*ról is, melyek népszerűek és hasznosan töltik be helyüket a hazai és a külföldi szakembereknek szánt matematikai folyóiratok között.*

*A Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozat létjogosultságát az eddig megjelent több mint 40 kötet fényesen igazolta. A Matematika Tanítása című folyóirat sajnos már az idén anyagi okokból nem jelenhetett meg. Szeretnénk, ha a szüneteltetés csak időleges lenne.*

*A társulat nemzetközi kapcsolatai az utóbbi években jelentősen kiszélesedtek. Nagyon sok tagtársunk kap meghívást, hogy tartson előadást a Nemzetközi Matematikai Unió világkongresszusain. Az Európai Matematikai Tanács munkájában a megalakulása óta részt veszünk. A különböző országokkal élő cserekapcsolatok szinte felsorolhatatlanok.*

*Egy visszaemlékezés sosem lehet teljes, sok mindenről csak vázlatosan szólhat az ember, különösen, amikor a bőség zavarával küzd és a terjedelem korlátozza, de egy dolgot mindenképpen meg kell említeni most, amikor felzárkózásról hallhatunk nyilatkozatokat: az Európai Közösség országainak matematika tanterveit tartalmazó könyvben (7) pozitív példaként Japán és Magyarország jelenleg érvényes tantervét is ismerteti. Ebben nem kis szerepe van a 100 éves Matematika és Physikai - Bolyai János Matematikai Társulat munkájának.*

## Irodalom


(1) Mathetmaikai és Physikai Lapok, 1892. I. kötet

(2) **Rados** Gusztáv: Bevezető, **Kőnig** Dénes: Az Eötvös Loránd Mathematikai és Fizikai Társulat első ötven éve. Matematikai és Fizikai Lapok XLVIII. kötet, 1941.

(3) **Szénássy** Barna: Társulatunk 75 éve. Matematikai Lapok XVII. évf. 1966. 3–4. szám

(4) A társulat második rendes évi közgyűlése. Matematikai Lapok I. évf. 1951. 3–4. szám

(5) **Füstöss** László: ORTVAY RUDOLF. A múlt magyar tudósai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

(6) Közgyűlés. Matematikai Lapok 33. évf. 1982–1986. 1–3. szám

(7) G. **Howson**, National Curricula in Mathematics, 238 oldal, Leicester, England, 1991.


*VARGA ANTAL*

# Érdekes kombinatorikai problémák*

## Bevezető feladat

*1. FELADAT. Hány pontot kell kijelölnünk egy konvex $n$–szög belsejében úgy, hogy a sokszög csúcsai által alkotott háromszögek mindegyikének belsejében legyen kijelölt pont?*

*Néhágy kezdeti megjegyzés:*

*A válasz olyan szám lesz, amely a sokszögtől függ. Mint majd látjuk, ez a szám csak a sokszög oldalszámától függ.*

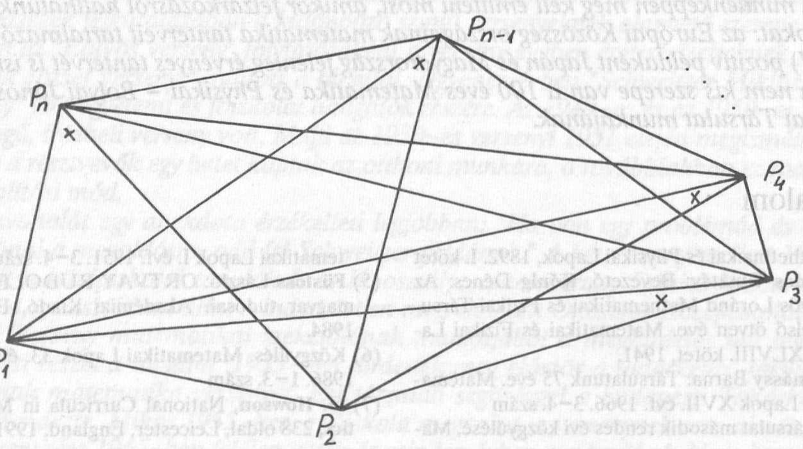
*A válasz bizonyítása két feladatot rejt magában. Tegyük fel, hogy az optimális szám* p. *Ekkor egyrészt be kell látnunk, hogy* p *ponttal megoldható a probléma. Ez azt mutatja, hogy az optimális szám legfeljebb* p. *Másrészt be kell látnunk, hogy* p–1 *ponttal nem oldható meg a feladat.*

* Az 1991. októberében Nagykanizsán tartott előadás írott szövege.

*Először közöljük a választ: tetszőleges* n−*szög esetén* n−2 *ponttal megoldható a háromszögek lefogása, kevesebbel pedig nem.*

*A megoldást kezdjük a második résszel, azaz annak igazolásával, hogy* n−3 *pont nem elég. Ehhez csak megjegyezzük, hogy ha a sokszög csúcsai a körüljárás szerinti sorrendben* $P_1, P_2, \dots, P_n$, *akkor a* $P_1P_2P_3, P_1P_3P_4, \dots, P_1P_{n-2}P_{n-1}, P_1P_{n-1}P_n$ n−2 *darab olyan háromszög, amelynek belseje diszjunkt. Már ezek kezeléséhez is legalább* n−2 *pont szükséges.*

*A hiányzó részben be kell látnunk, hogy* n−2 *pont viszont meg is adható. Ehhez vegyük a* $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, \dots, P_1P_2P_{n-1}, P_1P_2P_n$ n−2 *darab háromszöget. Mindegyik belsejében vegyünk fel egy–egy pontot "közel" a* $P_1$ *és* $P_2$*–től különböző harmadik csúcshoz. A közelséget úgy értjük, hogy minden átló esetén a kijelölt pont az átló ugyanazon oldalára essen, mint a vizsgált háromszög csúcsa.*




*Annak ellenőrzését, hogy ez a ponthalmaz megfelelő, az olvasóra bízzuk.*

## A feladat kombinatorikai háttere

*A fenti feladat – az* n−*szög, csúcsok, háromszögek, belső pontok szóhasználatot tekintve – egy geometriai problémának néz ki. Ha azonban elkezdünk gondolkodni a feladaton, akkor felismerhetjük kombinatorikus jellegét. Pontokat keresünk, de a pontok pontos helye nem számít. A sokszög átlói tartományokra osztják a síkot. Egy tartomány két pontja bizonyos szempontból ugyanaz. Ez a két pont ugyanazokat a háromszögeket "fogja le". Tehát ha meg akarunk adni egy "lefogó ponthalmazt", akkor elég tartományokat felsorolni. Ha az optimális ponthalmazt keressük, akkor egy tartományból két pontot nem választunk ki, tehát a megoldás azonosítható a tartományok egy részhalmazával.*

*Ezek után a feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk át: Adott egy konvex* n−*szög. Az átlói tartományokra osztják a sokszög belsejét. Vegyük a tartományok* U *hal-*

*mazát. Minden, a csúcsok által meghatározott háromszög felfogható úgy, mint tartományok egy halmaza (U egy részhalmaza). Tehát kaptunk $\binom{n}{3}$ U–beli részhalmazt. Célunk az U egy olyan L részhalmazának kiválasztása, ahogy az adott $\binom{n}{3}$ részhalmaz mindegyikének legyen L–beli eleme és ezen feltételek mellett minimális elemszámú legyen.*

*Ezek után természetes a következő kombinatorikus fogalom:*

*Legyen H egy S halmaz feletti halmazrendszer. Egy $A \subset S$ halmazt lefogó ponthalmaznak nevezünk, ha minden H–beli halmaznak van A–beli pontja is. Természetes kérdés, hogy egy adottt halmazrendszer esetén mi a lefogó halmazok minimális elemszáma? Ezt a problémát lefogási problémának nevezzük. Az optimális értéket r(H)–val jelöljük.*

*Mint az előző feladat esetében már megtettük, most is megjegyezzük, hogy az $r(H)=k$ egyenlőség két állítást rejt magában. Az egyik $r(H) \leq k$. (Ennek belátására a legegyszerűbb módszer (ha nem is az egyetlen lehetőség) az, hogy megadunk k pontot, amelyek lefogják halmazrendszerünket.) A másik állítás, hogy $r(H) \geq k$. Erre a részre mint alsó becslésre fogunk hivatkozni.*

*A feladat megoldása egy alsó becslési technikát is javasol: Keressünk diszjunkt halmazokat a halmazrendszerünkben és ha találunk l darabot, akkor tudjuk, hogy $r(H) \geq l$. A legjobb alsó becslést kapjuk, hogy ha megoldjuk a következő optimalizálási problémát:*

*Legyen H egy S halmaz feletti halmazrendszer. Halmazaink egy $F \subset H$ részhalmazát független halmazoknak nevezzük, ha F halmazai diszjunktak. A természetes probléma: Egy adott halmazrendszer esetén határozzuk meg a maximális elemszámú független rendszer elemszámát. Ezt az optimumot v(H)–val jelöljük.*

*A fenti bizonyítás után nyilvánvaló, hogy*

$$v(H) \leq r(H)$$

## Egy újabb feladat

*2. FELADAT. Egy labirintus folyosói egy n–oldalú konvex sokszög oldalai és átlói. Legalább hány fáklyát kell elhelyeznünk a labirintusban ahhoz, hogy minden járatban legyen fényforrás?*

*A fentiek után nyilvánvaló, hogy egy lefogási problémával állunk szemben. Az alaphalmaz a labirintus csomópontjai és minden folyosó definiál egy halmazt, a folyosón lévő csomópontok halmazát. A feladat az erre a halmazrendszerre vonatkozó lefogási kérdés. (Ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy az optimum keresésénél nem érdemes a csomópontokon kívülre fáklyát helyeznünk.)*

*Egy kevés fáklyát használó lefogás könnyen megadható. A sokszög összes csúcsába, egy kivételével, rakjunk egy fáklyát. Így $n-1$ fáklyával megoldható a kérdés.*

*A megoldás hiányzó része az alsó becslés. $v(H)=\lfloor n/2 \rfloor$ ahol H a feladat mögött húzódó halmazrendszer. (Miért?!) Tehát az előző feladatból leszűrt módszer nem működik. (Mint majd látjuk a fenti lefogás optimális). Egy kis trükkel a megoldás azonban könnyen befejezhető.*

*Ha a sokszög összes csúcsban van fáklya, akkor persze nem "verhetjük meg" a fent talált megoldást. Ha viszont egy csúcsban nincs fáklya, akkor a belőle kiinduló $n-1$ fo-*

*lyosó közös csúcs nélküli része már diszjunkt lesz. Tehát csak ezen rész megvilágítása igényli az* $n-1$ *fáklyát.*

## Dobozok és kártyák

*3. FELADAT. Adott ezer kártya a 000, 001, ..., 999 számokkal és száz doboz a 00, 01..., 99 felírásokkal. Egy lapot olyan dobozba tehetünk, amelynek a száma a lap számából megkapható egy jegy kihúzásával.*

*a) Bizonyítsuk be, hogy az 1000 lap belerakható 50 dobozba.*

*b) Bizonyítsuk be, hogy az 1000 lap nem rakható bele 50-nél kevesebb dobozba.*

*A feladat minden kártyára definiál egy doboz-halmazt: azon dobozok halmazát, amelyek szóba jönnek a megfelelő kártya elrakásánál. Megjegyezzük, hogy egy* iii *számú kártya esetén ez a halmaz egy elemű lesz (azaz ez a kártya egyetlen egy dobozba rakható be), míg az* iij*, illetve* ijj ($i=j$) *címkéjű kártyák két dobozba rakhatók be. A feladat erre a halmazrendszerre vonatkozó lefogási probléma. A feladat a) része egy 50 elemű lefogóhalmaz létezésének bizonyítását kéri. A b) rész egy alsó becslést kér. Az a) és a b) rész azt mondja, hogy a lefogási kérdésre a válasz 50.*

*Kezdjük a felső becsléssel, azaz az a) résszel. Nevezzünk egy számjegyet kicsinek, ha az legfeljebb 4 és nagynak, ha az legalább 5. Minden kártyán három számjegy van. Ezek mindegyikéről eldönthetjük, hogy kicsi vagy nagy. A skatulya-elv egyszerű alkalmazása azt mondja, hogy minden kártyán vagy legalább két kis számjegy, vagy legalább két nagy számjegy van a ráírt számjegy-sorozatban. Ez a nagyon egyszerű megjegyzés ad egy lefogást: Vegyük azokat a dobozokat, amelyek cimkéjének mindkét számjegye kicsi vagy pedig mindkét számjegye nagy. A skatulya-elv valóban azt adja, hogy minden kártya a fent kijelölt dobozok valamelyikébe berakható. Egyszerű meggondolni, hogy a kijelölt dobozrendszer 50 dobozt tartalmaz.*

*A b) részben lévő állítás bizonyításához új ötletre van szükség. Ehhez a dobozainkat rendezzük egy 10x10-es alakzatba, ahol az* i *számú sorban* és j *számú oszlopban van az* ij *címkéjű láda (a sorok és oszlopok számozása a 0, 1, ..., 9 számjegyekkel történik). A doboz-kiválasztást gondoljuk el úgy, hogy táblázatunk bizonyos elemeit megjelöljük. A táblázatból válasszuk ki azt a sort, amely a legkevesebb megjelölt elemet tartalmazza (legyen n az itt talált megjelölt elemek száma). A táblázatunkat átrendezhetjük úgy, hogy a kiválasztott sor a 0 számú sor legyen és az ebben megjelölt elemek a 0, 1, ...,* $n-1$ *számú oszlopból kerülnek ki. Azaz az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a 0-val kezdődő ládák közül választottuk ki a legkevesebbet (összehasonlítva egy tetszőleges* i *esetén az* i*-vel kezdődő ládákból kiválasztottak számával) és innen a 00, 01,...,* $0(n-1)$ *ládák kerülnek kiválasztásra. Ekkor viszont a* 0ij *kártyának,* $i,j\geq n$ *esetén az* ij *számú dobozba kellett kerülnie. Ez bizonyítja, hogy a legalább* $n$*-nel kezdődő ládák közül legalább* $(10-n)^2$ *kiválasztásra került. Azon ládák közül, amelyek száma 0, 1, ...,* $n-1$ *vagy* $n$*-nel kezdődik, legalább* $n^2$*-et választottunk ki, hiszen minden kezdődésre legalább* $n$ *láda lett kiválasztva (ez volt az* $n$ *szám definíciója). Tehát a kiválasztott ládák száma legalább* $(10-n)^2+n^2\geq 50$.

## Algoritmikus megjegyzések

*4. FELADAT. Egy 500 tagú vállalat dolgozói* $2n$ *nyelv közül beszélnek néhányat, minden dolgozó legalább* $n$ *nyelvet. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható 14 nyelv úgy,* *hogy minden dolgozó a 14 nyelv közül legalább egyet beszéljen.*

*A lefogási feladat nyilvánvaló: Az alaphalmaz a vállalat dolgozói által beszélt nyelvek. Minden dolgozó definiál egy halmazt, az általa beszélt nyelvek halmazát. A feladat egy legfeljebb 14 elemű lefogóhalmaz létezésének igazolását kéri. A feladatban szereplő halmazrendszerről tudjuk azt, hogy minden benne szereplő halmaz elemszáma fele az alaphalmaz elemszámának. Ezen túl azonban nem ismerünk semmit. Ez eltérés az eddigiektől: az előző feladatokban mindig felvehettünk egy konkrét (vagy majdnem konkrét) halmazrendszert, amiről a feladat szólt. Akkor a r(H)-ra vonatkozó felső becslést egy konkrét lefogó halmaz megadásával oldottuk meg. Itt az előző típusú válasz nem várható.*

*Most egy algoritmust definiálunk, amely egy lefogóhalmazt talál meg: Válasszuk ki azt a nyelvet, amelyet a legtöbb dolgozó beszél. Ez legyen a kijelölendő halmaz első eleme. Ezzel a dolgozók egy részének ez a halmaz már megfelelő lesz. A továbbiakban már csak azokkal a dolgozókkal foglalkozunk, akik az aktuális halmaz nyelvei közül egyiket sem ismerik. Ezekkel megismételjük az előző lépést, azaz kiválaszthatjuk a köztük legnépszerűbb nyelvet és ezt hozzáadjuk a halmazunkhoz. Az eljárást addig folytatjuk, amíg az összes dolgozó számára nem lesz nyelvünk.*

*A megoldás befejezéséhez be kell látnunk, hogy a "kiszámított" halmaz elemszáma legfeljebb 14. (Mint majd látni fogjuk, a kapott halmaz elemszáma legfeljebb 9 lesz.) Tehát a kérdés: Hány nyelvet választottunk ki, azaz hány fázisból áll ez az eljárás?*

*Ha egy fázis elején* k *dolgozóval kellett foglalkozni, akkor ők az általuk ismert nyelvek felírásával egy* kn *hosszú listát készítettek. Mivel ezen a listán* 2n *nyelv szerepelhet, ezért a legnépszerűbb nyelv legalább* $kn/2n=k/2$*-szer fog szerepelni. Tehát legalább felére csökken a további fázisokra maradó dolgozók száma. Az 500 tag esetét kidolgozva kapjuk, hogy legfeljebb 9 nyelv kijelölése után algoritmusunk leáll. Azaz 9 nyelv kijelölése is elégséges.*

*A fenti megoldás gondolata tetszőleges halmazrendszerre alkalmazható. Az eljárás minden esetben a lehetséges pontok közül azt választja, ami abban a helyzetben a lehető legnagyobb nyereséggel kecsegtet. Az algoritmust, "filozófiája" miatt, "mohó algoritmusnak" nevezzük.*

*Könnyen kigondolható olyan H halmazrendszer, amelyre a mohó algoritmus r(H)-nál jóval több pontot választ ki. Ilyen példák kidolgozását az olvasóra bízzuk.*

## Konklúzió

*A fentiekben egy nagyon általános kombinatorikus kérdést vizsgáltunk. A fent vizsgált megoldások ötletet adnak ahhoz, hogy hogyan "támadhatók meg" az ezekkel kapcsolatos feladatok:*

*Azt akarjuk megmutatni, hogy egy halmazrendszer lefogásához sok pont szükséges? Keressünk minél több páronként diszjunkt halmazt rendszerünkből és ezek bizonyítják, hogy a lefogáshoz sok pont szükséges.*

*Azt akarjuk megmutatni, hogy egy halmazrendszer kevés ponttal lefogható? Vegyük azt a pontot amelyik legtöbb halmazban szerepel, majd az ez által lefogott halmazok elhagyásával folytassuk eljárásunkat, amíg egy lefogó halmazt kapunk.*

*A fenti feladatok megoldásából az is kiderült, hogy ezek a módszerek nem "teljesek". Azaz az általuk adott alsó becslés, illetve lefogóhalmaz egyáltalában nem biztos, hogy az optimális megoldást adja.*

*Bebizonyítható, hogy a lefogási probléma* NP–teljes. *Ennek a fogalomnak ismertetése meghaladja ezen cikk keretét, csak azért említjük meg, mert a matematikusok számára az* NP–teljesség azt jelenti, hogy a probléma igen nehéz. *Például nem várjuk, hogy olyan megtanulható módszer legyen megoldásukra, mint a másodfokú egyenlet vagy lineáris egyenletrendszerek megoldására.*

A feladatok eredetéről. *Az 1. a* Kvant *című folyóiratban jelent meg. A 2. feladat és 4. feladat a* KÖMAL–*ból ered (1987/2, 79. old. F.2623., illetve 1978/1, 30. old., P.295.). A 3. feladat a Szovjet középiskolai matematikai olimpián volt kitűzve 1977–ben a 10. osztályosoknak.*

*HAJNAL PÉTER*

# Kombinatorikai feladatok középiskolásoknak

*Az elmúlt évek során többször volt alkalmam arra, hogy kipróbáljam, hogyan lehet 15–16 éves érdeklődő, de nem kiugró képességű tanulók számára a kombinatorikus gondolkodásmód elemeit bemutatni. Tapasztalataim szerint a legalkalmasabb erre egy, a következőkben leírthoz hasonló feladatsor. Ezt a feladatsort természetesen mindig az adott tanulócsoporthoz, az adott foglalkozás "légköréhez", a gyerekek ötleteihez, fogadókészségéhez kell igazítani. Íme a feladatsor:*

*1. Vizsgáld meg a következő "számháromszöget"!*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 3 & & 5 & & & & \\
 & & & 7 & & 9 & & 11 & & & \\
 & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & \\
 & 21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 & \\
31 & & 33 & & 35 & & 37 & & 39 & & 41
\end{array}
$$

*a./ Hány szám áll a 10., 20., 100., n. sorban?*
*b./ Melyik szám áll a 10., 20., 100., n. sor végén?*
*c./ Mennyi a 10., 20., 100., n. sorban álló számok összege?*