UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Redes de Ingeniería

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/redes/index
http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.redes.2016.2.a07

REDES DE INGENIERÍA
[Rompiendo las barreras del conocimiento]

ARTÍCULO DE REVISIÓN

Leyes de valoración de redes

Laws of Network Value

Juan MC Larrosa[1]

Para citar este artículo: Larrosa, J. (2016). Leyes de valoración de redes. *Revista Redes de Ingeniería*. 7(2), 183-196. Doi: 10.14483/udistrital.jour.redes.2016.2.a07

Recibido: 18-diciembre-2015 / Aprobado: 27-septiembre-2016

Resumen

La valoración de una red social es un tema que ha sido abordado partiendo de enfoques simplificadores. Se han estipulado diversas leyes de valoración, las cuales mayormente son a-teóricas pero han sido usadas para efectivamente estimar el potencial de valor económico de empresas basadas en redes sociales. Esta revisión destaca los distintos aportes utilizados en la literatura reciente sobre leyes de valoración de redes.

Palabras clave: ley de Metcalfe, ley de Reed, redes sociales, valoración económica.

Abstract

The valuation of a social network is an issue that has been addressed based on simplifying approaches. Various value laws have been stipulated, which are largely atheoretical but have been effectively used to estimate the potential economic value of social network-based firms. This review highlights the various contributions used in the recent literature on networks valuation laws.

Keywords: economic value, Metcalfe's law, Reed's law, social networks.

1. Licenciado en Economía, Universidad Nacional del Sur, Argentina; magíster en Administración, Universidad Nacional del Sur; magíster en Computación Científica, Universidad Nacional del Sur; doctor en Economía, Universidad Nacional del Sur; profesor Adjunto, Universidad Nacional del Sur; investigador adjunto, Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur. Correo electrónico: jlarrosa@criba.edu.ar

INTRODUCCIÓN

El estudio de las redes y su influencia en la vida de los agentes económicos tuvo, sin dudas, un fuerte impulso con el auge de la Internet y las subsecuentes redes sociales digitales que sobre dicha infraestructura se asentaron. En ese sentido, la mega red de comunicaciones ha sido la base de enormes empresas basadas en redes sociales que han conectado a la población humana como ninguna línea de comunicaciones previamente en la historia. Desde su propia creación e incipientes inicios de carácter académico hasta el *boom* netamente comercial de la década de los noventa, la literatura académica y técnica intentó vislumbrar y predecir el alcance de sus efectos en la vida económica.

Así, este trabajo revisará aspectos particulares de dicha literatura. En primer lugar, se prestará atención a los primeros intentos de establecer un valor a las redes a través del uso de conjeturas matemáticas; a lo largo de esta revisión la palabra valor será análoga a la adoptada por la literatura y quedará asociada más a su utilidad que al valor económico y financiero estricto. Una red que genera la adhesión de muchos usuarios cobra un valor económico potencial en sí misma por las implicaciones de gestionar un canal de comunicación, difusión e intercambio entre sus integrantes. En este sentido, [1] representan un ejemplo de esta inicial corriente de literatura. La misma quedó plasmada en el libro de [2] en la cual se apuntan diversas conjeturas sobre aspectos de la economía de redes. Una de las primeras fue acuñada por Sarnoff [3], quien acreditaba una expansión lineal en el valor de una red (de televidentes) a medida que se agregaba un usuario adicional. Otra conjetura más moderna es la denominada ley de Metcalfe [4], que es explorada a través de otra revisión de la literatura puntualmente diseñada para verificar en parte de su validez.

La "ley de Metcalfe" es un criterio heurístico para la valuación de redes según advertimos en el párrafo precedente. La ley toma en cuenta la cantidad de usuarios que una red posee, así como la valuación subjetiva de cada individuo por pertenecer a dicha red. Si cada usuario valora positivamente el hecho de que existan otros usuarios conectados a la red, entonces ello redundará en un valor multiplicativo por el número usuarios existentes (exceptuándose en la valoración a si mismo).[2] Así, puede ser que un usuario representativo asigne un valor a la presencia de otros usuarios hasta los $n - 1$ usuarios del total de la red. De este modo, si denominamos p al valor dado por cada usuario para integrar la red, n al número de usuarios conectados a la misma, la red deberá tener el valor V_{red} que contemple la relación:

$$V_{red} = pn(n-1) = p(n^2 - n) \tag{1}$$

Con lo que quedará establecido que, bajo este criterio, el valor de una red depende en gran medida del cuadrado del número de usuarios conectados a la misma (*ceteris paribus* el valor de asignación p). Ahora bien, ¿por qué podría ser valiosa la presencia de otros usuarios? La presencia de dos externalidades en la red ayudaría a la explicación:

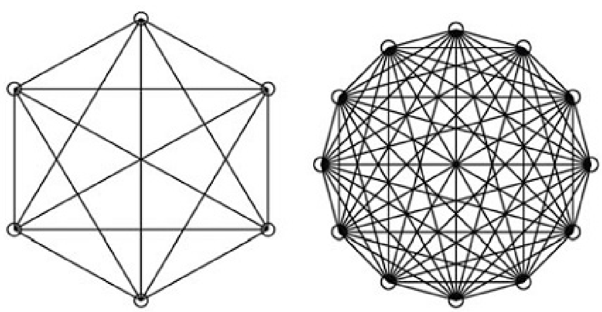
i. el efecto accesibilidad, y
ii. efecto economías de escala.

En el primer caso, los usuarios valoran las redes más numerosas porque tienen mayor cantidad de puntos de acceso a la misma. En el segundo caso, las redes más numerosas permiten el intercambio de información más diversa y a menor costo que en redes más pequeñas. Ambos se confinan para determinar el efecto o externalidad de red.

2. La primera mención de esta "ley" corresponde a una nota publicada en la revista *Forbes* por el periodista George Gilder [5].

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

Diversas leyes populares definen el valor de la red en función del número de nodos como $V(n)=n$ (ley de Sarnoff), $V(n)=n\log n$ (ley de Metcalfe) o $V(n)=n\log n$ (ley de Odlyzko), las que han mostrado cierta correlación con la evidencia empírica. Independientemente de la forma precisa de la relación, todos están de acuerdo sobre el término "efecto de red" conduce a valoraciones diferenciales en las redes. La Figura 1 muestra dos redes, una que es el doble de tamaño que otra en términos de nodos. Las valoraciones de Sarnoff (coincide con el número de nodos), Metcalfe y Odlyzko se presentan en este primer ejemplo observándose las diferencias de escala entre los mismos.



n: 6	*n*: 12
Nodos: 6	Nodos: 12
Enlaces: 15	Enlaces: 66
Valor de Metcalfe = 36	Valor de Metcalfe = 144
Valor de Odlyzko =10,75	Valor de Odlyzko = 29,82

Figura 1. Ejemplo de valoración de redes.

Este ensayo pretende explorar los efectos y el alcance del esquema de Metcalfe para la valoración de redes, así como otras propuestas complementarias realizadas por otros aportes recientes.

LOS LÍMITES DE LA LEY DE METCALFE

La ley de Metcalfe postula que el valor marginal proporcionado a la red por un usuario a todos los demás usuarios es constante, k. Siendo esto así, n-ésimo usuario contribuye un valor para el resto de los usuarios de la red, que es el resultado de su contribución menos la contribución de los otros usuarios, i.e. $k \times (n - 1)\ k \times (n - 2) = k$. Si ahora calculamos la contribución relativa del usuario m-ésimo, donde $m > n$, encontramos que $k \times (m - 1) \times k\ (m - 2) = k$. De hecho, la suposición de que todas las conexiones aportan un valor igual a la de la red es altamente discutible, por al menos dos razones [7]: en primer lugar, debido a que el perfil de los usuarios que se conectan a la red y su aportación de valor no necesariamente tiene que ser siempre el mismo y, en segundo lugar, porque en grandes redes, la posibilidad de la interconexión de un usuario adicional no tiene que ser total. En términos matemáticos, el crecimiento de una red desde n hasta $n + 1$ usuarios significa un aumento en el número total de posibles conexiones de $2n$, el resultado de deducir las posibles conexiones por $n + 1$, i.e. $n \times (n + 1)$, de las posibles conexiones en el punto inicial de n, es decir, $n \times (n - 1)$. Sin embargo, para un usuario individual, el aumento en el número de posibles conexiones en el movimiento desde una red con un tamaño de n a una red con un tamaño de $n + 1$ es 1. Dentro de este contexto, el aumento de una conexión en la red, el tamaño n es tremendamente importante, porque una conexión adicional a una pequeña red no es el mismo que para un nuevo usuario a una gran red.

Como resultado, el valor añadido a la red depende del punto de tiempo en el que se une el usuario adicional y el tamaño de la red. En este sentido, después de un cierto número de usuarios, las externalidades de congestión pueden aparecer debido a que el valor que un usuario adicional se suma a una gran red puede ser negativo, ya que establece límites a las conexiones existentes.

Por otro lado, la Ley de Metcalfe supone que, cuando se fusionan dos redes, el valor de ambos aumenta en la misma cantidad, independientemente de su tamaño inicial. Supongamos que tenemos dos redes, A con n usuarios y con m usuarios B, donde $n > m$. Con la fusión de las dos redes, cada usuario de A descubre que su valor aumenta de forma proporcional al número de nuevas conexiones, m. Por lo tanto, el aumento total en el valor de la red A se establece en proporción a $n \times m$. Siguiendo

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

la misma línea de razonamiento, el aumento total en el valor de la red *B* se establece en proporción a $m \times n$. De esta manera, y con independencia de su tamaño, *A* y *B* aumentarían su valor en la misma proporción. Este resultado, que se encuentra en el corazón del segundo piloto de la Ley de Metcalfe, no explicaría por qué las redes de menor tamaño están dispuestas a pagar para unirse a una red más grande, gracias al aumento relativo en el valor que aporta la fusión.

El esquema de valoración propuesto posee muchos supuestos que, una vez relajados, pueden mostrar otras facetas en la valoración de redes. En ese sentido se pueden anticipar conclusiones respecto a que redes pequeñas, pero más altamente valoradas podrán competir con redes más extendidas y de menor valor. Asimismo, la disminución de valor por dividir a la red en vez de mantenerla grande deja una pérdida por peso muerto de gran costo social. A su vez, la ley de Metcalfe se asienta en el supuesto de valoración lineal interpersonal entre los usuarios. Ello da lugar a algunos resultados poco intuitivos, como el de la paradoja de Varian. Removiendo este supuesto de linealidad se puede llegar a determinar un tamaño de red óptimo. Al final veremos algún aporte que pretende definitivamente *derogar* esta ley.

El valor subjetivo y variable

El valor p asignado a la valoración de la red puede tener diferentes niveles dado que es subjetivo.[3] De este modo, puede ocurrir que exista un valor $p_i < p_j$ tal que se cumpla que

$$V_{red} = p_i\left[n_i\left(n_i - 1\right)\right] = p_j\left[n_j\left(n_j - 1\right)\right] \qquad (2)$$

donde $n_i > n_j$

Estas diferentes valoraciones pueden hacer que usuarios, guiados por sus propias expectativas y preferencias, valoren más pertenecer a una red más cara que pertenecer a una red más numerosa pero menos valorada por ellos mismos. Este brinda alguna explicación a la razón de que exista incentivos por ingresar en clubes de elite (*yacht club* o *golf club*) o actividades de gran prestigio social y diferencialmente caras. Ellos asignan un gran valor *p* a pertenecer a estos clubes o asociaciones, por lo tanto, se requiere de menor cantidad de miembros en esta red para que alcance su masa crítica. En el caso de Internet, puede pensarse en los portales con información financiera en tiempo real, los cuales resultan caros para el usuario promedio, pero pueden mantener la masa crítica de su red con el pequeño de usuarios de alto poder adquisitivo.

Un ejemplo numérico ilustra esta situación. Tenemos dos redes: *A* y *B*. La primera es altamente valorada (P_A = 100) mientras que la segunda tiene un valor mucho menor (P_B = 1). Sin embargo, ambas llegan a la misma valoración individual de red, pero la red *A* solo necesita 35 miembros para ello mientras que la red B requiere 346 miembros. Ello se ilustra en la Figura 2. Es decir, la valoración de la red debe tener en cuenta el precio subjetivo asignado a la misma.

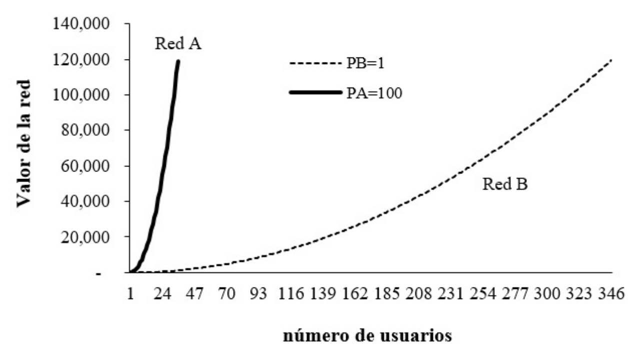


Figura 2. Dos redes, un mismo valor y muchos usuarios de diferencia.

3. Así lo definen [4: 184] "... If the value of single user to a network is $1 for each other user on the network, then a network of size 10 has a total value of roughly $100".

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

¿Qué tipo de red es Internet? ¿Es una red cara (tipo *A*) o una red barata (tipo *B*)? Las cifras de crecimiento de la red muestran un comportamiento más cercano al de *B*. Obsérvese el crecimiento exponencial de año en año en el Figura 3. De todos modos, la ley de Metcalfe recae en dos supuestos implícitos:

1. Cada usuario agrega valor a la red (o al menos su contribución es igual a la contribución marginal por usuario).
2. La habilidad para comunicarse entre los usuarios no es afectada por el ingreso de nuevos usuarios (no hay congestión).

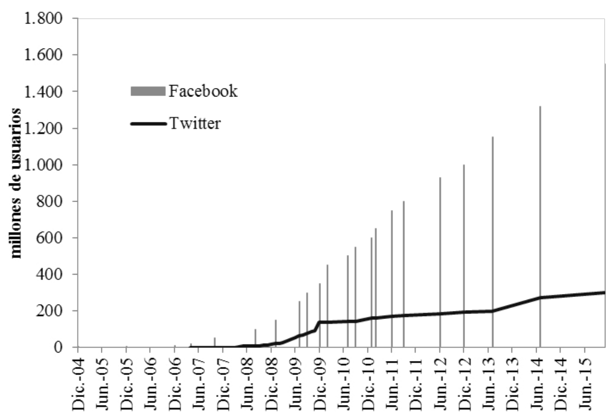


Figura 3. Cantidad de usuarios registrados en Facebook y Twitter

¿Son estos supuestos lo suficientemente sólidos en la realidad? A continuación se repasarán algunas cuestiones críticas de este enfoque.

¿Más usuarios, más información?

Una pregunta relevante es si el valor adicional de cada usuario que se agrega es lineal. [5] estudia el esquema de Metcalfe pero enfocan el caso específico de las visitas a los portales de Internet. Es decir, si los usuarios ingresan a la red para requerir información y lo que se valora es ello, es improbable que cada nuevo ingreso de usuario agregue información adicional a la red. Por el contrario, muy probablemente exista información redundante. Es decir, los nuevos usuarios utilizarán los recursos, pero no aportarán nueva información, con lo que se afectaría el efecto economías de escala. Pero también afectaría el efecto de acceso. Ello porque aparecen problemas de congestión según sea mayor cantidad de usuarios los que entre a la red. A mayor congestión, menor comunicación e intercambio de información. Tomando en cuenta este parámetro, entonces, la ley de Metcalfe se desvirtúa. Llegado a cierto número umbral de usuarios, lo que aporta cada nuevo usuario conectado es negativo.

ASCENSO Y CAÍDA

Las descripciones con abundante evidencia empírica y la fiebre del crecimiento de la Internet han sido destacadas desde sus inicios [7]. Entre las conclusiones más interesantes observadas en esos momentos iniciales del *boom* de Internet se puede resumir que las proyecciones de entrada de nuevos usuarios junto a las necesidades de ancho de banda necesarias para nuevas tecnologías (voz e imagen sobre Internet, por ejemplo) comparados con el crecimiento esperado de la infraestructura hacen prever un probable colapso de la red hacia 2004. Como todo en la Internet, si aumenta lo hace en forma exponencial y si baja lo hace también en forma exponencial. Entonces, los nuevos usuarios ¿harán más valiosa a la Internet?

Algunos autores tan tempranamente [8] ya planteaban problemas respecto a actitudes comerciales de ciertos portales que hacían disminuir el valor de la red. Por ejemplo, *America Online* (AOL) que no permitía usar servicios propios (como *AOL Instant Messenger*) a grandes empresas comerciales de la red, como *Microsoft* o *Yahoo*. Otro ejemplo más llamativo lo daba *Universal Studios* que combatía a quienes querían ligar (establecer un link) sus páginas comerciales y personales con los portales de películas de reciente estreno. Es decir, la misma conducta de las empresas dificulta la accesibilidad

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

total a toda la red. Ahora, ¿qué pasa si estas conductas comerciales se llevan a un extremo? Es decir, si se subdivide una red muy grande en pequeñas redes aisladas. Nielsen propone que si se parte una red muy grande en *N* componentes desconectados, considerando *p* = 1, entonces el valor de esa subred será (siguiendo con la ley de Metcalfe) de

$$V_{subred} = \frac{1}{N \cdot (N-1)} = \frac{1}{N^2 - N} \qquad (3)$$

Existiendo N subredes en la partición, nos queda

$$V_{N\ subredes} = \frac{N}{N^2 - N} = \frac{1}{N-1} \qquad (4)$$

Es decir, se pierde casi la inversa del valor de la red original al dividirla en *N* subredes más pequeñas. Aquí claramente se observa que cuando crece la red, los efectos de retroalimentación impulsan en forma cuadrática su valoración, pero la partición de la misma la afecta en tantas veces estas se haya fraccionado. Es decir, de una red que vale n^2 nos quedamos una suma de redes que en total valen *1/n*. Nótese que de aquí se puede derivar el valor de la externalidad de red como la diferencia del valor de una red enteramente conectada con el valor de todas las subredes aisladas:

$$V_{ext} = n^2 - \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Lo cual representa la diferencia entre una función cuadrática creciente y una curva exponencial decreciente de orden 1. El diferencial es una cuadrática más suave que el primer exponente de la ecuación como se observa en la Figura 4, lo que nos habla nuevamente de los factores de retroalimentación positiva vigentes en las economías de red. Si se divide la red, el valor de la externalidad puede considerarse una pérdida por peso muerto (nadie se apropia de ella).

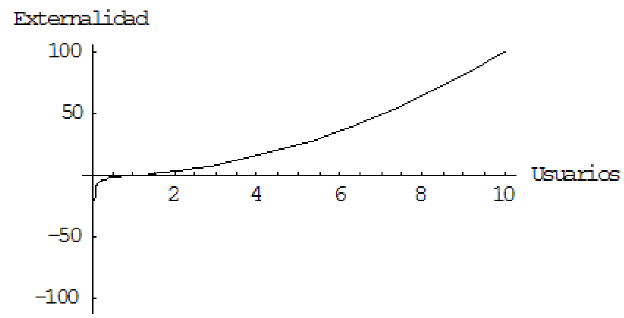


Figura 4. Valor de la externalidad según aumenta el número de usuarios.

ESTRATEGIAS DE INTERCONEXIÓN Y LA PARADOJA DE VARIAN

Una paradoja se plantea cuando las redes se desconectan. [10] plantea otra estrategia de valoración de redes. Utilizando el esquema de Metcalfe, describe una estrategia que puede llevar a crear subredes, pero solo temporalmente. Como ya se mencionó, el valor de las redes crece por la presencia de externalidades de red, es decir que el valor de un bien crece a medida que existen más usuarios del mismo. Para ello, en el caso de las redes de intercomunicación, se requiere que exista una interconexión abierta para las mismas. Es decir, que sea relativamente fácil para los usuarios acceder a los servicios de la red. A medida que más se interconecten, mayor valor tendrá esta infraestructura.

Ahora bien, también habrá mayores incentivos para quienes deseen dividir sus redes para luego venderlas individualmente a un precio mayor. Si en el periodo *t* la red vale *n* y en *t+1* vale n^2, yo puedo mantener dividida mi red en *t* y luego venderla al precio mayor en *t+1* (una especie de arbitraje). Como describe Varian, si la torta crece todos tendrán mayores beneficios, pero también serán más valiosas las *amenazas* de falta de conectividad. Aquí entra en juego el comportamiento estratégico de los agentes. Una comparación

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

de los beneficios de esta estrategia puede verse a continuación. Supongamos que tenemos dos redes *A* y *B* valoradas por la ley de Metcalfe, tal como se presentó en el punto 2.1. Supongamos también que ahora existe un precio uniforme $p_A = p_B = 1$ y la red *B* > red *A*. Si ambas desean interconectarse ¿cómo cambiará el valor de las mismas? Algebraicamente sería:

$$\begin{aligned} \Delta V_A &= n_1 \cdot (n_1 + n_2) - n_1^2 = n_1^2 + n_1 n_2 - n_1^2 = n_1 n_2 \\ \Delta V_B &= n_2 \cdot (n_1 + n_2) - n_2^2 = n_2^2 + n_1 n_2 - n_2^2 = n_1 n_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Es decir, la interconexión voluntaria lleva a que ambas redes obtengan el mismo beneficio. Pero la red *B* era mucho más grande que la red *A*. En ese sentido, los usuarios de la red *A* debieron ganar mucho más de la interconexión que los de la *B*, quienes solo agregaron unos pocos usuarios a su ya numerosa red. Ello muestra, por un lado, por qué son comunes los acuerdos de interconexión gratuitos dentro de la red pero deja algún punto de duda, por la contrariedad de la deducción, tema que se aclarará en la siguiente sección. De todos modos, ambos ganan bajo este acuerdo y las ganancias son repartidas igualitariamente dentro de redes de tamaño diferente. Resulta una paradoja que *todos* quieran acuerdos de conexión gratuita, pero quienes más ganen, en realidad, serán los usuarios de redes más pequeñas.

Se puede enfrentar esta paradoja con el ejemplo de una compra de red, en vez de una interconexión gratuita. Supongamos que la red *A* compra por su valor individual a la red *B*, en vez de fijar un acuerdo de interconexión libre. Entonces, algebraicamente quedaría:

$$\Delta V_{A+B} = (n_1 + n_2)^2 - n_1^2 - n_2^2 = 2 n_1 n_2 \tag{7}$$

Es decir, comprando la red A obtendría el doble de valor que acordando un acuerdo de interconexión gratuita. Es por ello que se hace valiosa la amenaza de interconexión. Ello provoca que la red más pequeña deba ser comprada o fusionada con la más grande, lo que redunda en mayores beneficiosos para esta. Según sea más grande el poder de negociación de la red, mayor será la amenaza de no conectividad.

Sobre el valor decreciente

Una manera muy simple de refutar el modelo de Varian anteriormente expuesto es el de variar algunos supuestos iniciales. Suponer la vigencia de la ley de Metcalfe implica suponer que el valor que uno le da a la otra gente en la red se puede modelar como una función lineal. Es decir, si yo entro en un chat determinado, yo valoro a cada uno de los que están en dicho salón en este momento y todos valoran del mismo modo mi asistencia y la presencia de los otros. Sin embargo, está claro que todos no podemos ponernos a charlar con todos; la falta de entendimiento ante dicho evento quedaría más allá de la capacidad de retención y procesamiento de nuestro cerebro. Ello provocaría pérdidas de utilidad. Entonces, al parecer, no valoramos la presencia de otros asignando valores iguales (linealmente).

Cuando consideramos valoraciones lineales ocurre la paradoja descrita por Varian en el punto anterior. Es decir, la adquisición de una red más pequeña por una más grande da la misma ganancia a ambos, cuando en realidad la más beneficiada ha sido la red pequeña. Pongamos un ejemplo numérico: la red *A* tiene 36 usuarios y la red *B* tiene 64 usuarios. La valoración individual por la ley de Metcalfe siendo $p_0 = p_1 = 1$, sería:

$$\begin{aligned} V_{\text{Red B}} &= 36 \times (36\text{-}1) = 1.260 \\ V_{\text{Red B}} &= 64 \times (64\text{-}1) = 4.032 \end{aligned}$$

Uniendo ambas redes y por (7) obtenemos que las redes *A* y *B* dentro de la nueva red (A+B) valdrían:

$$\begin{aligned} V_B^{A+B} &= 36 \times (100\text{-}1) = 3.564 \\ V_B^{A+B} &= 64 \times (100\text{-}1) = 6.336 \end{aligned}$$

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

Obsérvese que ambas ganaron por su ingreso lo mismo dado que

$$V_B^{A+B} - V_{\text{Red B}} = V_B^{A+B} - V_{\text{Red B}} = 3.564 - 1.260 = 6.336 - 4.032 = 2.304$$

Es decir, no importa el tamaño de tu red, ambas ganarán lo mismo por la fusión. Sin embargo, la red *A* creció en valor más de un 180% con respecto al original mientras que la red *B* solo lo hizo en casi un 60%. Nuevamente, y como era de esperar, volvemos a la paradoja de Varian. Ahora podemos cambiar los supuestos para realizar un ejemplo más intuitivo. Se propone romper con el esquema de valoración lineal y se sugiere algún esquema con rendimientos decrecientes, por ejemplo, una función logística. Para simplificar, supongamos que los usuarios de una red valoran a la raíz cuadrada del número de usuarios de la red. Rescribamos los ejemplos anteriores:

$$V_{\text{Red B}} = 36 \times (\sqrt{36} - 1) = 180$$
$$V_{\text{Red A}} = 64 \times (\sqrt{64} - 1) = 448$$

Uniendo nuevamente ambas redes y por (7) obtenemos que las redes A y B dentro de la nueva red (A + B) valdrían

$$V_B^{A+B} = 36 \times (\sqrt{100} - 1) = 324$$
$$V_A^{A+B} = 64 \times (\sqrt{100} - 1) = 576$$

Obsérvese que ahora las ganancias son diferentes dado que:

$$V_B^{A+B} - V_{\text{Red B}} = 324 - 180 = 144$$
$$V_B^{A+B} - V_{\text{Red B}} = 576 - 448 = 128$$

Este resultado se ajusta más a la intuición. Ahora quien gana más por la interconexión es la red pequeña *A*. Entonces, a partir de esta pequeña evidencia, se podría reformar la ley de Metcalfe teniendo en cuenta esta relación decreciente de valoración por los nuevos ingresantes a la red. Asimismo, esta convexidad agregada al modelo permitiría deducir un tamaño de red finito.

TAMAÑO DE RED ÓPTIMO

Esta sección se focaliza en el valor añadido por ser miembro de una red. Se toman en cuenta distintos costos de congestión que pueden aparecer. Proponemos plantear el modelo básico de valoración de Metcalfe del siguiente modo. Considere la red *i* con n_i usuarios y definamos A_i como el grado de monetización que se ha obtenido por el desarrollo de la red. Esto difiere del valor *p* analizado en el punto 2.1. Allí, *p* refiere a un valor que un usuario le asigna a la presencia de otros mientras que aquí, A_i representa cuanto están dispuestos a pagar otros agentes por cada usuario que se posee en la red. Suponiendo costo fijo C_i para la red y aceptando como una simplificación en el álgebra, lo que no quita validez a los resultados finales, que solo consideremos al cuadrado de los usuarios ($n_i \times n_i$), entonces habría que maximizar la función (8) para averiguar qué tamaño de red sería el óptimo:

$$\underset{n_i}{Máx} \quad V_i = A_i \left(n_i \times n_i \right) - C \tag{8}$$

La cual da un máximo que depende positivamente del tamaño de la red. A mayor cantidad de agentes siempre habrá mayor valor. Ello no representa un resultado que pueda decir mucho acerca del tamaño óptimo de la red. En un mundo de rendimientos crecientes no hay límite superior.

Ahora, supongamos que los usuarios valoran decrecientemente la presencia de nuevos ingresantes a la red. Es decir, los costos son crecientes según aumente el número de usuarios. Entonces sumamos el componente de costo variable Bi y la función quedaría así:

$$V_i = A_i n_i^2 - C_i - B_i n_i^3 \tag{9}$$

ahora veremos cómo ello afecta al tamaño de la red. Derivando (9) con respecto a ni nos queda:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} = \frac{\partial \left(A_i n_i^2 - C_i - B_i n_i^3 \right)}{\partial n_i} = 2 A_i n_i - 3 B_i n_i^2 = 0 \tag{10}$$

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

$$\{n_i = 0\}, \left\{n_i = \frac{2A_i}{3B_i}\right\}$$

Aquí el tamaño de la red sería cero (dado que nadie va a empezar una red siendo que cuesta más de que lo que gana) o dependería directamente del doble del grado de monetización de la red e inversamente del triple del costo fijo de cada nuevo usuario ingresando a la red. Supongamos que A_i = 1, es decir que logramos hacer valer a cada usuario conectado a la red, y B_i = 0.0125, es decir que cada nuevo usuario nos cuesta 1,25 centavos, el tamaño óptimo de esa red sería de 53 individuos aproximadamente. En realidad, debiera contemplarse a B_i como una función fractal, con valores cercanos a cero cuando la red no encuentre congestión y saltos a valores positivos altos cuando el número de usuarios de la red fuese tan grande que la congestión empeorara las posibilidades de conexión de todos (que es en ese punto en donde empezaría la región de desutilidad por el ingreso de nuevos usuarios). Muy rudimentariamente y sin mayores *fundamentals* se plantea este primer ejemplo de un tamaño óptimo de red. Veamos una explicación para llenar más claramente de información este resultado tan simple.

[5] sugieren el siguiente esquema. Supongamos que los usuarios pueden ser diferenciados a lo largo de un simple eje $0 \leq \vartheta \leq 1$ y que la densidad de cada tipo de usuario está dada por $f(\vartheta,t)$. Supóngase también que la Web entre los usuarios está representada por la función de densidad $f(\vartheta,t)$ dado que el usuario de tipo ϑ va a empezar a usar la Web en el periodo t. Entonces la curva condicional de difusión, que describe la cantidad de usuarios del tipo ϑ que han empezado a usar la Web en o previo al periodo t^*, está dada por:

$$F(\vartheta,t) = \int_{-\infty}^{t^*} f(\vartheta,t)\,dt \qquad (1)$$

mientras que la curva de difusión agregada, que describe el número total de individuos que han adoptado la red en o antes de t^* está dado por:

$$N(t^*) = \int_{-\infty}^{t^*}\int_{0}^{t} m(\vartheta) f(\vartheta,t)\,d\vartheta\,dt \qquad (12)$$

Como se sugirió previamente, es muy improbable un usuario visite todas las páginas entonces el supuesto (1) de la sección 2.1 de la ley de Metcalfe no se verificará. Por ello se expresa una nueva función $g(\theta,\vartheta)$ la cual describe la probabilidad que un usuario del tipo θ vaya a tener de examinar una página de un usuario de tipo ϑ. Suponiendo que la utilidad total para un usuario de tipo θ es proporcional al número de páginas que ella visita, la utilidad en el momento t^* va a ser:

$$u(\theta,t^*) = \int_{-\infty}^{t^*}\int_{0}^{t} m(\vartheta) g(\theta,\vartheta) f(\vartheta,t)\,d\vartheta\,dt \qquad (13)$$

Observando las ecuaciones (12) y (13) vemos que en general $u(\theta,t^*)/N(t^*)$ no es independiente de t^*. El tamaño de la red afecta la utilidad de cada usuario. Buscando una forma funcional de la utilidad que verifique que un usuario visite todas las páginas de Internet de otro tipo de usuario, Swann (1998) encuentra que la función de utilidad de un usuario debiera tener una forma de *S* del tamaño total de la red, es decir, debiera ser de tipo logística. Supongamos que:

$$F(\vartheta,t) = \frac{e^{\vartheta+t^*}}{1+e^{\vartheta+t^*}} \qquad (14)$$

donde al mismo tiempo se verifica que $g(\vartheta,\theta)$ declina exponencialmente con el cuadrado de la diferencia entre ϑ y θ.

$$g(\vartheta,\theta) = g_0 e^{-(\theta-\vartheta)^2} \qquad (15)$$

donde g_0 representa la probabilidad que de algún usuario quiera consultar la página de algún usuario que es idéntico a él.

Si bien las expresiones de *u* no pueden ser integradas explícitamente cuando *F* (.) y *g* (.) toman esos valores particulares si se puede aproximar una solución numérica. La Figura 5 determina la relación entre $0 \leq \theta \leq 1$ para tres valores de θ : 1, 0.5 y 0.

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

Dado que $0 \leq \theta \leq 1$, estos valores representan entonces al usuario pionero, al adoptante mediano y al adoptante rezagado.

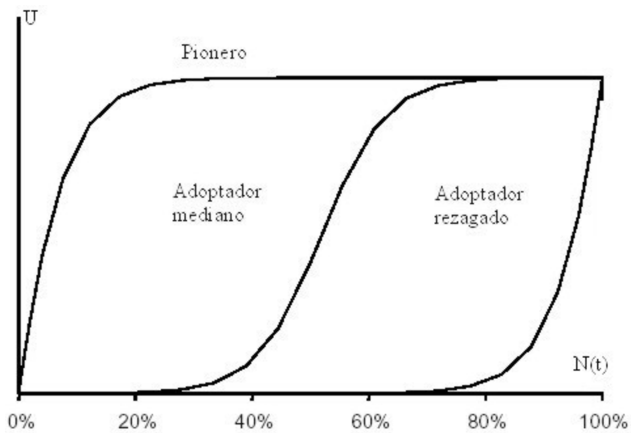


Figura 5. Extensión de la red y utilidad.

El adoptante mediano tiene una función de utilidad con forma de *S*. Cuando la red es chica, solo contiene miembros de la clase "pionera" (con alto θ) por lo que los usuarios medianos no les resulta tan interesante ingresar en ella. Cuando algunos adoptadores medianos empiezan a utilizar los servicios de esta red la utilidad se dispara hasta que el número de ingresantes ya es muy alto. Aquí entran los adoptadores rezagados quienes por una mayor aversión al riesgo solo se asocian a la red cuando casi todos lo han hecho. Con estos nuevos miembros los usuarios medianos no incrementan en mucho su utilidad.

Supongamos ahora que existen costos de congestión. Ahora maximizaremos el beneficio de usar la Web, *J*, sujeto a un costo en relación directa con la cantidad de usuarios.

$$J(\theta, N) = u(\theta, N) - C(N) \qquad (16)$$

donde *u*(.) describe la función de utilidad (medida en dinero) mientras que *C*(.) describe como el costo de usar la red varía a medida que ingresan nuevos usuarios. Hay dos tipos principales de costos de congestión que se pueden analizar. El primer costo está asociado al refinamiento en la búsqueda la información precisa que se busca. Los usuarios deben tantear muchas páginas de la red para encontrar la información precisa que desean. Tres costos, a su vez, componen este costo:

a. A medida que hay más adoptadores de la Web, más que proporcionalmente se incrementa el número de sitios de red a visitar, dado que cada sitio se compone de mayor cantidad de páginas a su vez. Por ello, se supone que hay un coeficiente promedio de páginas nuevas que ingresan a la Web en razón del número de usuarios: ωN .
b. A medida que crece la red también crecen los cruces entre enlaces de cada página con lo que un buscador debe incrementar más las búsquedas dentro de cada sitio de la red. Ahora, un costo adicional aparece en forma de ϖN .
c. El uso de palabras clave dentro de los encabezados de las páginas web se hace cada vez más complejo dado que cada página si quiere ser encontrada debe describir con mayor precisión qué ofrece. Sin embargo, muchas páginas obtendrán la misma palabra clave. A medida que la red crece, crece también la solicitud de las páginas con palabras claves populares (congestión). Esto también supondremos es un costo adicional del tipo ϖN .

Supongamos que existe una tecnología determinada que ayude a la búsqueda de información en Internet. Esa tecnología, medida en porcentaje de éxito en búsqueda de un sitio preciso por parte del usuario, la definiremos como S. Entonces la búsqueda de información en Internet será determinada por

$$C_S(N) = C_1 \frac{\omega \sigma \varpi N^3}{S} \qquad (17)$$

donde C_1 es el costo por unidad de tiempo invertido en la búsqueda.

Otro costo es el costo de descargar (*download*) información desde la red, la cual se puede tornar

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

en prolongado cuando la red esta congestionada. Primero distingamos dos situaciones de la red. La N^{sat} es la situación de saturación de la red, es decir, el congestionamiento es tan alto que no se puede acceder a ningún sitio.[4] La curva de carga de la red entonces determina al costo de retraso y tiene la siguiente forma:

$$C_R(N) = C_2\left(N^{sat} - N\right)^{-k} \tag{18}$$

siendo $k \geq 1$ una constante. A medida que N tiende a N^{sat} la red "se cuelga" y no brinda más información a nadie.

Ahora reformulamos (16) de modo que

$$\begin{gathered} J(\theta, N) = u(\theta, N) - C_S(N) - C_R(N) \\ J(\theta, N) = u(\theta, N) - C_1 \frac{\omega\sigma\varpi N^3}{S} - \frac{C_2}{\left(N^{sat} - N\right)^k} \end{gathered} \tag{19}$$

La mejor manera de obtener información de esta ecuación es a través de ejercicios numéricos. Así, para facilitar el tratamiento, empecemos por determinar un costo predominante. Supongamos que la red se mantiene estable en tamaño y debemos trabajar con los costos de búsqueda como principal problema. Allí nos conviene mejorar la tecnología de búsqueda que es la herramienta a mano que tenemos en este modelo. Graficando esta función en términos de la variar el valor del parámetro tecnológico S veremos tal vez el gráfico más interesante. En la Figura 6 vemos como el incremento del S (la tecnología de búsqueda de información en Internet) beneficia a los usuarios a pesar de que crezca el tamaño de la red. En ese sentido opera, por ejemplo, la creciente eficiencia de los sitios de búsqueda de información como Google.

Supongamos ahora que el otro costo es el dominante. Si el costo de retraso se hace dominante (se mantiene constante la tecnología de búsqueda) nos puede quedar un gráfico como el de la Figura 7. A medida que exista inversión en infraestructura de red que sostenga niveles de saturación cada vez mayores en la red, habrá una utilidad mayor asociada a ello.

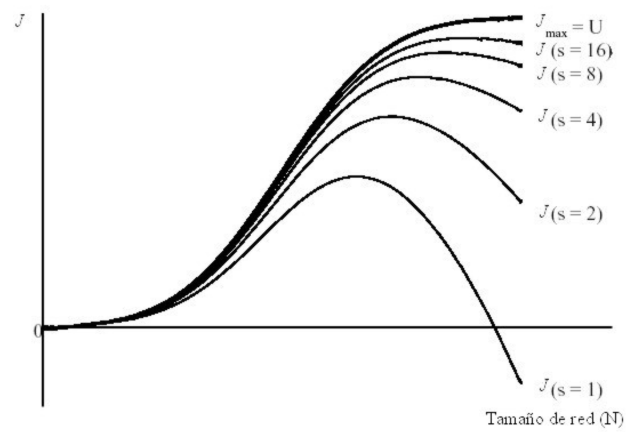


Figura 6. Tecnología de buscador y tamaño de red.

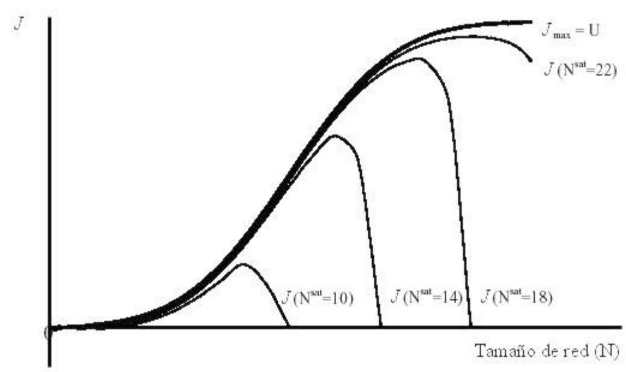


Figura 7. Crecimiento del nivel de saturación de la red y tamaño de red.

Funciones decrecientes y explosivas

Finalmente, [11] inician, según ellos, el proceso de derogación de la ley de Metcalfe. Efectivamente analizan la ley de Metcalfe y otras pseudo-leyes de valoración de redes como las de Sarnoff y Reed,

4. El 11 de septiembre de 2001 varios sitios de Internet entraron precisamente en este estado (http://CNN.com especialmente).

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

atacándolas en su supuesto de valoración equiproporcional para todos los agentes que ingresan. Citando gran parte de los ejemplos de esta sección más otros establecen que la mejor forma funcional que relaciona el valor de una red y la cantidad de sus miembros es el logaritmo basados en la ley de Zipf.

La ley de Zipf es una ley empírica propuesta originalmente para la distribución de palabras en un texto grande y afirma que, dado algún corpus de enunciados del lenguaje natural, la frecuencia de cualquier palabra es inversamente proporcional a su posición en la tabla de frecuencias. La palabra más frecuente se reproducirá aproximadamente el doble en términos de frecuencia respecto a la segunda palabra más frecuente, que ocurre dos veces tan a menudo como la cuarta palabra más frecuente y así. En el contexto de la red, si el valor del elemento más importante para el usuario *A* se toma como proporcional a 1; la del segundo miembro más importante es proporcional a ½, y así sucesivamente. Para una red que tiene *n* miembros, este valor para el usuario *A* será proporcional a 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1 / (*n* – 1), el cual se aproxima a *log n*. Teniendo en cuenta que el número de usuarios es *n*, el valor total de la red es proporcional a *n log n*.

Es decir, que (1) debiera ser en realidad:

$$V_{red} = pn\log(n-1) \qquad (20)$$

Las justificaciones surgen desde paralelismos con muchas otras leyes observadas en diferentes campos de las Ciencias (la mencionada ley de Zipf, la ley de Bradford, entre tantas otras reglas heurísticas para determinar un valor ateórico a algún bien) referidas a procesos de difusión. Las consideraciones más puntuales acerca de la mejor aproximación de esta forma funcional recaen, nuevamente, en la paradoja de Varian y las fusiones de redes. Al igual que el ejemplo expuesto anteriormente, los usuarios de una red grande poco ganan por fusionarse con los de una red más pequeña.

Otra ley mencionada de valoración de redes es la ley de Reed [12] que reconoce el valor de los grupos dentro de una red, no solo los pares conectados, por lo que un grupo de cuatro personas podría además de forman parejas, también grupos de tres o incluso el superconjunto de las cuatro personas. La adición en los cuatro grupos de tres, más la totalidad del grupo de cuatro, hace que todos los conjuntos sean iguales a $2^N - n - 1$, lo que se aproxima como proporcional a 2^N.

$$V_{red} = 2^n - n - 1 \qquad (21)$$

Esta forma de valuación de redes, que aprecia enormemente la participación en grupos o cluster de usuarios, es todavía más incremental que el de Metcalfe. La ley de Reed representa entonces el caso más extremo en la valoración de las interconexiones en una red.

Finalmente, contribuciones recientes como [13] destacan el valor de la exclusión de pertenecer a una red. En ese sentido, la exclusión es medida como la diferencia entre el valor de la ley de Metcalfe comparado con el grado de conectividad actualmente observado. Esa diferencia implica una pérdida de bienestar de quienes no están conectados pudiéndolo estar.

CONCLUSIONES

La valoración de redes de interconexión resulta un tema siempre actual [14]. El esfuerzo inicial de Metcalfe es completamente válido en tanto la red posea ciertas dimensiones y respete supuestos limitados. Una vez que esta crece deben considerarse restricciones a la utilidad de los ya conectados por el ingreso de nuevos adherentes. En general los procesos lineales no explican bien el comportamiento de estructuras sujetas a externalidades de redes. Sin embargo, la explosividad de crecimiento de un exponencial segundo también puede exceder la explicación real de un evento. Las variables crecen o decrecen exponencialmente. Las pérdidas por no

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

dejar expandir la interconexión a la red son pérdidas sociales que deben tenerse en cuenta. Asimismo, la desutilidad provocada por la excesiva expansión de una red en relación con la calidad del servicio (congestión) hace disminuir el valor de la red para los usuarios [15]. Entonces, un criterio de determinación del tamaño óptimo de red debiera considerar tanto la valoración por los nuevos ingresantes como los costos que ello genera a los demás usuarios. Cuando ello se considera, un modelo de expansión de la red si permite mantener la ley de Metcalfe a través del mejoramiento de la tecnología algorítmica para la búsqueda de información y de la inversión en infraestructura que sostenga la entrada creciente de nuevos usuarios. Esta es una de las tantas razones por la que Internet no ha colapsado todavía y dista de preverse un futuro así.

Aún más, estas valoraciones carecen en general de una profunda raíz justificación teórica por lo que modelos de valuación económica de empresas debieran ser utilizados para un análisis más técnico de las redes. En cualquier caso, han sido utilizadas como una primera aproximación al valor que una red debiera tener, aunque sea como hipótesis de máxima.

Finalmente, aportes muy recientes empiezan a refutar el supuesto de igual valoración de todos los agentes incluidos en una red con abundante evidencia. Así, si dicha valoración toma una forma logarítmica entonces muchas observaciones de la realidad con respecto al hecho que muchos ISP grandes no desean conectarse con redes más pequeñas quedan justificadas y la ley de Metcalfe en su definición inicial queda desacreditada. Ello no deja de ser un primer intento para entender todo el proceso complejo de valorar las redes sociales y, sobre todo, las empresas que tienen como modelo negocios operar sobre estas (como Facebook o Twitter).

REFERENCIAS

[1] P. Key y D. R. McAuley, “Differential Quality of Service and Pricing in Networks: where flow-control meets game theory”. *Institute of Electrical Engineering Proceedings Software* 146, No. 2, 1999.

[2] C. Shapiro y H. Varian, *Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy*, Cambridge: Harvard Business Press, 1999.

[3] E. Pirić, M. Bajrić and H. Bajrić, “Laws of network's values and values of its users”. 38th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, pp. 1481-1485, 2015.

[4] R. Metcalfe,“Metcalfe’s Law”. *InfoWorld*, October 2, 1995, [En línea] Disponible en: http://www.infoworld.com

[5] G. Gilder, “Metcalfe’s Law and Legacy”. *Forbes ASAP*, Sept. 13, 1993.

[6] B. Briscoe, A. Odlyzko and B. Tilly, “Metcalfe's Law is Wrong”. IEEE Spectrum, July 2006, pp. 26-31 [En línea] Disponible en: http://www.spectrum.ieee.org/jul06/4109

[7] P. Windrum y G.M.P. Swann, “Networks, Noise, and Web Navigation: Sustaining Metcalfe’s Law through Technological Innovation”. MERIT Working Paper 2/99-009, 1999.

[8] K.G. Coffmann y A. Odlyzko, “The Size and Growth Rate of Internet”. *First Monday* Issue **3** (10), [En línea] Disponible en: http://www.firstmonday.dk/issues/issue3_10/coffman/

[9] J. Nielsen, “Metcalfe's Law in Reverse”. Alertbox, July 25, 1999, [En línea] Disponible en: http://www.nngroup.com/articles/metcalfes-law-in-reverse/

[10] H. Varian, “Market Structure in the Network Age”. Publicado en Understanding the Digital Economy Conference, Department of Commerce, MIT Press: Cambridge, MA, pp. 137-150, 1999.

[11] A.M. Odlyzko y B. Tilly, “A refutation of Metcalfe’s Law and a better estimate for the value of networks and network interconnections”. Manuscrito. University of Minnesota, 2005, [En línea] Disponible en: http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/metcalfe.pdf

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196

[12] Reed, D.P., “The Law of the Pack”. *Harvard Business Review* (February), pp. 23–24, 2001.

[13] R. Tongia y E.J. Wilson, “The Flip Side of Metcalfe’s Law: Multiple and Growing Costs of Network Exclusion”. *International Journal of Communications* 5, pp. 665-681, 2011. [En línea] Disponible en: http://ijoc.org/index.php/ijoc/article/view/873/549

[14] J. Weinmann, “Is Metcalfe’s Law Way Too Optimistic?”. *Business Communications Review* 37 (8), pp. 18-27, 2007.

[15] J.C. Franklin, M. Manelli and R. Pay “Measuring the value of online communities”. *Journal of Business Strategy* 35(1): 29-42, 2014.

ISSN: 2248–762X • Vol. 7, No. 2 (julio-diciembre 2016). pp. 183-196