VIBRACIÓN EN MEMBRANAS

VIBRATION OF MEMBRANES

Iván René Roa González
Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Resumen
En este trabajo presentamos una descripción de cómo y porque ocurre la vibración de membranas como aporte didáctica a la enseñanza de la física. Muchas personas han percibido en su cotidianidad eventos como por ejemplo el movimiento de la rama de un árbol a causa de su interacción con el viento y se interrogaron sobre el ¿por qué la rama no se rompe de inmediato al ser "golpeada" por aire móvil?, esto se debe a una propiedad que tienen los cuerpos denominada elasticidad, entonces surge la pregunta ¿qué es la elasticidad? Intentamos dar respuesta a estas preguntas.
Palabras clave: Sonido, vibración, enseñanza de la física

Abstract
In this paper we present a description of how and why vibration of membranes occurs, as a didactic contribution in physics teaching. Many people have perceived events in their daily such as the movement of the tree branch because of their interaction with the wind and then wondered why the branch does not break immediately upon being hit by moving air?, this is due to a bodies property called elasticity, then the question arises what is elasticity? We try to response these questions.
Keywords: Sound, vibration, physics teaching.

Definición tipo diccionario 1 : Se dice que un cuerpo tiene cierto grado de elasticidad, cuando al ser deformado por tensión, compresión, torsión o alguna posible combinación entre estas, puede regresar a su estado original sin presentar ruptura, fisuras o un cambio permanente en su geometría (si es que la tiene).

Pero una definición no debe ser la solución a una pregunta apenas debe servir de base, si es que se quiere comprender el fenómeno; por eso es necesario hacer hincapié en aspectos fundamentales para tener una clara visión.

- Pero ¿Como saber si "algo" tiene cierto grado de elasticidad?

¿Cual debería ser el primer paso a tomar?

Si usted como lector lo medita un poco dirá algo como: se necesita conocer que se va a medir y por ende determinar sus fronteras, es decir, se debe establecer que es aquello a quien en un comienzo se denominó "algo", y delimitarlo. En palabras de físico hay que determinar el sistema a estudiar.

Al tener una noción sobre la segunda pregunta, el paso a seguir es dar respuesta a la pregunta inicial:

Si hasta el momento ha prestado atención a la lectura, puede inferir con facilidad que al someter a un sistema cualquiera a tensión, compresión, torsión o alguna posible combinación entre estas, y si este puede regresar a su estado original sin presentar ruptura, fisuras o un cambio permanente en su geometría (si es que la tiene) el sistema es elastico; y en verdad esta es la respuesta dada por la definición tipo dicccionario 1.

En resumen si usted usted como lector, nunca habia tenido contacto explicito con el tema se ha expuesto algo trivial, y se retomara rapidamente con un ejemplo: su experiencia le dice que un resorte es elástico y si ahora le sujeta una masa y quiere saber si el sistema masa + resorte es elástico tiene que sacar al sistema de aquel estado en que se encuentra, y para esto debe interactuar con él, ejerciendo una acción sobre esté; (digamos si el resorte esta atado de un extremo al techo y del otro pende la masa, puede halar está y sabe que algún tiempo después su sistema estara igual a como se encontraba antes que usted interactuara con él). Bien esto no quiere decir que solo sirva para este caso, solo que es un evento cotidiano altamente sencillo de visualizar; no quiero que esta lectura se convierta en algo aburrido ya que podría llegar apensar que nos estamos alejando del tema principal, pero no es así, porque el objetivo de este artículo es estudiar que pasa con un sistema al ser perturbado es decir cuando se le saca del equilibrio[1], estado en el cual dicho sistema esta inerte (no interactua de nunguna manera con el medio circundante), en otras palabras se quiere indagar sobre lo que ocurre desde el momento de la perturbación hasta el instante en que vuelve a su posición original. Solo que no se estudiaran todos los sistemas se indagara sobre un tipo muy especial, uno en el cual las partículas materiales que componen dicho sistema se desplazan transversalmente a la dirección en que se propaga la oscilación.

Para comenzar con el desarrollo de la tematica se tomara un caso donde el número de partículas que oscila es finito (númerable), es decir se describira el comportamiento de un sistema discreto compuesto por $N+1$ masas de las cuales N de ellas pueden moverse, esto debido a que todas estan unidas a una cuerda con extremos fijos, lo ual restringe el movimiento de la partícula 0 y de la $N+1$. además se postula que dicha cuerda es elastica y su masa es despreciable.

Si, este arreglo se perturba se pruduce una deformación inicial, mostrada por la *Figura i* . Ahora lo que se quiere conocer, es como dicho sistema evoluciona en el tiempo.

Por último, y antes de comenzar con estudio del sistema se anota que cada una de las constituyentes del sistema debe cumplir debe con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} &y_J(0)=A_J \\ &\dot{y}_J(0)=0 \end{aligned} \quad (1)$$

Las cuales estipulan que:

1. En instante de tiempo $t=0$ cada partícula se habra desplazado A unidades respecto al equilibrio (cada partícula tiene una amplitud inicial)
2. La rapidez de cada partícula en el tiempo $t=0$ es nula

[1] este estado en física se conoce con el nombre de: estado de minima energía

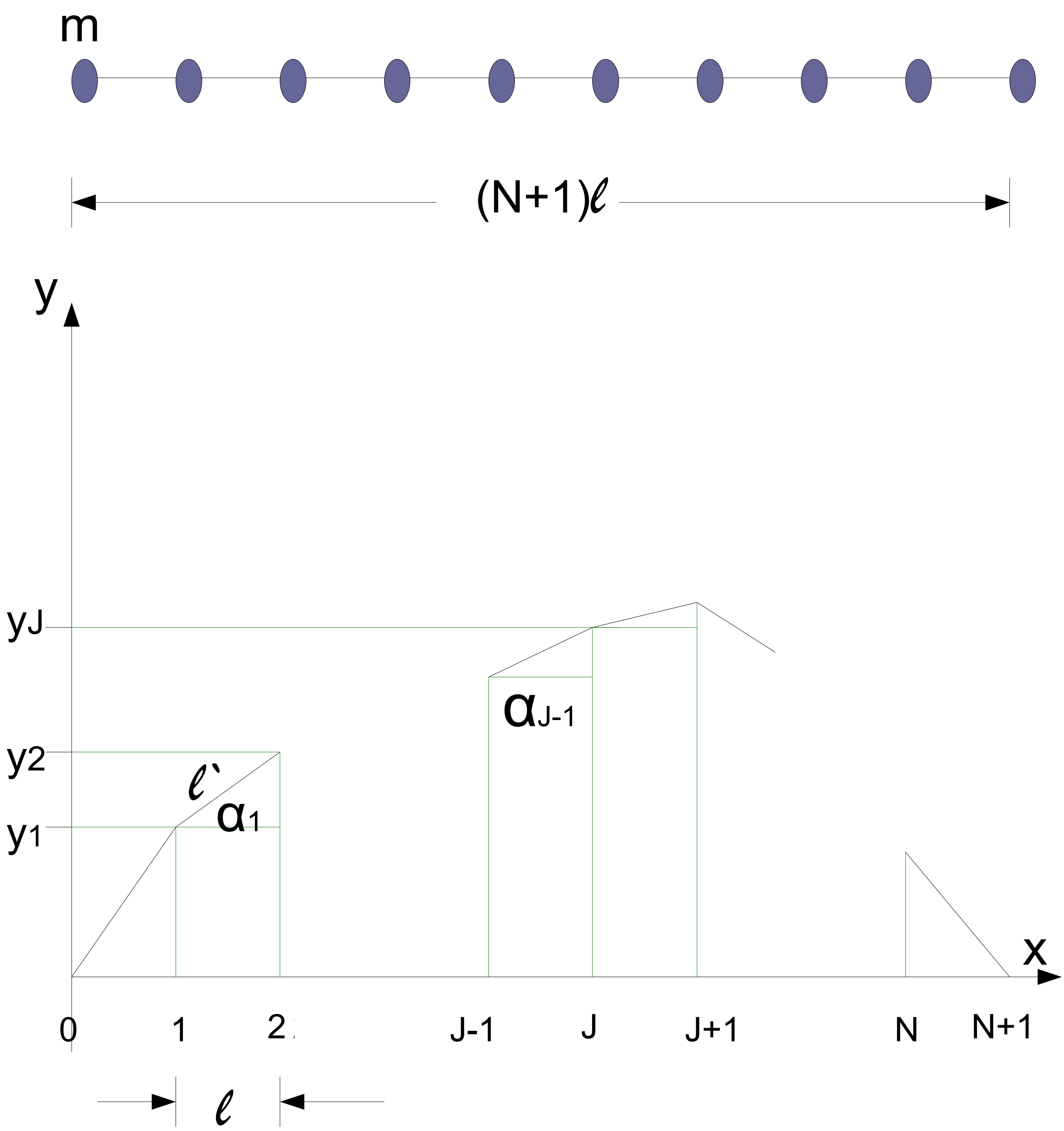


Figura i

Las N partículas estan equitativamente separadas en la cuerda, una distancia l, además dicha cuerda esta sometida a una tensión inicial T. Y se acotará esta parte del trabajo a pequeños desplazamientos transversales, lo cual simplificara el ejercicio al despreciarse cambios en la tensión, debedo a:

$$\cos(\alpha_1)=\frac{l}{(l')} \quad (2)$$

al despejar l' se obtiene: $l'=l\,sec(\alpha_1)$ *(3)*

Si, se epresa a la $sec(\alpha_1)$ en serie de Mc Laurin

$$sec(\alpha_1)=sec(0)+\frac{(d\,sec(\alpha_1))}{(d\,\alpha_1)}|_{(0)}\alpha_1+\frac{1}{(2!)}\frac{(d^2 sec(\alpha_1))}{(d\,\alpha_1)^2}|_{(0)}(\alpha_1)^2+.......... \quad (4)$$

se toman solo estos tres primeros términos debido a que en general $\alpha_J \ll 1\,rad$ *(5)*
De modo que al evaluarlos se tiene:

$$sec(\alpha_1)\approx 1+\frac{(\alpha_1)^2}{2} \quad (6)$$ con lo que l' queda dada por: $$l'=l\left[1+\frac{(\alpha_1)^2}{2}\right] \quad (7)$$

Con lo visto en el deasarrollo anterior se pueden despreciar lo cambios en la tensión y en la longitud de la cuerda al ser sometidos a un factor de incremento del orden de $l\frac{(\alpha_1)^2}{2}$

Con esta aclaración ahora se puede plantear la segunda ley de Newton para cada una de las partículas dada por:

$$\Sigma F_J=T\sin(\alpha_J)-T\sin(\alpha_{(J-1)})=m\frac{(d^2 y_J)}{(dt^2)} \quad (8)$$

Además en la *Figura i* es evidente que:

$$\sin(\alpha_J)=\frac{(y_{(J+1)}-y_J)}{l} \quad (9) \qquad \sin(\alpha_{(J-1)})=\frac{(y_J-y_{(J-1)})}{l} \quad (10)$$

Así que al reemplazar estos términos en *(8)*, se convierte en:

$$\frac{T}{l}(y_{(J+1)}-y_J)+\frac{T}{l}(y_{(J-1)}-y_J)=m\ddot{y}_J \quad (11)$$

Luego se procede a igualar a cero y dividir entre la masa, lo cual se expresa como:

$$\ddot{y}_J+2\frac{T}{ml}y_J-\frac{T}{ml}(y_{(J-1)}+y_{(J+1)})=0 \quad (12)$$

Pero debido a que este sistema es estable, es decir, hace parte de aquel grupo tiene como caracteristica poseer una fuerza restauradora definida como la fuerza por unidad de masa y longitud, que aparece explicita en la ecuación anterior

$$\omega_0^2=\frac{T}{ml} \quad (13)$$ con lo cual:

$$\ddot{y}_J+2\omega_0^2 y_J-\omega_0^2(y_{(J-1)}+y_{(J+1)})=0 \quad (14)$$

Lo anterior conduce a postular que cada partícula tiene por solución una función ciclica en el tiempo, además exige que está no presente singularidades, así que es posible afirmar, que la solución para cada “pepa” es una superpocisión de funciones armónicas

$$y_J(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t) \quad (15)$$

Al evaluar las condiciones iniciales dadas con anterioridad se llega a:

$$y_J(t)=A_J\cos(\omega t) \quad (16) \qquad \text{con} \qquad \ddot{y}_J=-\omega^2 y_J \quad (17)$$

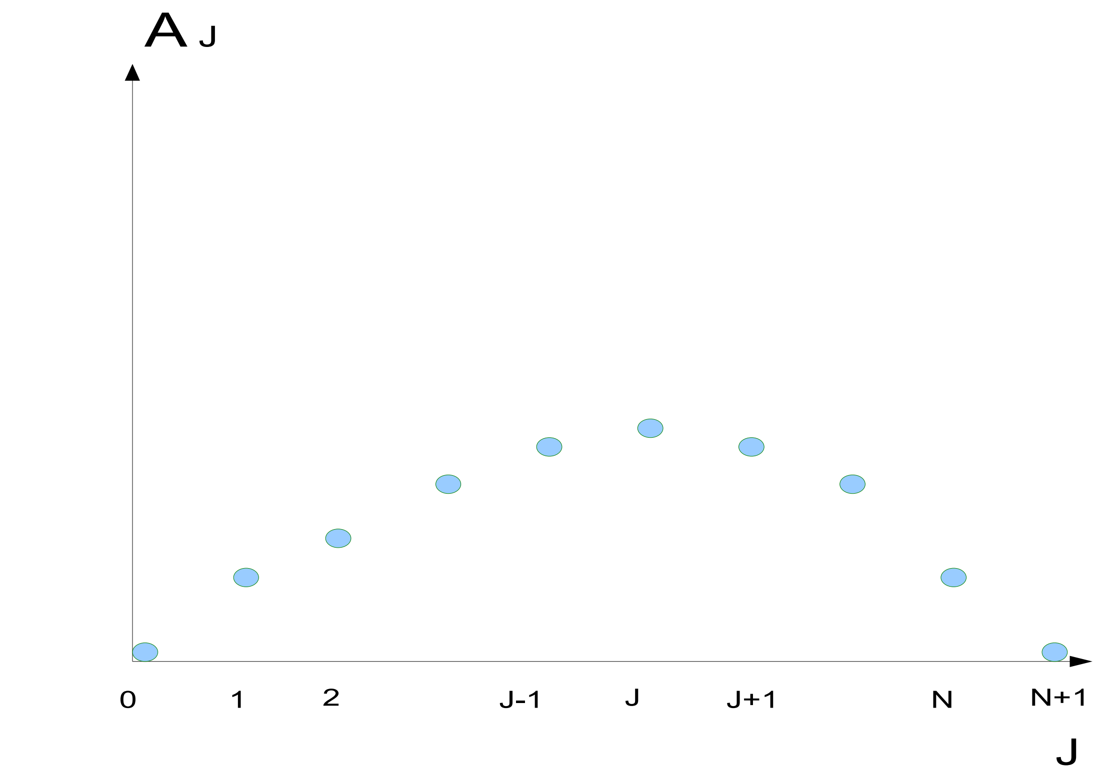
Lo anterior conduce a que el problema se convierta en un sitema de N ecuaciones acopladas dadas por:

$$\begin{array}{c}
(-\omega^2+2\omega_0^2)A_1-\omega_0^2(A_0+A_2)=0\\
(-\omega^2+2\omega_0^2)A_2-\omega_0^2(A_1+A_3)=0\\
..\\
..\\
(-\omega^2+2\omega_0^2)A_J-\omega_0^2(A_{(J-1)}+A_{(J+1)})=0\\
..\\
..\\
(-\omega^2+2\omega_0^2)A_N-\omega_0^2(A_{(N-1)}+A_{(N+1)})=0
\end{array} \quad (18)$$

Ahora se busca encontrar los posibles valores de A_J y de ω que satisfagan las condiciones ya mencionadas, y otras que se dijeron pero que no se hicieron explicitas como por ejemplo:

$$A_0=A_{(N+1)}=0 \quad (19)$$

Lo cual lleva al siguiente planteamiento; al graficar A_J Vs J se obtendría que dicha amplitud varia de una forma similar al que se muestra en la siguiente grafica :



Grafica i

Donde se ve que A_J es una función, que aunque esta discretizada para cada partícula, es muy similar a una función seno; además ya que debe cumplir con la condición anterior, se intuye que dicho argumento debe tener incluido a J, pero si en el argumento solo tuviera este término no cumpliría con la segunda parte de la condición, así que se incluye un nuevo miembro: φ que cumpla con $A_{(N+1)}=0$

Entonces, A_J será: $A_J=C\sin(J\varphi)$ (20)

Quien cumple estrictamente con el anterior condicional

$$A_{(N+1)}=C\sin((N+1)\varphi)=0$$

$$A_0=C\sin(0)=0 \quad (21) \qquad (N+1)\varphi=n\pi\rightarrow n=1,2,... \quad (22)$$

$$\varphi=\frac{(n\pi)}{(N+1)}$$

De tal manera que ahora A_J depende de un n perteneciente al conjunto de enteros positivos

$$A_J=C\sin\left(J\frac{(n\pi)}{(N+1)}\right) \quad (23)$$

Lo anterior facilita trabajar con el sistema de ecuaciones, ya que si se toma cualquiera de ellas se encontrara una relación entre la amplitud y la frecuencia angular dada por:

$$(-\omega^2+2\omega_0^2)A_J-\omega_0^2(A_{(J-1)}+A_{(J+1)})=0$$

$$\frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}=\frac{[A_{(J+1)}-A_{(J-1)}]}{A_J} \quad (24)$$

Al involucrar el término obtenido para la amplitud se obtiene

$$\begin{aligned}A_{(J-1)}&=C\sin((J-1)\varphi)=c[\sin(J\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\cos(J\varphi)]\\A_{(J+1)}&=C\sin((J+1)\varphi)=c[\sin(J\varphi)\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cos(J\varphi)]\end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}=\frac{[A_{(J+1)}-A_{(J-1)}]}{A_J}=2\cos(\varphi)=2\cos\left(\frac{(n\pi)}{(N+1)}\right) \quad (26)$$

Este resultado permite expresar a ω en función de φ como:

$$\omega^2=2\omega_0^2\left[1-\cos\left(\frac{(n\pi)}{(N+1)}\right)\right] \quad (27)$$

utilizando la identidad de coseno de un ángulo doble, dada por:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta)&=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\2\sin^2(\theta)&=1-\cos(2\theta)\end{aligned} \quad (28) \quad \text{con} \quad 2\theta=\frac{(n\pi)}{(N+1)} \quad (29)$$

que permite expresar a ω como función de n

$$\omega_n^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{(n\pi)}{(2(N+1))}\right) \quad (30)$$

Con esto se ha solucionado el problema, ya que se han determinado las posibles frecuencias ω_n . Conocidas como las frecuencias de los modos normales de oscilación, y la amplitud que eran las dos incognitas del problema:

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{(n\pi)}{(2(N+1))}\right) \quad (31)$$

$$A_{Jn} = C_n \sin\left(J\frac{(n\pi)}{(N+1)}\right) \quad (32)$$

Así que la solución postulada $y_{Jn}(t) = A_{Jn}\cos(\omega_n t)$ (33) tiene determinada todos sus miembros.

En el caso más general es decir cuando la rapidez inicial de cada "pepa" no es cero se tendrá una solución de la forma: $y_{Jn}(t) = A_{Jn}\cos(\omega_n t + \delta_n)$ (34)
Donde el ángulo de fase es distinto para cada modo normal.

sulución de D`Alembert para la ecuación de onda obtenida a través de la transformada de Fourier

Para comenzar se hablara sobre la transformada de Fourier, partiendo desde la serie que tiene el mismo nombre.

Una función fija $f(x)$ que cumpla con $f(x) = f(x+2\mathrm{L})$ (35) (función de periodo $2\mathrm{L}$) puede aproximarse mediante una serie trigonometrica de tipo especial denominada serie de Fourier.

$$f(x) = \sum_{(n=0)}^{(\infty)} [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)] \quad (36) \quad \text{donde} \quad \omega_n = \frac{(2\mathrm{n}\,\pi)}{(2\mathrm{L})} = \frac{(n\pi)}{(L)} \quad (37)$$

que es la n- esima frecuencia angular, y donde a_n y b_n son los coeficientes de Euler dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{(-L)}^{(L)} f(x)\cos(\omega_n x)dx \quad (38) \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{(-L)}^{(L)} f(x)\sin(\omega_n x)dx \quad (39)$$

Asegurando que existe una variable v la cual permita integrar los coeficientes de Euler indiscriminadamente a que si se integrara sobre x de tal forma que al incluir estos en la serie de Fourier se llegue a:

$$f(x)=\sum_{(n=0)}^{(\infty)}\left(\frac{1}{L}\right)[\cos[\omega_n x]\int_{(-L)}^{(L)} f[v]\cos[\omega_n v]dv+\sin[\omega_n x]\int_{(-L)}^{(L)} f[v]\sin[\omega_n v]dv] \quad (40)$$

Dicha serie solo permite aproximar funciones periodicas como ya se dijo; pero ahora se tratara de convertir la serie para que sea capaz de aproximar cualquier función, esto se lograra si se hace

$$F(x)=\lim_{L\to\infty}(f(x)) \quad (41)$$

con lo cual $\Delta\omega$ dada por: $\Delta\omega=\omega_{(n+1)}-\omega_n=\frac{((n+1)\pi)}{L}-\frac{(n\pi)}{L}=\frac{\pi}{L}$ (41)

Tendería a cero, pero esta no es la unica consecuencia, acarrea otra mas importante, ya que se podria entonces hablar de un espectro continuo de frecuencias y no de uno discreto como se tenia anteriormente.

Al exprezar L en términos de $\Delta\omega$ reemplazar en la serie y hacer el límite se tiene:

$$F[x]=\frac{1}{\pi}\int_{(0)}^{(\infty)}\left[\cos[\omega x]\int f[v]\cos[\omega v]dv+\sin[\omega x]\int f[v]\sin[\omega v]dv\right]d\omega \quad (42)$$

que es equivalente a la expresión $F[x]=\int_{(0)}^{(\infty)}\left[A[\omega]\cos[\omega x]+B[\omega]\sin[\omega x]\right]d\omega$ (43)

donde: $A[\omega]=\frac{1}{\pi}\int_{(-\infty)}^{(\infty)} f(x)\cos(\omega_n x)dx$ (44) y $B[\omega]=\frac{1}{\pi}\int_{(-\infty)}^{(\infty)} f(x)\sin(\omega_n x)dx$ (45)

Denominadas integrales de Fourier.

Ya que ω es independiente de v se puede agrupar como:

$$F[x]=\frac{1}{\pi}\int_{(0)}^{(\infty)}\int_{(-\infty)}^{(\infty)} f[v]\left[\cos[\omega x]\cos[\omega v]+\sin[\omega x]\sin[\omega v]\right]dv\,d\omega \quad (46)$$

Donde es evidente que el integrando es el coseno de una suma de ángulos, y gracias además a que coseno es una función par se puede reescriir el término como:

$$F[x]=\frac{1}{(2\pi)}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\left[f[v]\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\cos[\omega x-\omega v]dv\right]d\omega \quad (47)$$

Además ya que se considera que el espacio es isotrópico y seno es una función impar se asegura que:

$$\frac{i}{(2\pi)}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\left[f[v]\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\sin[\omega x-\omega v]dv\right]d\omega=0 \quad (48)$$

sumando estas dos ecuaciones y utilizando la identidad de Euler $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\,sen(\theta)$ (49) se obtiene:

$$F[x]=\frac{1}{(2\pi)}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\left[f[v]e^{(i[\omega x-\omega v])}\right]dv\,d\omega \quad (50)$$

por último, al abrir la exponencial se obtiene:

$$F[x]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}f[v]e^{(-i[\omega v])}dv\right]e^{(-i[\omega x])}d\omega \quad (51)$$

Donde el témino interno: $\hat{f}[\omega]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}f[x]e^{(-i[\omega x])}dx$ (52) es la fransformada de Fourier,

y el conjunto: $f[x]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{(-\infty)}^{(\infty)}\hat{f}[\omega]e^{(-i[\omega x])}d\omega$ (53) es la transformada inversa de Fourier

Con este resultado procedera a realizar la solución de la cuerda vibrante:

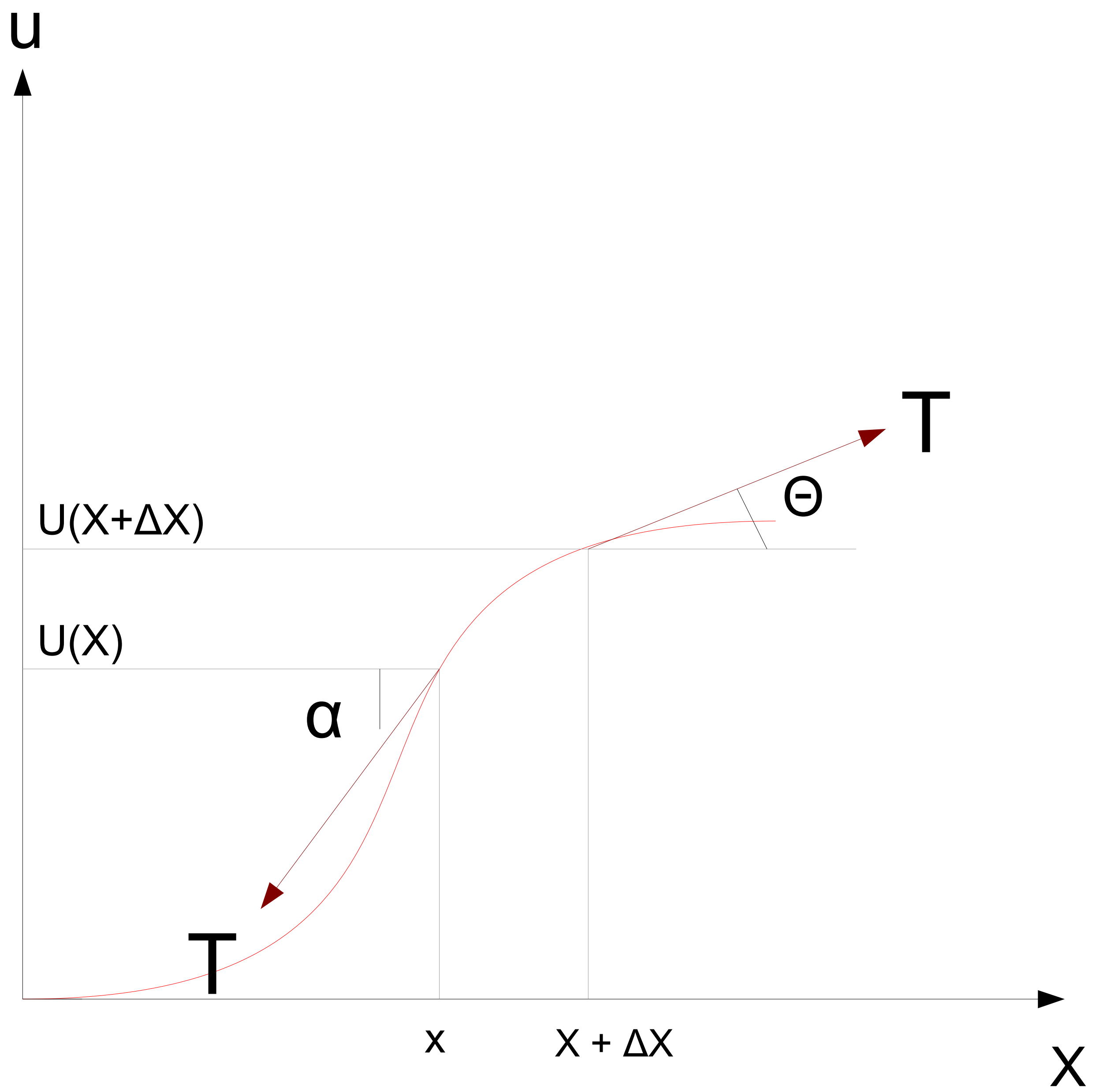


Figura ii

En este ejercicio existe una cuerda con densidad lineal de masa constante λ sometida a una tensión uniforme T sobre toda la cuerda, y se pretende deducir su ecuación de movimiento que describe su comportamiento. Con este fin se plantea la segunda ley de Newton dada por:

$$T\sin(\theta)-T\sin(\alpha)=m\left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}\right) \quad (54)$$ según la *Figura ii*

debido a que $\theta, \alpha \ll 1\, rad$ (55)

se puede hacer la siguiente aproximación $\sin(\theta)\approx\tan(\theta)=\left[\frac{(\partial u)}{(\partial x)}\right]_{(x+\Delta x)}$ (56)

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) = \left[\frac{(\partial u)}{(\partial x)}\right]_x \quad (57)$$

Además ya que la masa del segmento de cuerda comprendido entre x y $x+\Delta x$ es

$$m = \lambda \Delta x \quad (58)$$

Se llega a la ecuación de movimiento del sistema:

$$\left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}\right) = v^2 \left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial x^2)}\right) \quad (59)$$

Donde v^2 representa el cuadrado de la velocidad de propagación determinada por:

$$v^2 = \frac{T}{\lambda} \quad (60)$$

Ahora se porcedera a dar solución a esta ecuación, por comodidad se utilizara la siguiente notación $u_{xx} = \left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial x^2)}\right) \quad (61)$ de forma análoga se expresara la segunda deriva de u con respecto al tiempo.

Aplicandole transformada de Fourier a la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{array}{l} \mathscr{F}(u_{tt}) = v^2 \mathscr{F}(u_{xx}) \\ \mathscr{F}(u_{tt}) + v^2 \omega^2 \mathscr{F}(u) = 0 \end{array} \quad (62)$$

ya que esta operación permite ser permutada $\mathscr{F}[u_{tt}] = \frac{\partial^2}{(\partial t^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-iwx}\, dx\right] = \hat{u}_{tt} \quad (63)$

La ecuación de movimiento toma la forma de una ecuación diferencial homogenea de segundo orden para la transformade de u

$$\hat{u}_{tt} + v^2 \omega^2 \hat{u} = 0 \quad (64)$$

teniendo por solución $\hat{u}[\omega, t] = A(\omega)\cos(v\omega t) + B(\omega) sen(v\omega t) \quad (65)$

Aún no es tarde para decir que dicho sistema debe cumplir ciertas condiciones iniciales

$$\begin{array}{c} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{array} \quad (66)$$

Así que al aplicarles la transformada a: $\mathscr{F}[u(x,0)] = \hat{u}(\omega,0) = \mathscr{F}[f(x)] = \hat{f}(\omega) \quad (67)$

con lo que se obtiene $\begin{array}{l}\hat{u}(\omega,0)=A(\omega)=\hat{f}(\omega)\\ \hat{u}_t(\omega,0)=v\,\omega\,B(\omega)=0\end{array}$ (68)

Al utilizar dichas condiciones la solución para la transformada de u será:

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\cos(v\,\omega\,t) \quad (69)$$

A la cual es posible expresar como: $\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)[\mathrm{e}^{iv\omega t}+\mathrm{e}^{-iv\omega t}]$ (70)

Si se calcula la transformada da la función de x con un corrimiento a se tiene

$$\mathscr{F}[f(x-a)]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-iwx}dx \quad (71)$$

realizando la sustitución $\begin{array}{c}s=x-a\\ ds=dx\end{array}$ (72)

$$\mathscr{F}[f(x-a)]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{-iw(s+a)}ds \quad (73)$$

De tal manera que al operar y sacar los términos constantes de la integral

$$\mathscr{F}[f(x-a)]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\mathrm{e}^{-iwa}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{-iws}ds \quad (74)$$

donde en general se obtiene que:

$$\mathscr{F}[f(x-a)]=e^{(-iwa)}\mathscr{F}[f(x)] \quad (75)$$

Es explicito que al realizar la transformada inversa para la sulución de $\hat{u}$ se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+vt)+f(x-vt)] \quad (76)$$

Esta es la solución de D`Alembert para la ecuación unidimencional de onda.

Membrana Rectangular

Ahora se desribirá como vibra una membrana rectangular de dimenciones a,b la cual esta sometida a una tensión por unidad de longitud constante.

Además de la concideración que se hizo respecto a su tensión se hará una más para beneficiar la claridad del ejemplo; esta consideración es la siguiente: se trabajara con una membrana que posee densidad superficial de masa constante.

Con estas especificaciones a continuación se deducira la ecuación de movimiento que rige a este sistema, el cual tiene ciertas condiciones iniciales y una condición de frontera debida a la restriccción de movimiento en su contorno.

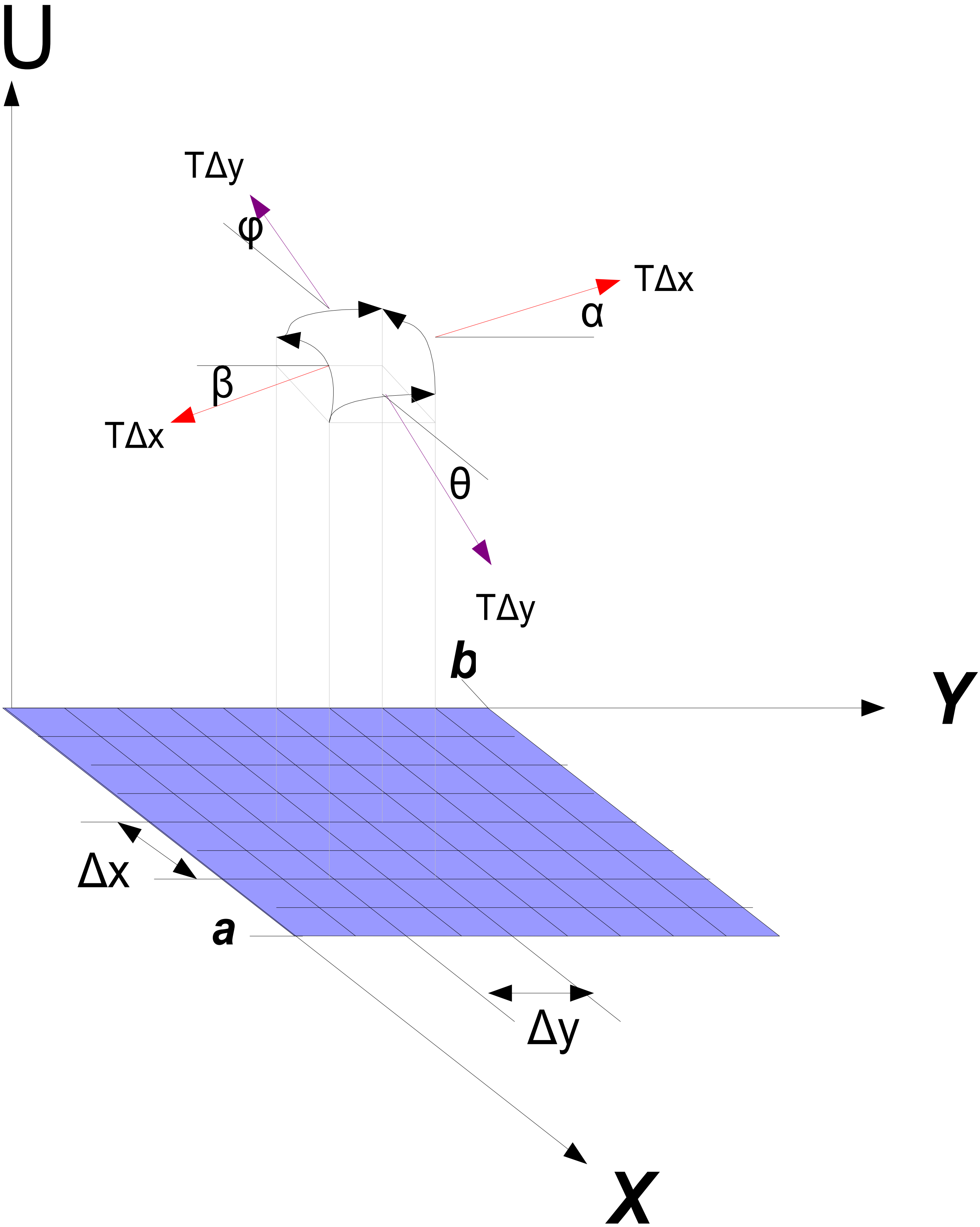


Figura iii

Ya que sigue siendo un sistema mecánico que cumple con la segunda ley de newton: $\Sigma F_i = m a_i$ *(77)* donde el subindice i hace referencia a la coordenada, lo cual significa que para cada una de ellas el movimiento es independiente de las demás, para involucrarse con esto se aplicara la segunda ley a la coordenada x; sobre está la unica fuerza actuante es la tensión, solo que el valor de su proyeción sobre dicho eje cambia con la posición; Esto se evidencia en la *Figura iii;* allí el valor (magnitud) de la fuerza de tensión para la posición x es: $T \Delta y \cos(\phi)$ y para la posición $x+\Delta x$ es: $T \Delta y \cos(\theta)$. Además si se hace la aproximación: $\Delta x \rightarrow 0$ se puede decir que: $\cos(\theta) \approx \cos(\phi) \approx 1$ *(78)* entonces al realizar la suma vectorial de fuerzas el resultado es nulo; si se consideran las mismas condiciones para y se obtendra en analogía con x el mismo resultado, esto lleva a que la membrana solo tenga un desplazamiento transversal respecto a su superficie, de tal forma que describira una función $u(x,y,t)$, pensara usted, que la concideración anterior se puede hacer también para esta coordenada u pero si se realizara no existiria manera de modelar el fenómeno porque simplemente no tendriamos vibración, así que esto es una especie de truco. Que es poco ortodoxo pero bastante funcional y ante los resultados es dificil discutir.

Por este motivo ahora se realizara la sumatoria de fuerzas sobre esta nueva coordenada, pero hay que acotar que está es algo partícular, debido que al tomar la tensión por unidad de longitud e independencia en el desplazamiento sobre x y y , tiene las siguientes consecuencias: $\Delta X \neq \Delta y$ con esto el aporte para la suma de cada eje es diferente así, la segunda de Newton[3] queda:

$$T \Delta y \sin(\phi) - T \Delta y \sin(\theta) = m\left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}\right) \quad (79)$$

que se pude interpretar como la contribución de x a u

Al igual se tendría otra ecuación dada por:

$$T \Delta x \sin(\alpha) - T \Delta x \sin(\beta) = m\left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}\right) \quad (80)$$

Que en anlogía con la anterior representaría la contribución de y a u ; ahora si se recuerda que la membrana tiene densidad superficial de masa σ constante; se puede expresar la masa m en términos de está mediante: $m = \sigma \Delta x \Delta y$ *(81)* con estas indicaciones podemos agrupar todo en una sola igualdad, que no es sino la segunda ley para u .

$$\left(T \Delta x \sin(\alpha) - T \Delta x \sin(\beta)\right) + \left(T \Delta y \sin(\phi) - T \Delta y \sin(\theta)\right) = \sigma \Delta x \Delta y \left(\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}\right) \quad (82)$$

al ser todos los ángulos mucho menores que un radian se pueden expresar los dos términos entre parentesis del lado izquierdo de esta ecuación como:

$$\left(T \Delta x \sin(\alpha) - T \Delta x \sin(\beta)\right) \approx T \Delta x \left(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right) = T \Delta x \left(\frac{(\partial u)}{(\partial x)}\Big|_{(x,\, y+\Delta y)} - \frac{(\partial u)}{(\partial x)}\Big|_{(x,\, y)}\right) \quad (83)$$ y

$$\left(T\,\Delta\,y\sin(\phi)-T\,\Delta\,y\sin(\theta)\right)\approx T\,\Delta\,y\left(\tan(\phi)-\tan(\theta)\right)=T\,\Delta\,y\left(\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x+\Delta x,\,y)}-\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x,\,y)}\right) \quad (84)$$

reemplazando las ecuaciones (82) y (83) en (84) y dividiendo entre el término $m=\sigma\,\Delta\,x\,\Delta\,y$ se tiene:

$$\left(\frac{T}{\sigma}\right)\left[\frac{\left(\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x,\,y+\Delta\,y)}-\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x,\,y)}\right)}{(\Delta\,Y)}+\frac{\left(\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x+\Delta x,\,y)}-\frac{(\partial u)}{(\partial y)}\Big|_{(x,\,y)}\right)}{(\Delta\,x)}\right]=\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)} \quad (85)$$

Es evidente que los términos del lado izquierdo de (85) se han convertido en el operador de Laplace aplicado a u , obteniendo:

$$\frac{(\partial^2 u)}{(\partial t^2)}=\frac{T}{\sigma}\nabla^2 U \quad (86) \qquad \text{donde} \qquad \nabla^2 u=\frac{(\partial^2 u)}{(\partial x^2)}+\frac{(\partial^2 u)}{(\partial y^2)} \quad (87)$$

pero el cociente $\frac{T}{\sigma}$ representa una cantidad muy importante que es el cuadrado de la velocidad de propagación $v^2=\frac{T}{\sigma}$ (88) .

Ya se realizo la deducción de la ecuación de movimiento, el siguiente paso es encontrar su solución, para esto se utilizara el método de separación de variables que consiste en convertir a la función u en el producto de nuevas funciones que se caracterizan por ser independientes, es decir cada una depende de solo una variable de la función original u lo anterior se expresa matematicamente como:

$$u(x\,,y\,,t)=S(x\,,y)*T(t)=X(x)*Y(y)*T(t) \quad (89)$$

Al reemplasar (89) en la ecuación de onda y dividir esta entre v^2 se obtiene:

$$\left(\frac{S}{v^2}\right)\frac{(\partial^2 T)}{(\partial t^2)}=T\left(\frac{(\partial^2 S)}{(\partial x^2)}+\frac{(\partial^2 S)}{(\partial y^2)}\right) \quad (90)$$

si luego se divide está entre el producto $S*T$ se llega a:

$$\left(\frac{1}{(T\,v^2)}\right)\frac{(\partial^2 T)}{(\partial t^2)}=\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{(\partial^2 S)}{(\partial x^2)}+\frac{(\partial^2 S)}{(\partial y^2)}\right)=-k^2 \quad (91)$$

Donde $\begin{matrix} k = constante \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}$ con lo cual se asegura que $-k^2$ siempre es un número negativo,

Aclarando que (91) se iguala a dicha constante porque no existe una función que cumpla con la condición que su deriva temporal sea igual a su derivada espacial en todo un dominio.

Realizando el algebra correpondiente se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{(\partial^2 T)}{(\partial t^2)} + (kV)^2 T = 0 \quad (92)$$

$$\frac{(\partial^2 S)}{(\partial x^2)} + \frac{(\partial^2 S)}{(\partial y^2)} + k^2 S = 0 \quad (93)$$

si en (93) se hace la sustitución $S(x, y) = X(x) * Y(y)$ y se divide entre este mismo producto la relación toma la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{X}\right)\frac{(\partial^2 X)}{(\partial x^2)} + \left(\frac{1}{Y}\right)\frac{(\partial^2 Y)}{(\partial y^2)} + k^2 = 0 \quad (94)$$

si se despaja el término relacionado con X se tiene:

$$\left(\frac{1}{X}\right)\frac{(\partial^2 X)}{(\partial x^2)} = -\left(\frac{1}{Y}\right)\frac{(\partial^2 Y)}{(\partial y^2)} - k^2 = -m^2 \quad (95)$$

En analogía con el procedimiento anterior se llega a:

$$\frac{(\partial^2 X)}{(\partial x^2)} + m^2 X = 0 \quad (96)$$

$$\begin{matrix} \frac{(\partial^2 Y)}{(\partial y^2)} + p^2 Y = 0 \\ con \rightarrow p^2 = m^2 - k^2 \end{matrix} \quad (97)$$

Estas ecuaciones tienen por solución:

$$T(t) = B_1 \cos(kvt) + B_2 \sin(kvt) \quad (98)$$

$$X(x) = A_1 \cos(mx) + A_2 \sin(mx) \quad (99)$$

$$Y(y) = C_1 \cos(py) + C_2 \sin(py) \quad (100)$$

Además X y Y deben cumplir con las condiciones de frontera

$$\begin{matrix} X(0) = 0 \wedge X(a) = 0 \\ Y(0) = 0 \wedge Y(b) = 0 \end{matrix} \quad (101)$$

al evaluar estas condiciones se llega a:

$$X(x)=A_2 \sin\left[\frac{(l\pi)}{a}x\right] \rightarrow l=0,1,2... \quad (102)$$

$$Y(y)=C_2 \sin\left[\frac{(n\pi)}{b}y\right] \rightarrow n=0,1,2... \quad (103)$$

pero debido a que los coeficientes A y C ahora dependen de l y n respectivamente la forma mas apropiada de estas ecuaciones es:

$$X(x)=A_l \sin\left[\frac{(l\pi)}{a}x\right] \rightarrow l=0,1,2... \quad (102^*) \qquad Y(y)=C_n \sin\left[\frac{(n\pi)}{b}y\right] \rightarrow n=0,1,2... \quad (103^*)$$

con esto la función de onda queda dada por:

$$u_{\ln}(x,y,t)=[D_{(\ln)}\cos(\lambda_{\ln}t)+D_{(\ln)}\sin(\lambda_{\ln}t)]\sin\left[\frac{(l\pi x)}{a}\right]\sin\left[\frac{(n\pi y)}{b}\right] \quad (104)$$ donde

$$\lambda_{\ln}=vk \quad (105)$$

$$\begin{gathered}\lambda=vk\\ p^2=m^2-k^2\\ \lambda=v\sqrt{(P^2+m^2)}\\ \lambda_{\ln}=v\pi\sqrt{\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\end{gathered} \quad (106)$$

estos valores son conocidos como los valores propios de la función de onda.

Existe otra condición dada por el tiempo, ya que en $t=0$ se comple con:

$$u(x,y,0)=\sum_{(l=1)}^{(\infty)}\sum_{(n=1)}^{(\infty)}\left[D_{\ln}\sin\left[\frac{(l\pi x)}{a}\right]\sin\left[\frac{(n\pi y)}{b}\right]\right]=f(x,y) \quad (107)$$

al sustituir

$$R(y)=\sum_{(n=1)}^{(\infty)}\left[D_{\ln}\sin\left[\frac{(n\pi y)}{b}\right]\right] \quad (108)$$

se obtiene que

$$R_l(y)=\frac{2}{a}\int_{(0)}^{(a)} f(x,y)\sin\left[\frac{(l\pi x)}{a}\right]dx \quad (109)$$

y por un procedimiento análogo:

$$D_{\ln}=\frac{4}{(ab)}\int_{(0)}^{(b)}\int_{(0)}^{(a)} f(x,y)\sin\left[\frac{(l\pi x)}{a}\right]\sin\left[\frac{(n\pi y)}{b}\right]dx\,dy \quad (110)$$

con esto queda determinada la solución del problema.

Conclusiones

Cuando en física se habla de resolver un problema se intenta primero comprender que causas ocacionan su existencia, hacer concideraciones y luego montarlo en el unico lenguaje que permite describir y predecir su comportamiento “la matemática”.

Por esta razón se dice que para ser un buen físico se exige tener una exelente habilidad matemática.

Pero la matemática es una condición necesaria pero no suficiente, ya que me gustaría saber que interpreta el lector sobre las soluciones de cada una de los ejemplos tratados; porque sin esto solo seria un niño jugando con letras tratando de ser Dios.

“Rutherford - 1811”

Bibliografía

Arfken, G. B., Mathematical Methods of physicists 3ra ed, Harcourt science and technology company, New York. 1990

French,E., Física, Addison-Wesley, Masachusetts,1957.

Kreyzig, E., Matématicas avanzadas para ciencia e ingeniería 3ra ed, Vol. I, Vol. II, Lumisa Wiley, Ohio, 1995.

Zubieta, G., Cálculo Avanzado, Fondo Educativo Interamericano, México, D.F., 1986.

$$T\,\Delta\,y\sin(\phi)-T\,\Delta\,y\sin(\theta)=m\left(\frac{(\partial^2 u_x)}{(\partial t^2)}\right) \qquad T\,\Delta\,x\sin(\alpha)-T\,\Delta\,x\sin(\beta)=m\left(\frac{(\partial^2 u_y)}{(\partial t^2)}\right)$$

$$\nabla^2 u=\frac{(\partial^2 u)}{(\partial x^2)}+\frac{(\partial^2 u)}{(\partial y^2)}$$