Egy kreatív matematikaóra

A matematikai kreativitás kialakításához nem feltétlenül szükséges a legmodernebb technikai apparátus. Néha megteszi a fekete tábla és a fehér kréta. Az alkotásra tanítani is lehet, amire most egy konkrét matematikaóra felépítését mutatom be, amit már tíz éve alkalmazok sikeresen.

A számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség a matematika egyik legfontosabb egyenlőtlensége. Sok matematikus igazolta saját módszerével, így például *Cauchy, Liuville, Norris, Cooper* is. Most a szakirodalomban ismert bizonyításoktól eltérő, saját bizonyítást mutatunk be. Kiindulunk az $(x_2-x_1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből, ami átrendezés után felírható mint $x_2^2 \geq x_1(2x_2 - x_1)$ A továbbiakban feltételezzük, hogy $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Ezen feltételek mellett az $(x_3-x_2)^2(x_3+2x_2) \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül, ami átrendezés után felírható a következő alakba: $x_2^2(3x_3 - 2x_2) \leq x_3^3$.

Mivel

$$x_3^3 \geq x_2^2(3x_3-2x_2) \qquad \text{és)} \qquad x_2^2 \geq x_1(2x_2-x_1)$$

ezért

$$x_3^3 \geq x_2^2(3x_3-2x_2) \geq x_1(2x_2-x_1)(3x_3-2x_2).$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = x_3$.

A matematikai indukció elvét alkalmazva, a fenti két egyenlőtlenségből kiindulva feltételezzük, hogy az $x_1,\ldots,x_{n-1} \geq 0$ jelölés alkalmazásával az

$$x_{n-1}^{n-1} \geq x_1(2x_2-x_1)\ldots((n-1)x_{n-1} - (n\text{Ì}2)x_{n-2})$$

egyenlőtlenség teljesül, valamint egyenlőség akkor és csakis akkor érvényesül, ha $x_1 = \ldots = x_{n-1}$.

Most igazoljuk, hogy egyenlőtlenségünk öröklődik, azaz teljesül n-re is, azaz $x_n^n \geq x_1(2x_2-x_1)\ldots(nx_n-(n-1)x_{n-1})$, valamint egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_1 = \ldots = x_n$. Ennek bizonyítása a következő:

$$x_1(2x_2-x_1)\ldots((n-1)x_{n-1}-(n-2)x_{n-2})(nx_n-(n-1)x_{n-1}) \leq x_{n-1}^{n-1}\,(nx_n-(n-1)_{xn-1}$$

azaz azt kell igazolni, hogy

$$x_{n-1}^{n-1}(nx_n-(n-1)x_{n-1}) \leq x_n^n.$$

Átrendezés után

$$nx_{n-1}^{n-1}\,(x_n - x_{n-1}) \leq x_n^n - x_{n-1}^n$$

innen pedig

$$(x_n - x_{n-1})\,(\,x_n^{n-1} + x_n^{n-2}\,x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1} - n\,x_{n-1}^{n-1} \geq 0$$

azaz

$$(\,x_n - x_{n-1}\,)\,((x_n^{n-1} - x_{n-1}^{n-1}\,) + (x_n^{n-2}\,x_{n-1} - x_{n-1}^{n-1}\,) + \ldots + (x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-1}\,)) \geq 0$$

Tényezőkra bontva a zárójeleket

$$(\,x_n - x_{n-1}\,)^2\,((x_n^{n-2} + x_n^{n-3}\,x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}\,) + (x_n^{n-3} + x_n^{n-4}\,x_{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-1}^{n-3}\,)\,(\,x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-2}\,) \geq 0$$

állításunkat igazoltuk. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_{n-1} = x_n$. Ezzel igazoltuk a következő tételt: Ha $x_k \geq 0$, $(k = 1,2,\ldots,n)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség: $x_n^n \geq x_1(2x_2-x_1)\ldots(nx_n-(n-1)x_{n-1})$. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. E szép eredmény legfontosabb alkalmazása a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségeknek igazolása.

Tétel:
Ha $a_k \geq 0$, $(k = 1, 2,...,n)$ akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Bizonyítás: Legyenek $a_k = kx_k-(k-1)x_{k-1}$, $a_1=x_1 (k = 1, 2,...,n)$ A számítások elvégzése után $x_k=\frac{1}{k}(a_1+a_2+...+a_k)(k = 1,2,...,n)$. Ezt behelyettesítve az előző tételben a kívánt eredményt kapjuk. Egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül az első tételben, ha $x_1 = x_2 =...=x_n$ azaz $a_1 = \frac{1}{2}(a_1+a_2)=...=\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$. Megoldva ezt az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $a_1= a_2=...=a_n$.
A fenti egyenlőtlenségek történelmi hátterének tanulmányozására, valamint alkalmazásukra és újak szerkesztésére a megadott irodalmat különösen ajánlom.

IRODALOM

Pólya G.– G.H. Hardy – J.E. Littlewood: Inequalities, Cambridge, 1952.
Mitrinovič D.S.: Analitičke nejednakosti, Beograd, 1970.

BENCZE MIHÁLY

Szakdolgozatok 1993

Az ELTE TTK levelező technikaszakos végzett hallgatók záródolgozatai II.

Kádas László: Papírkészítés – papírgyártás

(Egy gyártástechnológia fejlődése)

A szerző a papíripari szakképesítését továbbfejlesztve készítette el a szakdolgozatát. A személyéhez közel álló téma feldolgozása során felhasználta az ipari tapasztalatait. Jól választotta meg rendezőelveit, a rész és egész viszonyát. Technikatörténeti szempontból is érdekes technológiai lépésekre is felhívja a figyelmet, jelezve, hogy a kínai papírgyártás ősi lépései számos esetben nagyon sok hasonlóságot mutatnak a mai modern technológiákkal. A kínaiak is 72 mveleti lépésre bontották papírgyártást. A technológiák összehasonlíthatósági szempontjainak figyelembevételével a szerzőnek 15 művelettípusra sikerült bontani.

A dolgozat megemlíti a környezetbarát technológiák és az újrafelhasználás lehetőségeit. Nem kell már erdőket pusztítani, a fehérítést hidrogénperoxiddal is meg lehet oldani. A művelettervekben egyre gyakoribbak lesznek a leágazások, az anyag visszaforgatások. A technológiához használatos vegyszerek regenerálással visszaforgathatók, a környezetkárosítás eltűrhető szinre csökkenthető (rostszűrés, a hulladék besűrítve és semlegesítve pl. útépítési töltelék anyagként elhelyezhető).

Szántainé Zelencsuk Ilona: A biotechnológia fejlődése

A technológia legújabb ágának fejlődését dolgozta fel a szerző. A történeti áttekintésnél a súlypontot a géntechnológia fejlődésére helyezi.

A 3. fejezet a géntechnológiai alapfogalmakat foglalja. Jól gyűjtötte össze a szakirodalomban található legjobb minőségű magyarázó ábrákat is. A negyedik részben a gén-