Kelemen Rita
SZTE, Neveléstudományi Tanszék, Neveléstudományi Doktori Iskola

Fejlesztő kísérletek a realisztikus matematikai problémák megoldásában

Jelentős törekvések figyelhetők meg nemzetközi és hazai viszonylatban is egy jobban használható, a világ változásaival lépést tartó matematika kialakítására. A NAT (1995) a matematikaoktatás céljai és feladatai közül leginkább a megszerzett matematikatudás „világi”, iskolán kívüli használhatóságát, valamint az önálló gondolkodás, problémalátás fejlesztésének, a problémamegoldói stratégiák elsajátításának fontosságát hangsúlyozza.

A magyar közoktatásban is jelentkező törekvés – miszerint nagy mennyiségű ismeretanyag átadása helyett a produktív képességek fejlesztésére kell helyeznünk a hangsúlyt – a matematikára vonatkoztatva azzal a következménnyel jár, hogy az egyenletek, az algoritmikus, szimbólumokat használó, számolós feladatok mellett jobban előtérbe kerülnek a szöveges, valós környezetbe ágyazott problémák, melyek egyaránt eleget tesznek a „valóság-modellező” és a „problémamegoldó” elvárásoknak. Írásunkban a realisztikus matematikai problémamegoldás fejlesztésével foglalkozó jelentősebb kísérletek nemzetközi kínálatából választottunk ki bemutatásra néhányat. A téma itthoni alkalmazásáról Csíkos Csaba (2002, 2003a, 2003b) és Kelemen Rita (2004) írásaiban olvashatunk.

A pedagógiai fejlesztő kísérletekről szóló tudományos beszámolókat legtöbbször csak a kutatók egy szűk csoportja olvassa, mert többnyire olyan pedagógiai folyóiratokban jelennek meg, amelyeket a pedagógusok zöme nemigen forgat. Pedig egy tantárgyi tartalomba ágyazott fejlesztő kísérletnek a tudományos eredmények mellett számos érdekes vonatkozása lehet a tantárgy módszertanára is. Egy ilyen kísérlet megszületése általában egy, a gyakorlatban megtapasztalt hiányt, a tantárgy tanításában, tanulásában fennálló nehézséget hivatott kompenzálni, így tehát számos, a mindennapi tanulási-tanítási folyamatba beépíthető, annak hatékonyságát növelő ötlet meríthető belőle. Ennek megfelelően vállalkoztunk arra, hogy a realisztikus matematikai problémamegoldásra vonatkozó fejlesztő kísérletek színes palettájából válogassunk az olvasó számára. De mielőtt ismertetnénk magukat a kísérleteket, röviden szólunk azok tudományos hátteréről.

A pedagógiai fejlesztő kísérletek elméleti alapjai

A pedagógiai kísérletek sajátossága, hogy nem izolált laboratóriumi környezetben, hanem iskolákban zajlanak. Az ilyen kísérletek előtt álló talán legnagyobb kihívás, hogy megfeleljenek az iskolai használhatóság követelményének, azaz gyakorlati módon integrálódjanak az iskolai miliőbe. (*Csapó*, 2003) A fejlesztő programok egyik fontos mutatója az ökológiai validitás, ami arra vonatkozik, hogy a fejlesztés milyen mértékben változtatja meg az iskola természetes környezetét, és így kísérleti eredménye mennyire magyarázható a fejlesztés tartalmával és mennyire a fejlesztés tényével. Az ökológiai validitás szinte minden kísérletnél kényes kérdést jelent. Ha az eredmények laboratóriumi körülmények között születnek, ahol a megfigyelt viselkedésre szigorú kontroll irányul, akkor irrelevánsak lesznek a laboratóriumon kívüli világban, azaz a kísérlet külső világra vonatkozó validitása hiányozni fog. (*Davis*, 2000) A pszichológiai terminust neveléstudományira fordítva azt mondhatjuk, hogy a gyakorlóiskolákban – ahol, akár egy laboratóriumban, a legtöbb hatást kontroll alatt tudjuk tartani – a mért eredmények a legtöbb, nem kiemelt iskola szempontjából irrelevánsnak tekinthetők.

Ha túl sok változó módosul, többé nem leszünk képesek mérni a fejlesztés hatását, mivel nem tudjuk elkülöníteni egymástól az egyes változókban bekövetkező módosulásokat. A placebó hatás kiiktatásához is szükség van arra, hogy a kísérlet az iskolai oktatás menetébe minél természetesebben illeszkedjen. Ez annyit jelent, hogy célszerű minimalizálni a tanárokra háruló többletmunkákat, valamint az osztálytermekben folyó oktatás kontrollját. A fejlesztő kísérletek összeállításakor fontos szempont, hogy a külső körülmények, illetve a felhasználásra kerülő eszközök kivitelezhetőek-e az oktatás hétköznapi gyakorlatában.

A fejlesztő kísérletek eredményének mérése egzaktabb, tudományos alapokon történik. A feladatokhoz csatolt utasítások, kommentárok hatását mérő faktorok és a realisztikus reakciók száma között nem mutatható ki kapcsolat, így ezek nem teszik áttekinthetetlenné a kísérlet eredményeit. Vannak olyan tényezők azonban, melyeket fejlesztés közben nem tudunk kiküszöbölni, ilyenek például a tanárok, az iskolák vagy a családi háttér jellemzőiben rejlő különbségek. Ezeket az eredmények értelmezésekor ajánlatos figyelembe venni, befolyásuk azonban a kísérletben részt vevő osztályok vagy csoportok számának növelésével kompenzálható.

Egy tantárgyhoz kötött fejlesztés eredményességét mérhetjük a diákok osztályzatainak javulásával vagy a tanár tapasztalatokon alapuló véleményével, bár ez utóbbi eléggé szubjektív. Számszerű eredményt kapunk, ha a fejlesztés előtt és után alkalmazott teszteken elért eredmények különbségét alapul véve mérjük fel a program fejlesztő hatását, bár ez az eljárás nem számol azzal a lehetőséggel, hogy a diákok a kísérlet nélkül is fejlődhettek volna a vizsgált időszak alatt. A kísérleti hatásnak nevezett matematikai fogalom ezzel a jelenséggel kalkulál, és számszerűsíti, hogy a mért különbségek milyen arányban tulajdoníthatók a kísérleti beavatkozásnak.

Metakogníció, metakognitív stratégiák a fejlesztő kísérletekben

Számos realisztikus matematikai problémamegoldást fejlesztő kísérlet metakognícióra alapozott, azaz metakognitív stratégiák tanításával operál. Ezért elöljáróban röviden ismertetjük a metakogníció elméleti alapjait.

Közel három évtizede elfogadott Flavell (1979) meghatározása: a metakogníció tudásra vonatkozó tudás (cognition about cognition). A szakirodalomban nagy bőségben fellelhető definíciók közül ez tűnik a legalkalmasabbnak egy olyan esernyőfogalom világos megragadására, amely több, egymástól eltérő tudományterületet fog át. A neuroanatómiai kutatásoktól, melyekben a problémamegoldás közben legaktívabb agyi területeket vizsgálják, a feladatmegoldást követő kérdőíves felmérésekig, ahol arra kérik a diákokat, hogy utólagosan számoljanak be gondolkodási folyamatuk jellemzőiről, számos területet érint a metakogníció témaköre. Ezek közösek abban, hogy az emberi gondolkodás két, hierarchikusan egymásra épülő szintjét feltételezik: a tárgyi szintet és a metaszintet. Azért, hogy a problémamegoldás fázisait valóban egy jól megválasztott metakognitív stratégia vezérelje, nélkülözhetetlenek az olyan fejlesztő feladatok, melyek megoldásában ténylegesen szükség van a probléma értelmezésére, a megoldás nyomon követésére, majd a végeredmény ellenőrzésére, mert ezen lépések nélkül a problémamegoldó nem képes kielégítő választ adni. Az ilyen fejlesztő kísérletek – miközben tantárgyakba ágyazott feladatokat, problémákat használnak – tananyaghoz kapcsolt képességfejlesztő programokként valósulnak meg.

Realisztikus matematikai problémamegoldást fejlesztő kísérletek

Első kísérlet

„A realisztikus matematikai modellalkotás tanítása”
(*Verschaffel, Greer és De Corte,* 2000) *(1)*

A Leuven-i Katolikus Egyetemen (Belgium) működő kutatási központ kísérleteinek célja, hogy fejlessze a matematikai vonatkozású realisztikus problémák helyes, realisztikusságot megtartó modellező képességét a tanulókban. (*Verschaffel*, *Greer és De Corte*, 2000) A következőkben ezen kísérletek közül mutatunk be néhányat.

Verschaffel és De Corte (1997) korábbi kutatási eredményeik alapján összeállítottak egy kismintás fejlesztő kísérletet. Korábban már feltárták, hogy a diákoknál általános tendencia, hogy a szöveges matematikai feladatok megoldása közben figyelmen kívül hagyják a világról való előzetes tudásukat. Az új kísérlet célja az volt, hogy átformálja a diákok elképzeléseit az életszerű matematikai feladatok megoldásához szükséges tudásról, és arról, hogyan kell a szöveges feladatokat a matematika nyelvére lefordítani. Ezenkívül a kísérlettel a kutatók fejleszteni kívánták a matematikai problémák realisztikusabb modellálását is. Három ötödik osztály vett részt a kísérletben. 19 fő alkotta a kísérleti, és 18, valamint 17 fő a kontroll csoportokat. A fejlesztő program öt darab két és fél órás tanítási egységből állt, melyek kb. egy két-három hetes időszakot öleltek át. A fejlesztést nem iskolai tanárok, hanem kutatók vezették.

Verschaffel és De Corte kísérletének az volt az egyik legfőbb célja, hogy a megszokottól eltérő, toleráns osztálytermi légkört teremtsen, ahol újraértelmezhető, hogy mit tekintünk „jó” matematika feladatnak, „jó” megoldási menetnek, „jó” válasznak.

A kísérlet lényege az volt, hogy nem a matematika órákon hagyományosan alkalmazott, sztereotip szöveges feladatokkal, hanem a rutintól eltérő, realisztikus problémaszituációkkal ismertették meg a tanulókat. Ezeket a szituációkat úgy alkották meg, hogy ösztönözzék a diákokat a realisztikus feladatok modellálásában rejlő összetettség és a realisztikus és a sztereotip megoldások közti különbség felismerésére. A tanítási egységek egy-egy olyan probléma köré épültek fel, melyek realisztikus feladatok megoldásakor tipikus hibaforrások lehetnek. Az első egység arra fókuszált, hogy egy osztás eredményének milyen realisztikus értelmezései lehetnek (felső egész rész, alsó egész rész, pontos érték, maradékos osztás). Az ilyen DWR (division with remainder) feladatok prototípusa a „katonai busz” probléma:

> „Katonai buszok”: 300 katonát 8 fős katonai kisbusszal a gyakorlótérre szállítanak. Hány katonai buszra van szükség?

A feladat rutinszerű megoldása 37,5 darab buszt eredményez; ehelyett a realisztikus válasz a felső egész rész, azaz 38 busz.

A második tanítási egység az egymástól nem független elemek egyesítésével és metszetével kapcsolatos problémákat dolgozta fel. Ilyen típusú feladat a „születésnapi parti”, amelyre a realisztikus válasz nem egy szám, hanem ha a tanuló valamilyen formában feltünteti, hogy a feladatnak nincs megoldása.

„Születésnapi parti”: Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendezik meg születésnapi bulijukat. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hányan voltak a bulin?

A harmadik témát az olyan problémák adták, amelyekben első ránézésre nem egyértelmű, hogy összeadást vagy kivonást kell alkalmazni, illetve a helyes válasz eggyel több vagy kevesebb, mint a számokkal való aritmetikus műveletek végeredménye. Ilyen feladat például, ha a születési évből az életkor kiszámítását kérjük.

„Életkor”: István 1993-ban született. Most 2006-t mutat a naptár. Hány éves István?

Az ilyen típusú feladatoknál a kulturális szokások is befolyásolhatják a feladatmegoldót: vannak, akik Istvánt 2006. január 1-től 13 évesnek mondják, de vannak, akik csak a születésnapjától számítják őt 13 évesnek. A feladat célja épp az lehet, hogy megkérdőjelezze, tompítsa azt az egyre mélyebben beépülő attitűdöt, hogy egy matematikai szöveges feladat helyes megoldása mindig egy szám.

Negyedik alkalommal olyan feladatokkal találkoztak a gyerekek, melyek megoldásakor számolni kell olyan információkkal is, amelyek nincsenek expliciten benne a feladat leírásában, hanem a feladatmegoldónak kell azokat következtetnie a józan eszét használva. Ilyen például a „kötél” feladat:

„Kötél”: Egy ember kötelet szeretne kifeszíteni két, egymástól 12 méterre lévő rúd között, de csak 1,5 méteres köteldarabjai vannak. Hány darabot kellene ezekből összekötöznie, hogy átérjen a kötél a két rúd között?

A gyakori, de nem realisztikus válasz a 8 darab, mivel ez esetben a feladatmegoldó nem számol a csomókhoz szükséges mennyiséggel.

Az ötödik egység az arányossággal foglalkozott, azon belül is elsősorban azzal, hogy hogyan kell különbséget tenni az olyan esetek között, amelyek megoldása az egyenes arányosság közvetlen alkalmazását kívánja, és azok között, amelyeké nem. Ilyen például a futással kapcsolatos feladat:

„Futás”: Betti legjobb eredménye a 100 méteres futáson 17 másodperc. Mennyi idő alatt fogja lefutni az 1 kilométert?

Verschaffel és De Corte kísérletének az volt az egyik legfőbb célja, hogy a megszokottól eltérő, toleráns osztálytermi légkört teremtsen, ahol újraértelmezhető, hogy mit tekintünk „jó” matematika feladatnak, „jó” megoldási menetnek, „jó” válasznak. Ez a megszokottól eltérő légkör McNeal és Simon (2000) terminusával a „matematikaórai osztálytermi kultúrára” vonatkozik, mely a szerzők definíciója szerint azt jelenti, hogy: az a közös tudás, amely a matematikaórán való tevékenységekre vonatkozó viselkedési mintákat tartalmazza.

A fejlesztő kísérlet végén az utóteszt feladatainak megoldásához a fejlesztés alatt megismert feladatok közeli transzferálására volt szükség. Az egyik kontroll osztályban az utóteszt előtt 15 perces bevezetőt tartottak, melynek során felhívták a diákok figyelmét arra, hogy bizonyos feladatoknál a rutinszerű, kapott számokkal való aritmetikai műveletvégzés rossz végeredményhez vezethet. A fejlesztés után egy hónappal egy késleltetett teszt következett, mely tíz realisztikus problémát tartalmazott. A feladatok egyik fele az előtesztben alkalmazott problémákkal, másik fele a közeli transzfert igénylő utóteszt feladataival volt analóg.

A fejlesztő kísérlet hatásait vizsgálva a kutatók megállapították, hogy a kísérleti csoport teljesítménye szignifikánsan javult a fejlesztés alatt, míg a két kontroll csoport teljesítménye nem mutatott szignifikáns változást. További eredmény, hogy az öt tanult item esetében a javulás nagyobb volt, mint az öt közeli transzfert igénylő feladatnál.

A fejlesztés hatásának megmaradásáról elmondható, hogy a kísérleti osztály a közeli és a távolabbi transzfert igénylő feladatokra a késleltetett utómérésen lényegében egyforma mértékben, 40 százalék körül adott realisztikus választ. Ez lényegesen jobb, mint egy nulláról induló csoport eredménye. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy még a fejlesztett osztályokban is viszonylag kevés realisztikus válasz született, azaz a probléma nem tűnt el teljesen minden gyerek és minden feladat esetében.

Második kísérlet

„A hétköznapi tudás alkalmazását igénylő matematikai problémák megoldásának tanulása” (*Verschaffel, De Corte és Lasure*, 1994) *(2)*

Verschaffel, De Corte és Lasure (1994) egy olyan fejlesztő kísérletet indítottak el, melynek célja a tanulási és tanítási környezet megváltoztatása és tesztelése volt ötödik osztályos tanulók körében. A fent ismertetett fejlesztő kísérlettel ellentétben ez a program osztálytermi környezetben, iskolai tanár vezetésével zajlott. Így ez a kutatás ökológiai validitás szempontjából magasabb fokúnak tekinthető, vagyis jobban dokumentálja a gyakorlat szempontjából fontos jelenségeket.

A fejlesztés egyik célja az volt, hogy a tanulók elsajátítsanak a matematika alkalmazását kívánó feladatok megoldása esetén hasznosnak bizonyuló általános stratégiákat. Ezeket a stratégiákat a kutatók a következő öt lépésben foglalták össze:

1. A probléma mentális reprezentációjának megalkotása (ábrakészítés, lista, séma vagy táblázat készítése, a hasznos és a felesleges adatok megkülönböztetése, a valós világból való ismeretek alkalmazása).
2. Annak eldöntése, hogy hogyan oldjuk meg a problémát (folyamatábra készítése, becslés és ellenőrzés, mintakeresés, a számok egyszerűsítése).
3. A szükséges számolások elvégzése.
4. A végeredmény értelmezése és a válasz megalkotása.
5. A megoldás ellenőrzése.

A fejlesztés másik célja a matematikára és a matematikai problémákra vonatkozó meggyőződések (beliefs) és attitűdök átformálása volt. Fontosnak tartották, hogy a diákok attitűdjébe beépüljenek rugalmasabb elemek, mint például „egy matematika feladatnak lehet több helyes megoldása is”, vagy hogy „egy matematikai probléma megoldása lehet esetenként igen nehéz és időigényes”.

A fejlesztő kísérlet sokféle, gondosan összeállított, komplex, realisztikus, kihívást jelentő, nyitott feladatot alkalmazott, melyek megoldása megértést és metakognitív stratégiák alkalmazását kívánta meg. Néhány probléma egyszerű szövegként, mások a tanár által elmesélt sztoriként vagy újságcikként, komikus ábraként, táblázatként, vagy ezek különféle kombinációiként került bemutatásra.

Az órákat a tanár és a diákok változatos tevékenységére alapozva tervezték meg. A legtöbb óra Verschaffel és De Corte (1997) fejlesztő kísérletének instrukciós modelljét követte, azaz egy probléma tárgyalása kiscsoportos munkával kezdődött, melyet osztályszintű megbeszélés, majd egyéni feldolgozás követett, s végül szintén osztályos megbeszéléssel zárult. A tanárnak az volt a szerepe, hogy motiválóan, bátorítóan reagáljon a kognitív és metakognitív tevékenységekre.

A beavatkozások elsődlegesen arra irányultak, hogy újfajta szociomatematikai normákat építsenek ki, hogy olyan osztálytermi klíma jöjjön létre, amely hozzájárul a diákok pozitív meggyőződéseinek kialakulásához a matematikaórát és a matematikai szöveges feladatokat illetően. A szociomatematikai normák nemcsak a tanulókra, hanem a tanárra is vonatkoznak. Ilyen új, kialakítandó normák például a következők:

– „Ne várjátok, hogy a tanár jelentse ki, hogy melyik megoldás helyes, illetve helytelen, hanem ezt a döntést az osztály együtt hozza meg azután, hogy értékeli az érveket és az ellenérveket az összes megfelelő megoldást illetően!"

– „Sok matematikai problémát különféle módon meg lehet oldani, lehet interpretálni."

– „Néha a durva becslés jobb megoldást ad a problémára, mint az egzakt válasz."

– „A profi problémamegoldó megoldási menete nem minden esetben számolásból, vagy számolások sorozatából áll. Sok esetben az ábra vagy diagramm készítése segíti a problémamegoldást a legjobban."

A fejlesztő kísérlet 20 darab egy-másfél órás foglalkozást tartalmazott, melyeket a kutatócsoport a tanárok véleményeinek figyelembevételével állított össze. Az órákat tartó tanárok a fejlesztő program előtt alapos felkészítésben részesültek, hogy képesek legyenek kialakítani a megfelelő tanulási környezetet. A felkészítés egy elméleti alapozásból, a fejlesztő órák egyesével történő áttekintéséből, a felmerülő problémák, szituációk megbeszéléséből, valamint abból állt, hogy az órákat egy kutató bemutatta. A program megvalósítása közben rendszeres konzultáció segítette a tanárok és az igazgatók munkáját. Heti két fejlesztő alkalom mellett a program kb. három hónapig tartott; és három elkülönülő részből tevődött össze:

1. az új tanulási környezet bevezetése, a rutin feladatok és a valós problémák közötti különbség megfogalmazása (1 óra);
2. az öt lépésből álló problémamegoldó stratégia és a benne rejlő megértési lépcsők szisztematikus elsajátítása (15 óra);
3. annak elsajátítása, hogy komplexebb feladatok megoldása közben hogyan kell használni a megtanult problémamegoldó modellt, lehetőleg spontán és rugalmas módon (4 óra).

A kísérletben négy ötödik osztályos kísérleti és hét kontroll osztály vett részt. Az előtesztelés egy matematikai teljesítménytesztből és realisztikus matematikai szöveges feladatokat tartalmazó tesztből, valamint egy kérdőívből állt, amelynek egyik része a matematikai szöveges problémákhoz való affektív viszonyulást, míg a másik része a szöveges feladatok megoldásmenetével kapcsolatos előítéleteket vizsgálta. Mindkét csoportból három diákkal strukturális interjút is készítettek, amelyek keretében öt komplex realisztikus szöveges feladatot kellett a diákoknak megoldaniuk. Az interjúkat videóra rögzítették, melyek segítségével később megvizsgálhatták a problémák megoldása közben megjelenő tanulói heurisztikákat és metakognitív stratégiákat.

A fejlesztés végén a tanulók a három előteszt analóg változatát oldották meg, illetve töltötték ki. A fejlesztés előtt interjúval is vizsgált gyerekek újra részt vettek egy hasonló strukturális interjún. Három hónappal később késleltetett utótesztelést végeztek a problematikus szöveges feladatok analóg változatait tartalmazó teszttel.

Az előteszten a kísérleti és a kontroll csoportnak a realisztikus szöveges feladatokban elért teljesítményei között nem mutatkozott szignifikáns különbség, míg a fejlesztés utáni utóteszten és a késleltetett utóteszten a kísérleti osztályok szignifikánsan jobban teljesítettek. Azonban a fejlesztett osztályok teljesítményjavulása még így is kisebb volt a vártnál: kevesebb mint 50 százalékban adtak realisztikus választ a szöveges feladatokra.

A kontroll csoporttal összehasonlítva a kísérleti csoport tanulóinak matematikai attitűdje, valamint a matematikai szöveges feladatokkal szemben támasztott elvárásai, meggyőződései szignifikánsan ugyan, de csak kis mértékben javultak. A hagyományos matematika teszten való teljesítményük szintén szignifikánsan jobb volt, itt a javulás már elérte a közepes szintet. Ez azt jelenti, hogy a realisztikus szöveges feladatok fejlesztésének pozitív transzfer hatása figyelhető meg a tanulók hagyományos matematikai tudására vonatkozóan.

A harmadik kísérlet

„Jasper kalandjai” (Cognition and Technology Group, Vanderbilt)

A CTGV kutatóközpont 1992-ben kidolgozott egy videófilmekre alapozott komplex problémamegoldó csomagot, mely – az első kitalált történet főhősének neve után – „Jasper-kalandok” néven vált ismertté a tudományos köztudatban. (*Bransford*, *Zech és mtsai*, 1996)

A *Jasper-sorozat* 12 olyan videófilmet foglal magába, amelyek egy érdekes felfedező kaland elmesélésének keretében egy-egy matematikai fogalmat vezetnek be: például távolság, idő, arányosság, statisztika, valószínűség, geometria, algebra.

Az első Jasper-kalandban (*Utazás a Cédrus-öbölbe*) egy öreg jachtot akar Jasper megvenni; a vásárlást megelőző próbautat dolgozza fel a film. A diákoknak el kell dönteniük, hogy a hajó hazaér-e napnyugta előtt (a fényszórója elromlott), van-e elég üzemanyaga, valamint hogy Jaspernél van-e elég készpénz ahhoz, hogy üzemanyagot vegyen. A *Boone-mező mentőakció* című részben egy sérült sas életét kell megmenteni. A tanulók feladata az, hogy megtalálják a leggyorsabb mentési módot és megmondják, hogy menynyi időt vesz igénybe, miközben több különböző paramétert tartanak szem előtt. Három Jasper-kaland (*A nagy csobbanás, Egy óriási ötlet, Áthidalni a szakadékot*) üzleti tervek kidolgozását és statisztikai fogalmak bevezetését, megértését célozza meg. A *Terv a sikerre, A derékszög, A hatalmas körverseny* filmek a geometria témakörét dolgozzák fel, a *Working SMART*, *Kim tölcsére, Nincs meg a tábornok* részek pedig az algebrába vezetik be a tanulókat. A SMART (Special Multimedia Arenas for Refining Thinking), „Gondolkodás Finomítására Szolgáló Speciális Multimédiás Területek” módszer a telekommunikációs, televíziós technikákat, valamint az Internetet használja, hogy megfelelő visszacsatolást biztosítson a tanulóknak olyan diákoktól, akik szintén megoldották az adott Jasper-kalandot. A tanulók megnézhetik mások munkáját, és eldönthetik, hogy módosítani akarják-e a saját megoldásukat, vagy sem.

Az IMPROVE módszer egyik nagy előnye, hogy a csoportmunka a feladattal kapcsolatos gondolataik megvitatására ösztönzi a diákokat, így szükségképpen kialakul egy formális nyelv, melyen egzakt módon tudnak beszélni a matematikáról.

Vershaffel, Greer és De Corte (2000) szerint a Jasper-kalandok módszertanilag a következő öt alapelvre épülnek:

1. Videófilmes prezentáció (Video-based presentation format), amely azon a felismerésen nyugszik, hogy a médiumok által közvetített szituációk az információkat sokkal gazdagabb és realisztikusabb kontextusban tálalják, mint az írott szöveg.
2. Elbeszélő jelleg (Narrative format), azaz a megoldandó probléma egy történetbe ágyazódik, és ez az értelemmel bíró történeti környezet segíti a diákokat a probléma feldolgozásában.
3. Alkotó jelleg (Generative structure), azaz a diákoknak maguknak kell megoldaniuk a történet problémáit, és ezáltal a befejezését is, így maguk is érdekeltté válnak a feladatmegoldásban.
4. Történetbe ágyazott adatok (Embedded data design): azáltal, hogy a releváns információk a történetbe vannak ágyazva, a diákoknak maguknak kell azonosítaniuk a problémát, majd különválasztani a kontextust és a matematikai formákat.
5. Komplex problémák alkalmazása (Problem complexity), melyek megoldása sok esetben akár több mint 15 közbülső lépést vagy alproblémát is tartalmazhat. Ez lehetőséget biztosít a diákok számára, hogy elsajátítsák a hosszú távú matematikai gondolkodás, problémamegoldás képességét.

A matematikából átlag fölött teljesítő diákok is sok esetben csak igen nehezen tudják megoldani a Jasper-filmekben felmerülő problémákat. Bár rendelkeznek a szükséges matematikai tudással, az alproblémákra való bontással és azok megoldásával nehézségeik támadnak, ami nem meglepő, hiszen a hagyományos matematikaoktatás nem készíti fel őket a komplex problémák feldolgozására és megoldására.

A *Jasper-sorozat* kezdeti tanulmányozása után számos további vizsgálatra került sor, amelyek azt mérték, hogy a program milyen közvetlen hatással van a tanulásra, illetve milyen mértékű transzfert képez. Az egyik vizsgálatban jó képességű ötödik osztályos tanulók egy Jasper-történetet néztek meg videón, majd ezt követte az előtesztelés, melynek során a diákokat kísérleti és kontroll csoportba osztották. A kísérleti csoportban a tanulóknak a Jasper-kaland utazástervét kellett elkészíteniük, ezután a felmerülő problémákat analizálták és oldották meg. A kontroll csoportban viszont hagyományos tanóra keretében olyan, a Jasper-történetekben megjelenő hagyományos szöveges feladatokat oldottak meg, amelyek egy- vagy kétlépéses aritmetikai műveleteket írtak le. A három egyórás fejlesztési szakasz végén három utóteszt következett. Az első a közösen látott Jasper-történet feladatait tartalmazta, a második egy másik videós történet volt, mely az eredeti kaland feladataival izomorf problémákat tartalmazott. A harmadik mérőeszköz hagyományos, egy- vagy kétlépéses szöveges feladatokból állt. Az első két teszten a kísérleti csoport tanulói szignifikánsan jobb eredményt értek el, míg a hagyományos teszten nem volt különbség a kísérleti és a kontroll csoport teljesítménye között.

Negyedik kísérlet

„IMPROVE: Egy többdimenziós módszer a matematikatanításra heterogén osztályokban” (*Mevareck és Kramarski*, 1997) *(3)*

Zemira R. Mevareck és Bracha Kramarski (1997), az izraeli Bar-Ilan egyetem kutatói fejlesztették ki az IMPROVE többdimenziós oktatási módszert, melynek célja a diákok matematikai gondolkodásának fejlesztése. A módszer neve (amely önmagában is azt jelenti, hogy „javítani”) az alkalmazott tanítási lépések kezdőbetűiből állt össze, melyek a következők.

1. Introducing new concepts (Új fogalmak bevezetése)
2. Metacognitive questioning (Metakognitív kérdések)
3. Practicing (Próbálkozások)
4. Reviewing and reducing difficulties (A problémában rejlő nehézségek vizsgálata és csökkentése)
5. Obtaining mastery (Tökéletes megoldás)
6. Verification (Igazolás)
7. Enrichment (A tanulságok levonása)

Az IMPROVE foglalkozásai frontális munkával kezdődnek, majd heterogén csoportokban való tevékenységgel folytatódnak. A csoportok általában négyfősek, egy jól, két közepesen és egy alacsonyan teljesítő diákból állnak. A csoportmunka alatt a diákok metakognitív kérdéseket tesznek fel egymásnak; ezek egyik fajtája a megértésre vonatkozó kérdés, melynek célja, hogy a tanulók megragadják a probléma lényegét. Ilyen például: „Hogyan mondanád el a problémát a saját szavaiddal?” A metakognitív kérdések második osztályát a stratégiai kérdések alkotják, melyek a problémamegoldáshoz szükséges megfelelő stratégia kiválasztását segítik. A harmadik csoport a kapcsolatokat feltáró kérdéseké, amelyek az aktuálisan megoldandó és a már megoldott problémák matematikai mélystruktúráját vagy a feladat kontextusát érintő hasonlóságokat és különbségeket hivatottak feltárni.

Az első kísérlet célja annak megismerése volt, hogy az IMPROVE használata hogyan befolyásolja a különböző képességű diákok matematikai teljesítményét. Három osztály 99 tanulója alkotta a kísérleti csoportot és öt osztály 148 diákja a kontroll csoportot. Az IMPROVE használatának megkezdése előtt felmérték mindkét csoport matematikai teljesítményét egy olyan teszttel, amelynek az egyik fele hagyományos matematikai feladatokból állt, míg a másik fele speciális – a diákok matematikai gondolkodását közvetlenül mérő – feladatokból. Ilyen például a következő.

> „Robi azt állítja, hogy az X/X (X nem egyenlő 0) mindig 1. Sára azt mondja, hogy az X/X értéke attól függ, hogy X mekkora. Kinek van igaza? Magyarázd meg a döntésedet!”

Minden feladat végén arra kérték a diákokat, hogy indokolják a válaszokat.

A fejlesztő kísérlet megkezdése előtt a programot vezető tanárok részt vettek egy kétnapos intenzív tréningen, melyen a matematikatanítás általános céljaitól kezdve a módszer elméleti hátterének megismeréséig és gyakorlati alkalmazásáig minden kérdést megbeszéltek. A program ideje alatt kéthetenként a program vezetői felkeresték a fejlesztésben résztvevő pedagógusokat, hogy megbeszéljék az esetlegesen felmerülő problémákat, illetve hogy tanácsokkal lássák el őket.

Az IMPROVE-val tanuló csoport a fejlesztő program után az algebra teszten szignifikánsan jobb eredményt ért el, mint a kontroll csoport. A képességek szerinti csoportok vizsgálatából az derült ki, hogy csak a közepesen és a jól teljesítő diákok esetében mutatkozik szignifikáns javulás, míg a gyenge képességű tanulók teljesítménye nem növekedett számottevően. A matematikai gondolkodást közvetlenül mérő teszten mindhárom teljesítménykategóriában azonban szignifikáns különbséget mértek a kísérleti és a kontroll csoport teljesítménye között.

A második fejlesztő kísérletben hat hetedik osztály 164 tanulóját vizsgálták egy egész tanéven keresztül; a diákokat IMPROVE módszerrel oktatták matematikára. Az előző kísérlethez hasonlóan az év végén szignifikáns különbség mutatkozott a kontroll és a kísérleti csoport között a kísérleti csoport javára, bár az év elején a két társaság az alkalmazott algebra teszten hasonló eredményeket ért el. A képességcsoportokat tekintve a jól és a közepesen teljesítő tanulók esetében lényeges javulást figyeltek meg. A legsikeresebbnek a közepes képességcsoportba tartozó diákok esetén mutatkozott a fejlesztés, az ő év végi teljesítményük átlaga elérte a kontroll csoport jó képességű tanulóinak év végi átlagát. A gyenge képességű tanulók teljesítményét ez esetben sem sikerült szignifikáns módon javítani.

Az IMPROVE módszer egyik nagy előnye, hogy a csoportmunka a feladattal kapcsolatos gondolataik megvitatására ösztönzi a diákokat, így szükségképpen kialakul egy formális nyelv, melyen egzakt módon tudnak beszélni a matematikáról. Másrészt megtapasztalhatják azt, hogy egy problémának több helyes megoldása is lehetséges, harmadrészt a heterogén csoportokban a diákok segítik, fejlesztik egymás feladatmegoldó képességét, matematikai gondolkodását.

Ötödik kísérlet

„Metakognitív tréning versus kidolgozott feladatokat használó tanítás hatásai a diákok matematikai gondolkodására” (*Mevareck és Kramarski*, 2003) *(4)*

A fent ismertetett, egész tanéven át tartó IMPROVE sikeressége után a kutatók kipróbálták a módszert két tanéven keresztül is 122 nyolcadikos, majd kilencedikes tanulóból álló mintán. A diákok viselkedését a csoportos feladatmegoldás közben videóra rögzítették és utólag elemezték. A fejlesztés két éve alatt a kontroll osztályokban hagyományos, előre kidolgozott feladatok segítségével tanultak a diákok, így össze lehetett hasonlítani a metakognitív tréningnek és a kidolgozott feladatokra építő tanítási módszernek a matematikai gondolkodásra és kommunikációra, valamint a diákok teljesítményére gyakorolt hosszú távú hatását.

A tanulók teljesítményváltozását egy előteszttel, egy közvetlen utóteszttel és egy késleltetett utóteszttel mérték. A metakognitív tréninggel tanított csoportok teljesítménye a közvetlen utóteszten és a késleltetet utóteszten is felülmúlta a kontroll csoportét. Emellett a kísérleti csoport diákjai a matematikai feladatmegoldást ügyesebben indokolták szóban és írásban is.

Hatodik kísérlet

„Több tantárgyban alkalmazott metakognitív tréning hatása a matematikai gondolkodásra” (*Mevareck és Kramarski*, 2001)

A most bemutatásra kerülő fejlesztő kísérlet különleges csoport-elrendeződést mutatott. A diákok egyik csoportja (MMT: multilevel metacognitive training) matematika órán és angol mint idegen nyelv órán is az IMPROVE módszerrel tanult, a másik kísérleti csoport (UMT: unilevel metacognitive training) csak matek órán használta az IMPROVE módszert, míg a kontroll csoport egyik órán sem találkozott ezzel a metakogníciót fejlesztő módszerrel. A három csoport létszáma rendre 60, 60 és 62 fő volt.

A kísérlet azt tűzte ki célul, hogy a két tantárgyban alkalmazott IMPROVE módszerrel tanulók, valamint az IMPROVE módszert nem ismerő diákok matematikai gondolkodását hasonlítsa össze. Másodsorban mérni kívánta a módszer transzferhatását, azaz a programban nem szereplő, valós szituációkat leíró feladatok megoldására való hatását. A kutatók azt a hipotézist fogalmazták meg, hogy a két tantárgyban alkalmazott metakognitív fejlesztésben részt vevő MMT csoport teljesítménye lényegesen nagyobb javulást mutat majd, mint a csak a matematika terén fejlesztett UMT csoporté. Véleményük szerint ez a különbség nem a kettős fejlesztés hatásának összeadódása miatt jelenik majd meg, hanem mert az MMT csoport diákjai a metakognitív folyamatok általánosításával a speciális alkalmazási területek fölé emelve értik meg azok fontosságát.

A tanárok a fejlesztő kísérlet megkezdése előtt egy egynapos tréningen vettek részt, mely a problémamegoldás tanításának pedagógiai aspektusaira fókuszált.

A kísérlet során előtesztként egy matematikai teljesítményt mérő feladatsort alkalmaztak, az utótesztelés pedig egy matematikai teljesítményt, matematikai indoklásokat és a valós életből való matematikai feladatok megoldásához szükséges transzferálási képességet ellenőrző matematika tesztből, valamint a metakognícióra vonatkozó kérdőívből állt. A matematika teszt feleletválasztós feladatokat és olyan nyílt végű problémákat tartalmazott, melyek speciálisan a diákok matematikai indoklásait mérték fel: a diákoknak el kellett magyarázniuk, hogy miért és hogyan adták éppen ezeket a válaszokat. A valós világ problémáinak megoldására irányuló transzfert a „pizza”-feladattal tesztelték, amely egy valós szituációt modellez: egy iskolai bulira pizzarendelést kellett felvenni. Különféle cégektől kapott árajánlatok után a diákoknak azt kellett eldönteniük, hogy melyik cég ajánlata a legkedvezőbb.

A metakogníciót vizsgáló kérdőív itemei tartalmuk szerint a következő négy csoportba oszthatók:

1. Stratégiák a megoldásmenetet megelőzően (6 item) (például: „Mielőtt elkezdek megoldani egy matematikai feladatot, megpróbálom elmondani a saját szavaimmal.”)
2. Stratégiák a megoldásmenet közben (5 item) (például: „Ha meg kell oldanom egy matematikai problémát, az adatokat érdemes egy táblázatba rendeznem.”)
3. Stratégiák a megoldásmenet végén (7 item) (például: „Miután megoldottam egy problémát, az eredményt leellenőrzöm, hogy logikus-e.”)
4. Általános problémamegoldó stratégiák a közös munkát illetően (7 item) (például: „Ha egy feladatot elmagyarázok a barátomnak, akkor azt én is könnyebben megértem.”)

Az MMT csoport szignifikánsan jobb eredményt ért el a matematikai teljesítmény, a matematikai indoklások, a magyarázatok és a valós szituációt leíró, transzfert igénylő feladat esetében, mint az UMT csoport. Az UMT csoportnak úgyszintén mindhárom eredménye jobb volt, mint a kontroll csoporté. A metakogníciós stratégiákat vizsgáló kérdőív vizsgálata azt mutatta, hogy az MMT csoport tagjai számoltak be a legtöbb metakogníciós stratégia használatáról, őket az UMT csoport tagjai, majd a kontroll csoport tagjai követték. Ezek a különbségek azonban nem mind a négy típusú stratégiánál mutattak szignifikáns különbséget. Az UMT és a kontroll csoport átlagos értékei között egyik stratégiatípus esetén sem volt mérhető szignifikáns különbség.

Hetedik kísérlet

„Metakogníciós tréning: Egy nagyvállalati alkalmazás” (*Clark és Palm*, 1990)

A szerzők arra vállalkoztak, hogy egy nagyvállalat nyolc menedzserének gondolkodási, problémamegoldási képességét fejlesszék metakogníciós tréning segítségével. (*Clark és Palm*, 1990) A fejlesztő program megkezdése előtt egy előmérést végeztek, melynek keretében a menedzsereket arra kérték, hogy a kapott problémákat hangosan oldják meg. A feladatmegoldási kísérleteket magnóra rögzítették, majd később kielemezték. Mindez arra szolgált, hogy felmérjék a résztvevők gondolkodására és problémamegoldására jellemző hibákat. A mérés során hét alapvető, több alkalommal előforduló hibát találtak, melyek kiküszöbölése lett a program egyik célja.

A fejlesztő program megkezdése előtt egy előmérést végeztek, melynek keretében a menedzsereket arra kérték, hogy a kapott problémákat hangosan oldják meg. A feladatmegoldási kísérleteket magnóra rögzítették, majd később kielemezték. Mindez arra szolgált, hogy felmérjék a résztvevők gondolkodására és problémamegoldására jellemző hibákat. A mérés során hét alapvető, több alkalommal előforduló hibát találtak, melyek kiküszöbölése lett a program egyik célja.

A program négy darab négy órás modulból állt, melyek egy kéthetes időszakot öleltek át. Az első alkalom a metakogníció fogalmának megismerésére, a tapasztalt problémamegoldási deficitek elmagyarázására szolgált, valamint annak tudatosítására, hogy a metakogníció lehetőséget ad a hibák kijavítására. A második órán páros munka következett, melyben az egyik fél hangosan megoldott egy-egy problémát, míg a másik követte a megoldás menetét, és a feladatmegoldóban megpróbálta tudatosítani az esetleges gondolkodásbeli hibákat. A harmadik és a negyedik alkalommal a résztvevők fele egy bizottsági ülést játszott el, amelyen céggel kapcsolatos problémákat beszéltek meg, míg a csoport másik fele figyelemmel követte a tárgyalást, és visszajelzést adott a beszélgetőknek, ha gondolkodási deficitet észlelt.

Az utótesztnek az előteszttel való összehasonlítása a problémamegoldás során elkövetett hibák terén jelentős pozitív változást mutatott. A kísérlet egyik hiányossága az, hogy nem használ kontroll csoportot – bár ez egy cégen belül sokkal nehezebb lenne, mint például egy iskolában. Másik hiányossága, hogy a résztvevők létszáma alacsony. Ettől függetlenül ez egy jelentős kezdeményezésnek tekinthető a jövőre nézve, mivel most történt meg először, hogy kísérleti úton mérték menedzserek metakognitív fejleszthetőségét.

Összefoglalás

Írásunkkal egy színes körképet kívántunk adni azokból a nemzetközi szakirodalomban publikált kutatásokból, amelyek a realisztikus matematikai problémamegoldást direkt módon vagy metakogníciós stratégiák mentén fejlesztik, mivel manapság egyre inkább előtérbe helyeződik a mindennapokban használható, „valóságközeli", realisztikus matematikaoktatás igénye. Tanulmányunk fő célja az volt, hogy a fejlesztő kísérletek tartalmi vizsgálata közben olyan példákat mutassunk a realisztikus matematikai problémákra, amelyek alkalmasak lehetnek arra, hogy beépüljenek a gyakorlatba. Másrészről szerettük volna, hogy az olvasó bepillantást nyerhessen az általában csak a szakterülettel foglalkozó kutatók szűk csoportja által ismert fejlesztő kísérletek elméletébe és gyakorlatába. A matematikaoktatást megújító törekvéseket erősíti, ha minél szélesebb kör számára válnak hozzáférhetővé a fejlesztő kísérletekben használt tartalmak, s az alkalmazott feladatok vagy a belőlük merített ötletek nyomán születő új problémák részévé válnak a mindennapi tanítási folyamatnak.

Jegyzet

(1) A kísérlet eredeti címe: *Teaching realistic mathematical modeling: An exploratory teaching experiment.*

(2) A kísérlet eredeti címe: *Learning to solve mathematical application problems: A design experiment.*

(3) A kísérlet eredeti címe: *IMPROVE: A Multidimensional Method for Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms.*

(4) A kísérlet eredeti címe: *The Effects of Metacognitive Training versus Worked-out Examples on Students' Mathematical Reasoning.*

Irodalom

Bransford, J. D. – Zech, L. – Schwartz, D. – Barron, B. – Vye, N. (1996): Középiskolai tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése: kutatási tapasztalatok. In: Sternberg, R. J. – Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest.

Clark, A. J. – Palm, H. (1990): Training in metacognition: An application to industry In: Gilhooly, K. J. – Keane, M. T. G. – Logie, R. H – Erdos, G. (szerk.): *Lines of thinking: reflections on the psychology of thought.* John Wiley & Sons, Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore.

Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csíkos Csaba (2002): Hány éves a kapitány? Matematikai szöveges feladatok megértése. *Iskolakultúra,* 12. 10–15.

Csíkos Csaba (2003a): Egy hazai matematika felmérés eredményei nemzetközi összehasonlításban. *Iskolakultúra*, 8. 20–27.

Csíkos Csaba (2003b): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, 103. 35–55.

Davis, A. (2000): The experimental method in psychology. In: Breakweel, G. M. – Hammond, S. – Fife-Schow, C. (szerk.): *Research method in psychology.* SAGE Publications, London-Thausand Oaks-New Delhi.

Flavell, J. H. (1979): Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34. 906–911.

Kelemen Rita (2004): Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra*, 11. 28–38.

Mevareck, Z. R. – Kramarski, B. (1997): IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, 2. 365–394.

Mevareck, Z. R. – Kramarski, B. (2001): Effects of multilevel versus unilevel metacognitive training on mathematical reasoning. *The Journal of Educational Research*, 5. 292–300.

Mevareck, Z. R. – Kramarski, B. (2003): The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 4. 449–471.

McNeal, B. – Simon, M. A. (2000): Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 18. 475–509.

NAT (1995): *Nemzeti Alaptanterv.* Budapest, Korona Kiadó.

Verschaffel, L. – De Corte, E. (1997): Teaching mathematical modeling and problem-solving in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics*, 28. 577–601.

Verschaffel, L. – De Corte, E. – Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic problems. *Learning and Instruction*, 4. 273–294.

Verschaffel, L. – Greer, B. – De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems.* Swets & Zeitlinger B.V., Lisse.