\frac{6}{8} + \frac{3}{8}$ e) $206 + 103$

12 ...) kakukktojás, mert ...., a többi pedig ....

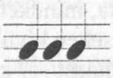
13 ③

a) $\frac{6}{18} + \frac{6}{18} + \frac{6}{18}$ b) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18} + \frac{5}{18}$ c) $\frac{2}{18} + \frac{10}{18} + \frac{6}{18}$ e) $\frac{4}{18} + \frac{7}{18} + \frac{7}{18}$

14 ...) kakukktojás, mert ...., a többi pedig ....

15 **KAPTAFA:**

16 ①

A  úgy viszonyul  -hez, mint  viszonyul ....-hoz

17 Mert ....

18 ②

24 diónak a háromnyolcad része éppen annyi, mint 18 diónak a ...... része,

19 azaz ...... dió.

20 ③

Ha egy 12 szeletes tortából 3 szeletet kapsz, akkor éppen annyit ehetsz, mintha egy 24 szeletes tortából ...... szeletet kapnál,

21 azaz a torta ...... részét.

22 **TÖRD A FEJED!**

23 Marika egy zacskó cukrot kapott ajándékba.

24 Egy szem cukrot megevett, és a maradék felét a testvérének adta.

25 Ismét megevett egy szem cukrot és a maradék felét a barátnőjének ajándékozta.

26 Így 5 szem cukorkája maradt.

27 Hány szem cukor volt eredetileg a zacskóban?

28 ....

....

....

....

....

1 A könyvecske az írásos információ szimbólumaként jelent meg, arra utalva, hogy a matematikai tartalom mellett az olvasást, az írásos információ megértését és az új ismeret alkalmazását is tanulnunk kell. A gyerekek mindig örömmel fogadták a feladatokat. Az egyik lapon a feladatlap sorszáma szerepelt, a másik lapon a gyerek sorszáma. Egy hét után mindenki tudta az osztálytársai sorszámát, és nagy lelkesedéssel segítettek a feladatlapok kiosztásában.

3 A nyolc feladatlapon különféle élethelyzetek (sport, a matematika története) és más tantárgyak (irodalom, nyelvtan, történelem, zene) a matematika tananyag soron levő részével (számok írásmódja, törtszámok, mérés, összehasonlítás, sorbarakás, rendezés) ötvözve jelentek meg. Egy lapra csak egy matematikán kívüli téma és egy nem tisztán matematikai feladat került. Az analógia gyakorlásán kívül az óra anyagának (másfél, törtek bővítése a jelen feladatlapon) motiválása, előkészítése is cél volt.

5 Az „információ" a zenét tanulók számára nem új; most ők az óra szakértői.

6 Visszajelzés, hogy a tanulók megértették-e az információt.

7 A (frissen szerzett) zenei ismeretek alkalmazása.

9, 11, 13 Ezeknél a játékos feladatoknál matematikán kívüli és matematikai fogalmakban közös, eltérő, azonosító és kizáró tulajdonságokat kell keresni, valamint a saját kijelentésük igazságtartalmát ellenőrizni. **11**-ben felet, illetve a felét adjuk az előtte álló számhoz.

10, 12, 14, 17, 28 Azt szolgálja, hogy a tanulók ne csak találgassanak, hanem érvelni, indokolni is próbáljanak.

16, 18, 20 a tulajdonképpeni analógiaépítési feladatok. **18** az oszthatóság ismétlését célozza, **20** az óra anyagának előkészítő feladata, a törtek bővítése.

19, 21 A választ úgy kell leírni, hogy beférjen az üres helyre.

22 A gondolkodtató feladat megoldása nagyon egyszerű, ha az ember a szöveges információt visszafelé olvassa. Az egyik gyerek az alábbi megoldást írta le:

{[(5)	+	(5)	1]	+	[11] }	+	1	→ 23
maradt		barátnő	Marika		testvér		Marika	összesen

és kiegészítette egy kis statisztikával: Marika: 7, testvér: 11, barátnő: 5. Mindebből jól rekonstruálható a visszafelé következtetés „stratégiája".

Jegyzet

(1) — *Astleitner, H. – Herber, H.-J.: Analogien im Mathematikunterricht.* Salzburg, 1995.

— *Herber, H.-J. – Astleitner, H. – Vásárhelyi É. – Parisot, K. J.: Situation specificity in didactics: The use of analogies and different task difficulities in teaching mathematics.* Paper read at EARLI, Nijmegen, 1995.

— *Herber, H.-J. – Vásárhelyi, É.: Analogiebildung (ein analogiesierender Integrationsversuch im Überblick).* Manuskript zur Tagung der österreichisch-ungarischen Mathematikdidaktiker in Nyíregyháza, 1993.

— *Hollai, M. – Vásárhelyi, É.: Die Rolle der Analogie im Mathematikunterricht.* Calibra, Budapest, 1992.

— *Vásárhelyi, É.: In der Ebene oder im Raum?* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 22., Klagenfurt, 1994.

— *Gentner, D.: The mechanism of analogical learning.* In: *Vosniadon, S. – Ortony, A.* (Eds.): *Similarity and analogical reasoning.* University Press, Cambridge, 1989.

(2) *Polya, Gy.: Induktion und Analogie in der Mathematik.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1962.

(3) *Herber, H.-J. – Vásárhelyi, É.: Analogiabildung...,* i. m.

(4) *Steruberg, R.J.: Higher-order reasoning in Postformal Operational Thought.* In: *Commons, M. L. – Richards, F. A. – Armon, C.* (Eds.): *Beynond formal operations.* Praeger, New York–Westport–London, 1984.

(5) *Astleitner, H. – Herber, H.-J.: Analogien im Mathematikunterricht,* i. m.

(6) *Herber, H.-J.: Innere Differenzierung im Unterricht.* Kohlhammer, Stuttgart, 1983.