



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

## Análisis de elementos finitos con un continuo elástico lineal tipo Cosserat

### Finite Element Analysis Using a Cosserat Linear Elastic Continuum

Alfonso Mariano Ramos-Cañón<sup>1</sup>, Luis Felipe Prada-Sarmiento<sup>2</sup>, Carlos Alberto Vega-Posada<sup>3</sup>

**Fecha de recepción:** 14 de abril de 2016

**Fecha de aceptación:** 10 de septiembre de 2016

**Cómo citar:** Ramos-Cañón, A.M.; Prada-Sarmiento, L.F. y Vega-Posada, C.A. (2016). Análisis de elementos finitos con un continuo elástico lineal tipo Cosserat. *Revista Tecnura*, 20(50), 43-54. doi: 10.14483/udistrital.jour.tecnura.2016.4.a03

#### RESUMEN

**Contexto:** Los resultados experimentales en materiales granulares muestran que el comportamiento esfuerzo deformación tiene dependencia con la escala de análisis, sin embargo, debido a las suposiciones intrínsecas que tiene la mecánica del medio continuo, los análisis de elementos finitos basados en el continuo de Boltzmann no permite tener en cuenta longitudes características en su formulación que refleje la escala.

**Método:** En este trabajo se presenta la formulación especializada de los elementos finitos para un problema de deformación plana para el continuo de Cosserat. Se presentan los grados de libertad de un elemento finito cuadrilátero y se deduce el operador diferencial para obtener el vector de deformación, su función de forma, la matriz de interpolación, la matriz de rigidez y el vector de fuerza nodal. Finalmente se implementa el continuo de cosserat con el elemento descrito en un programa de elementos finitos codificado por los autores. El programa se ejecuta para resolver el problema de esfuerzos y deformaciones en una capa homogénea de material con comportamiento lineal elástico.

**Resultados:** Se obtiene las diferencias entre los componentes de esfuerzos y deformaciones de corte entre el continuo convencional y el de Cosserat junto con la aparición de momentos a nivel de punto de Gauss.

**Conclusiones:** La deducción e implementación del continuo de Cosserat permite un análisis de elementos finitos alternativo al del continuo Convencional con la posibilidad de introducir una longitud característica en su formulación para tener en cuenta los efectos de escala y rotaciones que se observan en materiales granulares.

**Palabras clave:** Continuo de cosserat, elementos finitos.

#### ABSTRACT

**Context:** Experimental results show that the stress-strain behavior of granular materials depends upon the scale analysis. However, due to the intrinsic assumptions of the mechanics of a continuum medium, the analysis of finite elements based on the Boltzmann's continuum does not allow to consider characteristic lengths in its formulation to reflect the scale effect.

- 1 Ingeniero civil, magíster en Geotecnia, doctor en Ingeniería. Profesor asociado Facultad de Ingeniería. Pontificia Universidad Javeriana, Carrera 7 No. 40-62, Bogotá, Colombia. Contacto: [a-ramos@javeriana.edu.co](mailto:a-ramos@javeriana.edu.co)
- 2 Ingeniero civil, magíster en Ingeniería, doctor en Ingeniería. Profesor asistente. Facultad de Ingeniería. Pontificia Universidad Javeriana, Carrera 7 No. 40-62, Bogotá, Colombia. Contacto: [lf.pradas@javeriana.edu.co](mailto:lf.pradas@javeriana.edu.co)
- 3 Ingeniero civil, Master of Science, Doctor. Profesor asistente. Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Contacto: [carlosa.vega@udea.edu.co](mailto:carlosa.vega@udea.edu.co)

**Method:** This work presents a finite element formulation to analyze plane-strain linear problems using the Cosserat continuum. The degrees of freedom of a four-node quadrilateral finite element are presented and the differential operator is derived to obtain the deformation vector, function form, interpolation matrix, stiffness matrix and nodal load vector. Finally, the Cosserat continuum with the aforementioned element is implemented in a finite element software coded by the authors. The software is used to solve a stress-strain problem of a homogeneous layer with a linear elastic behavior.

**Results:** The differences of the stress and shear strain responses between the conventional and the Cosserat continuum along with the moments acting at the Gauss point level are obtained.

**Conclusions:** The derivation and implementation of the Cosserat continuum provides an alternative finite element analysis to the conventional continuum, along with the advantage of introducing a characteristic length in the formulation to account for the scale effects and rotations observed in granular materials.

**Keywords:** Cosserat continuum, finite element method.

## INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que el comportamiento esfuerzo-deformación de materiales granulares está muy influenciado por el tamaño de la partícula. Resultados de ensayos controlados de laboratorio en suelos como el corte directo muestran una alta dependencia con el tamaño de la partícula (Bazant y Xiang, 1997; Ceratto y Lutenecker, 2006; Gao, Haixue y Weibing, 2000; Orlando, Hanes y Shen, 2009; Palmeira y Milligan, 1989; Ramos y Prada, 2015; Techjman, 2007; Wu, Matsushima y Tatsuoka, 2008; Zhou, Helenbrook y Shen, 2009). Dicha dependencia surge cuando el tamaño de la partícula es comparable con el tamaño de la caja de corte. En este caso, la suposición de continuo convencional o continuo de Boltzmann deja de ser válido, y para su modelación es necesario recurrir a modelos alternativos que estén más acordes con la fenomenología del proceso. La modelación con elementos finitos con el continuo convencional o continuo de Boltzmann presenta dos limitaciones para simular materiales granulares cuyo tamaño característico afecta los resultados: a) no se puede determinar la rotación de las partículas dado que no es un grado de libertad habilitado y b) el continuo convencional no tiene una longitud característica que permita simular procesos dependientes

de la escala. Como una alternativa para sobrepasar las dos limitaciones mencionadas, surge el continuo de Cosserat. Este presenta una longitud intrínseca que logra generar solución del problema de valor de contorno dependiente de la escala; además su formulación se basa en que cada punto material tiene grados de libertad de traslación y de rotación. A pesar de que se observan en los últimos años modelaciones con elementos finitos que usan medios continuos alternativos al convencional (Azadeh y Curran, 2008; Neff, Chelminski, Muller y Wieners, 2007; Ramos y Prada, 2015; Riahi y Curran, 2009, 2010; Sharbati y Naghdabadi, 2006), no se presenta la derivación de los insumos básicos para realizar un análisis de elementos finitos con el continuo de Cosserat. En este trabajo se presenta la formulación especializada de los elementos finitos para un problema de deformación plana para el continuo de Cosserat. Se muestran los grados de libertad de un elemento finito cuadrilátero y se deduce el operador diferencial para obtener el vector de deformación, su función de forma, la matriz de interpolación, la matriz de rigidez y el vector de fuerza nodal. Por último, se implementa el continuo de Cosserat con el elemento descrito en un programa de elementos finitos codificado por los autores. El programa se ejecuta para resolver el problema de esfuerzos y deformaciones

en una capa homogénea de material con comportamiento lineal elástico. Se obtienen las diferencias entre los componentes de esfuerzos y deformaciones de corte entre el continuo convencional y el de Cosserat, junto con la aparición de momentos y rotaciones a nivel de punto de Gauss. La deducción e implementación del continuo de Cosserat permite un análisis de elementos finitos alternativo al del continuo convencional con la posibilidad de introducir una longitud característica en su formulación para tener en cuenta los efectos de escala que se observan en materiales granulares.

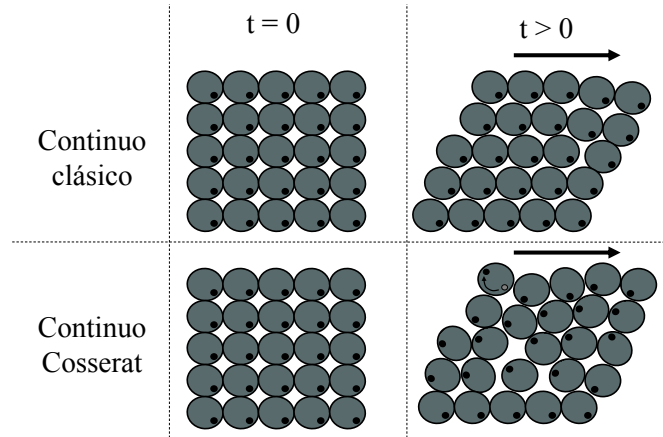
## METODOLOGÍA

### El continuo de Cosserat

El continuo de Cosserat fue propuesto por los hermanos Cosserat (Cosserat y Cosserat, 1909), sin embargo, no fue hasta que Eringen (1968) realizó un tratamiento detallado con la comparación explícita con el continuo convencional.

En la parte superior de la figura 1 se presenta esquemáticamente la cinemática del medio continuo convencional. En la parte inferior se ilustra el medio continuo de Cosserat. En la parte izquierda está la configuración para un tiempo  $t=0$  y en la parte derecha, la configuración para un tiempo  $t>0$ . Se supondrá que el continuo está compuesto por esferas. Cada una tiene un punto negro que permite observar la posible rotación y desplazamiento de los elementos que están sometidos a un campo de fuerzas. Se observa que no existe diferencia para la configuración de referencia entre el continuo convencional y el de Cosserat ( $t=0$ ). Cuando se aplica un campo de fuerzas ( $t>0$ ), la cinemática del continuo convencional permite que los elementos presenten un movimiento diferencial, es decir, cada esfera puede cambiar de posición por medio de una traslación en el plano, pero no puede rotar sobre su centro de masa, en

tanto que las esferas que representan el continuo de Cosserat presentan traslación y rotación.



**Figura 1.** Representación esquemática de la cinemática del continuo convencional o de Boltzmann y del continuo de Cosserat

**Fuente:** elaboración propia.

### El método de elementos finitos aplicados al continuo de Cosserat

En condiciones planas de deformación, el continuo de Cosserat tiene tres grados de libertad, dos traslacionales  $U_x$ ,  $U_y$  y una rotación  $w_c$ . El vector de desplazamiento en notación de elementos finitos es (ecuación (1)).

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ w_c \end{pmatrix} \quad (1)$$

El vector de deformación (ecuación (2)) para el continuo de Cosserat se define como (Eringen, 1968).

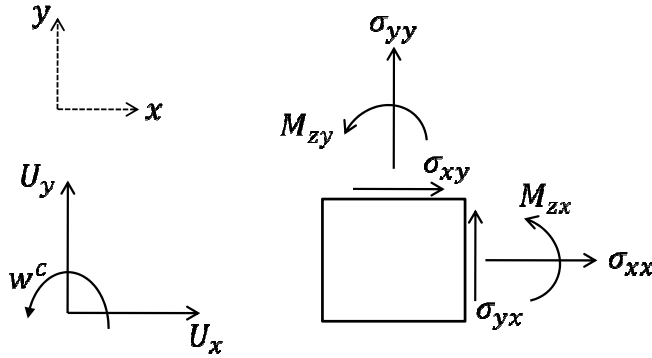
$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yx} \ \kappa_x \ \kappa_y]^T \quad (2)$$

Donde cada componente del vector de deformación es (ecuación (3)).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}; \varepsilon_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + w_c; \varepsilon_{yx} = \frac{\partial U_y}{\partial x} - w_c; \kappa_x = d_{50} \frac{\partial w_c}{\partial x}; \kappa_y = d_{50} \frac{\partial w_c}{\partial y} \quad (3)$$

$d_{50}$  es la longitud característica y es el tamaño medio del arreglo granular.

Los esfuerzos axiales, esfuerzos de corte y momentos en deformación plana en un continuo de Cosserat se representan en la figura 2, junto con los grados de libertad.



**Figura 2.** Grados de libertad en condición plana de deformación y esfuerzos y momentos que se presentan en un continuo de Cosserat

**Fuente:** elaboración propia.

El vector de deformación está relacionado con el vector de desplazamientos por medio del operador diferencial  $L$ . La ecuación (4) presenta además el número de elementos de cada componente.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{[6,1]} = L_{[6,3]} \mathbf{U}_{[3,1]} \quad (4)$$

Por tanto, el operador diferencial  $L$  (ecuación (5)) se puede obtener por inspección de la ecuación (3).

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Por otro lado, si se supone una relación elástica esfuerzo deformación ( $\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\varepsilon}$ ) lineal para un continuo tipo Cosserat tiene los siguientes componentes (ecuación (6)).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ M_{zx} \\ M_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & C_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{4,3} & C_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

En donde cada uno de los componentes de la matriz de rigidez están en función de los grados de libertad para el problema de deformación plana. Para un elemento cuadrilátero lineal, el vector de desplazamiento del elemento está relacionado con los desplazamientos de los nodos por medio de la siguiente relación (ecuación (7)).

$$\mathbf{U}_{[3,1]}^h = \mathbf{N}_{[3,12]} \mathbf{d}_{[12,1]}^e \quad (7)$$

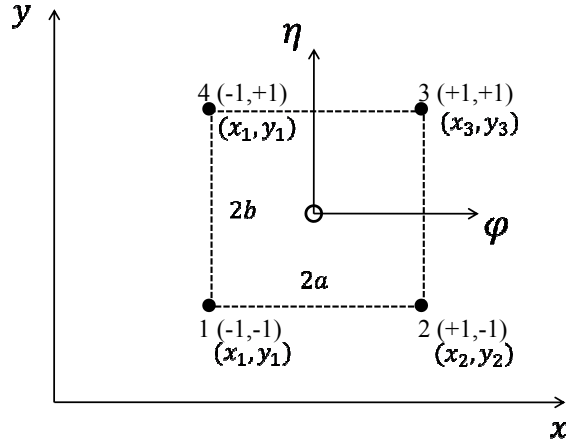
La matriz de interpolación o matriz de conectividad (ecuación (8)) está dada por (Belytschko, Liu y Moran, 2006).

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde los componentes de la matriz están dados por (ecuación (9)).

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta); N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta); N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta); N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (9)$$

$\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas naturales del elemento cuadrilátero y están relacionadas con las coordenadas físicas por medio de la relación  $\xi = x/a$  y  $\eta = y/b$  (figura 3). Así,  $2a$  y  $2b$  son los lados iniciales del elemento finito cuadrilátero.

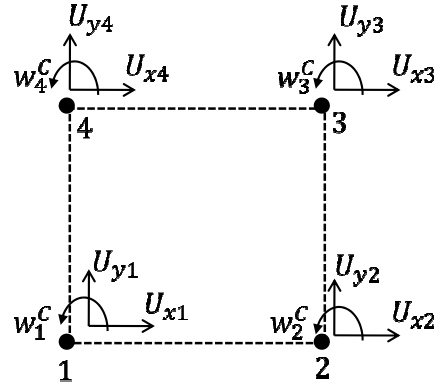


**Figura 3.** Elemento cuadrilátero en el sistema de coordenadas naturales y físicas

Fuente: elaboración propia.

El vector de desplazamientos (ecuación (10)) del elemento cuadrilátero lineal en un continuo de Cosserat de la ecuación (7) está dado por los grados de libertad representados en la figura 4.

La figura 4 presenta un esquema de los grados de libertad de un elemento cuadrilátero lineal en un continuo de Cosserat.



**Figura 4.** Grados de libertad en un elemento lineal cuadrilátero en el continuo de Cosserat

Fuente: elaboración propia.

$$\mathbf{d}^e = \{U_{x1} \ U_{y1} \ w_1^C \ U_{x2} \ U_{y2} \ w_2^C \ U_{x3} \ U_{y3} \ w_3^C \ U_{x4} \ U_{y4} \ w_4^C\}^T \quad (10)$$

La matriz de deformación  $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ , definida como la que relaciona el operador diferencial  $\mathbf{L}$  y la matriz de forma está dada por (ecuación (11)).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & -N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & -N_4 \\ 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & d_{50} \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz de rigidez para el elemento cuadrilátero de Cosserat está definido por (ecuación (12)).

$$\mathbf{k}_e = \int_A h \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (12)$$

Dado que  $\xi = x/a$  y  $\eta = y/b$ , el diferencial de área  $dA$  de la ecuación (12) está dado por  $dA = dx dy = a b d\xi d\eta$  y la matriz de rigidez del elemento será (ecuación (13)).

$$\mathbf{k}_e = \int_A h \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} a b h \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\xi d\eta \quad (13)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{C}$  dada por la ecuación (6), que está incluida en la definición de la matriz de rigidez del elemento para el continuo de Cosserat en elasticidad lineal se presenta en la ecuación (14).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G+G^c & G-G^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-G^c & G+G^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G d_{50}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G d_{50}^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $G$  es el módulo de corte,  $G^c$  es el módulo de rotación (referencia) y  $d_{50}$  es la longitud característica. La matriz de rigidez del elemento (ecuación (12)) tiene tamaño  $12 \times 12$ . Para el caso de elasticidad lineal de Cosserat, la evaluación de los términos de la matriz de rigidez de los elementos se pueden obtener de forma analítica. Algunos de los términos son (ecuación (15)).

$$k_{1,1} = \frac{h}{3ab} [a^2 C_{3,3} + b^2 C_{1,1}]; k_{2,2} = \frac{h}{3ab} [a^2 C_{2,2} + b^2 C_{4,4}] \quad (15)$$

$$k_{3,3} = \frac{h}{9ab} [a^2 (4b^2 (C_{3,3} - C_{3,4} - C_{4,3} + C_{4,4}) + 3C_{6,6} d_{50}^2) + 3b^2 C_{5,5} d]$$

El vector de fuerza nodal está dado por la integral en superficie de la matriz de conectividad transpuesta por el vector de fuerza (ecuación (16)).

$$\mathbf{f}_e = \oint_S \mathbf{N}_{[12,3]}^T f_{S[3,1]} dS \quad (16)$$

$$f_{e[1,1]} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_z \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) f_{sx} dz d\xi = h \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) f_{sx} d\xi \quad (19)$$

$$f_{e[1,1]} = h \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{1}{4} (1-\xi) 2 f_{sx} d\xi = \frac{h f_{sx}}{2} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} (1-\xi) d\xi = \frac{h f_{sx}}{2} \left[ \underbrace{\xi}_{-1}^1 - \underbrace{\frac{\xi^2}{2}}_{-1}^1 \right] = h f_{sx} a \quad (20)$$

Donde  $a$  es la mitad de la longitud del lado 1-2.

Especializando la ecuación (16) al continuo de Cosserat, se tiene la ecuación (17).

$$\mathbf{f}_e = \oint_S \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_w \end{Bmatrix} dS = \oint_S \begin{bmatrix} N_1 f_{sx} \\ N_1 f_{sy} \\ N_1 f_w \\ N_2 f_{sx} \\ N_2 f_{sy} \\ N_2 f_w \\ N_3 f_{sx} \\ N_3 f_{sy} \\ N_3 f_w \\ N_4 f_{sx} \\ N_4 f_{sy} \\ N_4 f_w \end{bmatrix} dS \quad (17)$$

En la ecuación (17),  $f_{sx}$  y  $f_{sy}$  son cargas uniformemente distribuidas y  $f_w$  es un momento aplicado directamente en el nodo. Al desarrollar el primer elemento del vector  $\mathbf{f}_e$  (ecuación (17)) se obtiene la ecuación (18).

$$f_{e[1,1]} = \oint_S N_1 f_{sx} dS = \oint_S \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) f_{sx} dS \quad (18)$$

Si se supone que la carga está aplicada en el lado 1-2 del elemento (figura 5), entonces la ecuación (18) queda como se muestra en la ecuación (19).

Como las coordenadas  $\eta = -1$  en el lado 1-2 del elemento cuadrilátero, se obtiene que la ecuación (20).

Dependiendo del lado donde se encuentre cargado el elemento, el vector de fuerza nodal será diferente para el mismo nodo. Generalizando la ecuación (17) para la aplicación de la carga en cualquiera de los cuatro lados del elemento finito cuadrilátero se tiene la ecuación (21).

$$f_e = \begin{bmatrix} h f_{sx} a^\dagger, h f_{sx} b^\ddagger \\ h f_{sy} a^\dagger, h f_{sy} b^\ddagger \\ f_w^1 \\ h f_{sx} a^\dagger, h f_{sx} b^\ddagger \\ h f_{sy} a^\dagger, h f_{sy} b^\ddagger \\ f_w^2 \\ h f_{sx} a^*, h f_{sx} b^\otimes \\ h f_{sy} a^*, h f_{sy} b^\otimes \\ f_w^3 \\ h f_{sx} a^*, h f_{sx} b^\otimes \\ h f_{sy} a^*, h f_{sy} b^\otimes \\ f_w^3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

† para elementos cargados en el lado  $L_{1-2}$ , ‡ para elementos cargados en el lado  $L_{1-4}$ , ★ para elementos cargados en el lado  $L_{2-3}$  y ⊗ para elementos cargados en el lado  $L_{3-4}$  (figura 5).

Para clarificar la aplicación del vector de fuerza nodal por elemento, se muestra la ecuación (22),

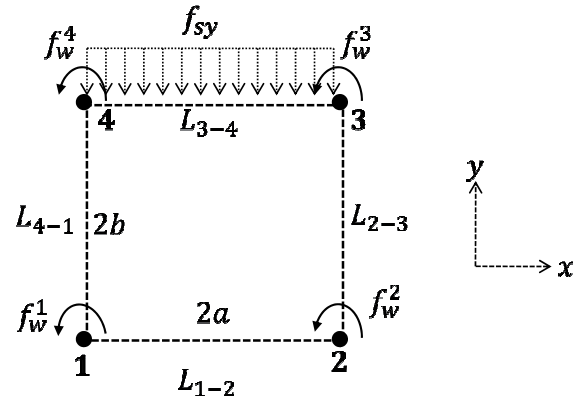
$$f_e = \{0 \quad 0 \quad f_w^1 \quad 0 \quad 0 \quad f_w^2 \quad 0 \quad h f_{sy} a \quad f_w^3 \quad 0 \quad h f_{sy} a \quad f_w^4\}^T \quad (22)$$

## RESULTADOS

### Carga uniformemente distribuida en un continuo de Cosserat con material elástico lineal

En la sección anterior se plantearon todos los elementos necesarios para realizar un análisis de elementos finitos. De lo anterior, es necesario ensamblar la matriz de rigidez general y el vector de carga general para el problema de valor de contorno y, de esta manera, obtener los desplazamientos-rotaciones en los nodos y las variables derivadas: deformaciones y gradientes de rotaciones.

Para aplicación, se plantea el caso típico de un carga distribuida en una parte de la superficie,



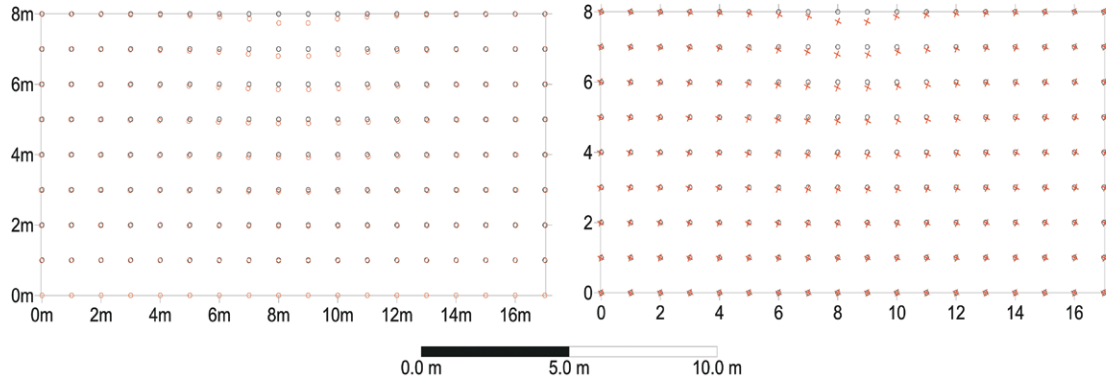
**Figura 5.** Elemento cuadrilátero de Cosserat cargado con momentos puntuales en los cuatro nodos  $f_w^i$  y una carga uniformemente distribuida  $f_{sy}$  en el lado 3-4  $L_{3-4}$

**Fuente:** elaboración propia.

que es la especialización para el elemento cuadrilátero de la figura 5.

asemejando el caso de un zapata cargada superficial. Las constantes elásticas para el modelo constitutivo seleccionadas son:  $E = 1E6 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.35$ ;  $G = 3.7E5 \text{ Pa}$ ;  $G^c = 7.4E5 \text{ Pa}$ ;  $d_{50} = 2E-4 \text{ m}$ . La malla de elementos finitos se realiza con elementos cuadriláteros con base y altura igual a  $0,5 \text{ m}$  ( $u=b=0,5 \text{ m}$ ). Una vez solucionado el sistema general  $F = KX$ , se tienen los desplazamientos nodales. Al ser un modelo constitutivo elástico lineal, se puede obtener la inversa de la matriz de rigidez sin necesidad de recurrir a métodos incrementales, ya que los desplazamientos no dependen de la trayectoria (conservativos).

La malla de elementos finitos junto con la deformada en el continuo de Botzmann y el continuo de Cosserat se presentan en la figura 6.

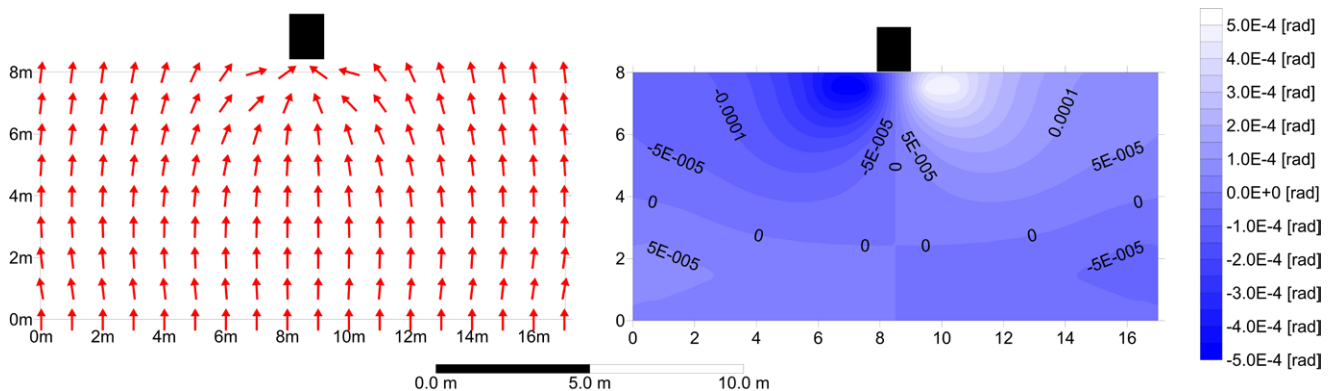


**Figura 6.** Malla de elementos finitos del problema de valor de contorno. Posición de los nodos en el estado deformado y no deformado. Izquierda: Continuo de Boltzmann. Derecha: Continuo de Cosserat

**Fuente:** elaboración propia.

Los círculos de la figura 6 presentan la posición de los nodos en su estado no deformado. Las cruces muestran la deformada de la malla una vez se aplica la carga superficial en el continuo de Cosserat y en continuo convencional. Se observa que no se generan diferencias entre los dos continuos (Cosserat y Boltzmann) en los valores de los grados de libertad convencionales, desplazamientos horizontales y verticales. Sin embargo, en la figura 7 se presentan las rotaciones de Cosserat. La dirección de la flecha indica proporcionalmente la cantidad que rotó cada nodo. Cuando no hay carga,

la totalidad de las flechas apuntan hacia arriba. La parte inferior está restringida a la rotación de Cosserat, por lo que las flechas son completamente verticales. Como es de esperarse, debido a la simetría del problema de valor de contorno, las rotaciones de Cosserat en el eje de simetría son cero. La mayor concentración de rotaciones se encuentra inmediatamente debajo de la base cargada. Este grado de libertad no está presente en el continuo de Boltzmann y está indicando la rotación como cuerpo rígido que pueden tener los elementos. La rotación, que es una característica importante de



**Figura 7.** Rotaciones de Cosserat para el problema de valor de contorno

**Fuente:** elaboración propia.

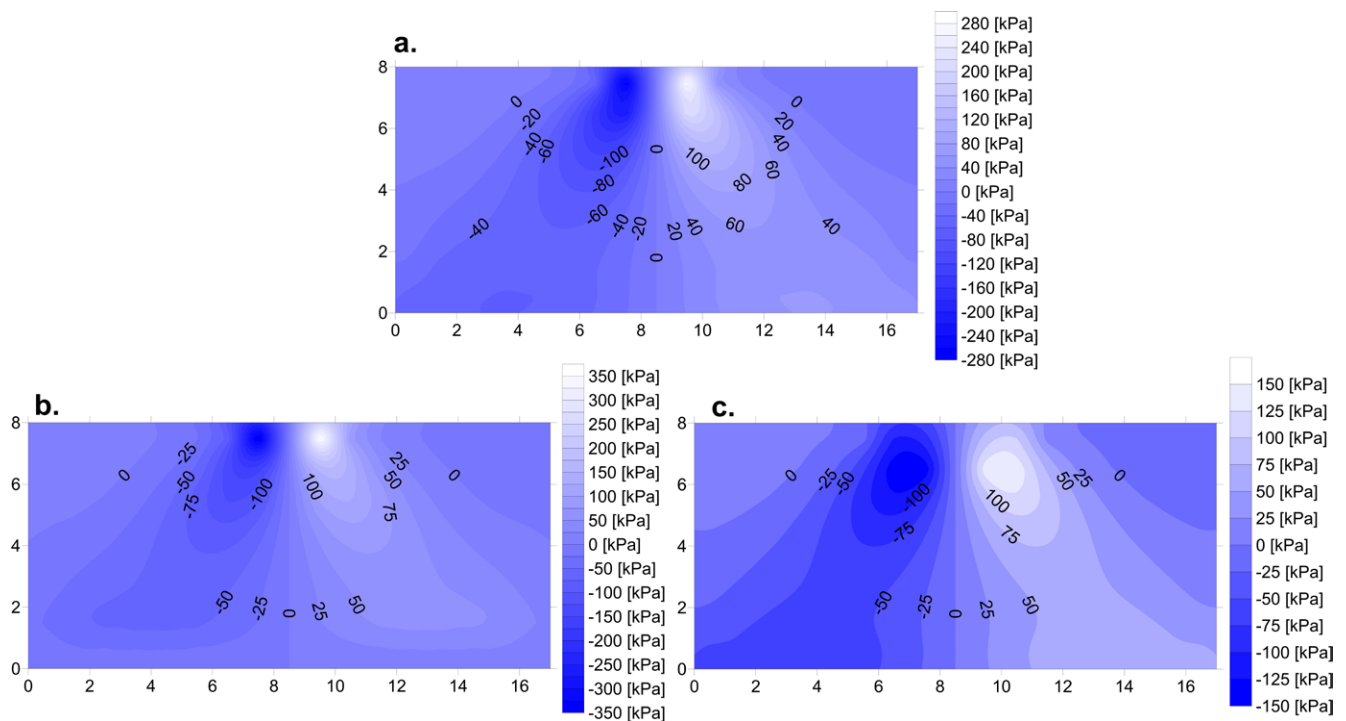


los materiales particulados, no puede ser simulada con la modelación con elementos finitos basados en el continuo convencional. Se ha visto desde el punto de vista experimental y numérico con modelación con elementos discretos que la resistencia a la rotación de las partículas es la responsable de la generación de las bandas de corte y de la localización de la deformación (Arévalo, Ramos-Cañón y Prada, 2014; Correa, Maldonado, Prada y Ramos, 2015), razón por la que es ventajoso que un modelo tenga la posibilidad de tener en cuenta este grado de libertad adicional.

Con relación a los esfuerzos, en el continuo de Cosserat los esfuerzos de corte  $\sigma_{yx}$  son diferentes a los de corte  $\sigma_{xy}$  por lo que el tensor de esfuerzos no es simétrico. Para garantizar la ecuación de

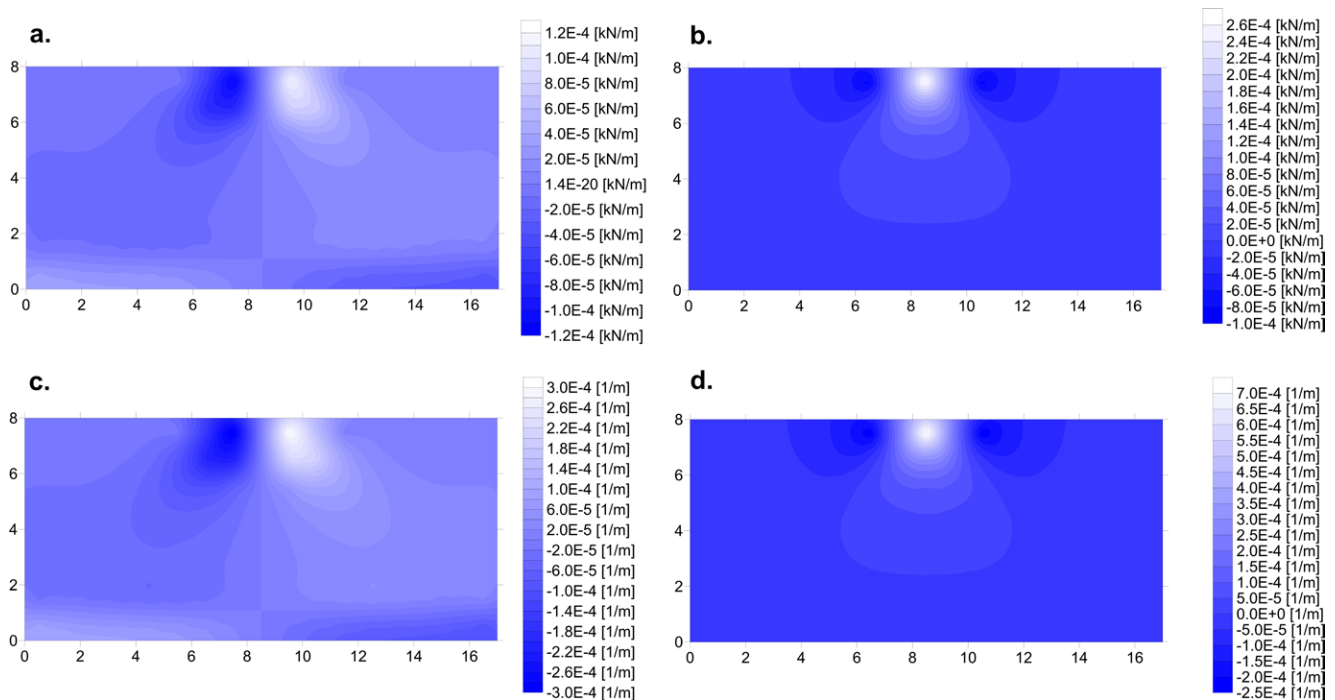
balance de momento de momentos, surgen los momentos aplicados en un punto material (figura 2). La figura 8a ilustra la distribución de esfuerzos  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$  para el continuo convencional y los esfuerzos  $\sigma_{xy}$  (figura 8b) y  $\sigma_{yx}$  (figura 8c) para el continuo de Cosserat.

Finalmente se presentan los momentos del tensor de esfuerzos  $M_{zx}$  y  $M_{zy}$  junto con  $\kappa_x = \frac{\partial w_c}{\partial x}$  y  $\kappa_y = \frac{\partial w_c}{\partial y}$  (ecuación (6)). Estos últimos términos no aparecen en el continuo convencional y representan la variación infinitesimal espacial de las rotaciones con las coordenadas, análogo a las deformaciones convencionales que indican la variación infinitesimal espacial de los desplazamientos con las coordenadas (figura 9).



**Figura 8.** a. Distribución espacial de esfuerzos de corte  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$  en el continuo de Boltzmann. b. Distribución de esfuerzos  $\sigma_{xy}$  en el continuo de Cosserat. c. Distribución de esfuerzos  $\sigma_{yx}$  en continuo de Cosserat.

**Fuente:** elaboración propia.



**Figura 9.** Distribución espacial de a. Momentos del tensor de esfuerzos  $M_{zx}$  b. Momentos del tensor de esfuerzos  $M_{zy}$  c. Microrrotaciones  $\kappa_y = \frac{\partial w_c}{\partial y}$  y d. Microrrotaciones  $\kappa_x = \frac{\partial w_c}{\partial x}$ .

**Fuente:** elaboración propia.

Se observa que los momentos que se presentan en cada una de los nodos afectando el equilibrio del tensor de esfuerzos son complementarios a los esfuerzos de corte desarrollados en el problema de valor de contorno. Las microrrotaciones surgen de forma análoga a los componentes convencionales del tensor de deformaciones. Estos no están asociados a la generación de cambio de volumen, sino que se magnifica la distorsión que puede presentar el continuo representado por Cosserat. Por otro lado, es importante anotar que dentro del modelo constitutivo elástico lineal de Cosserat se encuentra inmersa una longitud característica. En este caso se define como el tamaño medio de la partícula  $d_{50}$ . Este aspecto permite tener en cuenta que la respuesta esfuerzo deformación depende del tamaño de la partícula y, por otro lado, el continuo tiene el grado de libertad de rotación por lo que estaría representando la posibilidad cinemática inherente a su naturaleza que

tiene los materiales granulares. El efecto del tamaño de la muestra se ve reflejado que la muestra en más rígida con muestras más pequeñas que con muestras grandes para el mismo material (Ramos y Prada, 2015). Los resultados del continuo de Cosserat tiene la posibilidad de ser complementados con análisis de confiabilidad (Prada et al., 2011), de abarcar problemas de carácter dinámico (Vega-Posada, Zapata-Medina y Ramos-Cañón, 2016) o de solucionar problemas de valor de contorno donde las distorsiones pueden ser importantes (Ramos-Cañón, 2015; Lamus, Plazas y Luna, 2015).

## CONCLUSIONES

Es de esperarse que cuando un material particulado está cargado, los elementos que constituyen este material presenten rotaciones. Dicho aspecto no lo puede representar el continuo de Boltzmann, en tanto que se observa en las figuras 7 y 9 que los

nodos del continuo de Cosserat presentan rotación del orden de  $5 \text{ E-4 rad}$  como resultados del proceso de carga.

Las rotaciones, los esfuerzos normales, los esfuerzos de corte y los momentos están relacionados con la longitud característica, que en este caso es el diámetro medio de la partícula. Se presentan diferencias de los esfuerzos de corte  $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{yx}$  del orden de  $200 \text{ kPa}$  para nodos específicos. El análisis elástico convencional no podría tener en cuenta una longitud característica del problema por lo que los resultados serían independientes de la escala del problema del valor de contorno.

El continuo de Cosserat genera componentes adicionales del tensor de deformación denominados microrrotaciones. Los valores pueden ser mayores a  $-2\text{E-4 } 1/\text{m}$ . Es importante mencionar que dichas microrrotaciones (variación espacial de la rotación) son proporcionales a la longitud característica del problema.

Se presentan los ingredientes fundamentales para realizar un análisis de elementos finitos con el continuo de Cosserat. Las matrices de deformación, las funciones de forma, la matriz de rigidez de un elemento tipo cuadrilátero y el vector de carga se desarrollan explícitamente para que tengan la posibilidad de ser integrados a las estructuras de programación de elementos finitos en el marco de modelación convencional. Lo anterior abre las perspectivas de análisis de problemas esfuerzo-deformación cuyo material sea de carácter granular. Las formulaciones presentadas en este trabajo pueden ser adaptadas a modelos constitutivos inelásticos para poder considerar el comportamiento no lineal de geomateriales, por lo que es una manera alternativa de incluir aspectos inherentes al comportamiento del material granular que no es posible describirlos con base en el continuo convencional.

## FINANCIAMIENTO

El primer autor agradece a la Pontificia Universidad Javeriana por el apoyo económico por medio

del proyecto No. 5267 “Estudio de la inestabilidad en un flujo de material granular seco”.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arévalo, G.; Ramos-Cañón, A. y Prada, L. (2014). Análisis de confiabilidad en un modelo de descarga de silos de almacenamiento mediante el método de elementos discretos (DEM). *Obras y Proyectos*, 15, 21-30.
- Azadeh, R. y Curran, J. (2008). *Application of Cosserat Continuum approach in the finite element shear strength reduction analysis of jointed rock slopes*. The 12<sup>th</sup> International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics. Goa, India.
- Bareither, C.; Benson, C. y Edil, T. (2008). Reproducibility of Direct Shear Tests Conducted on Granular Backfill Materials. *Geotechnical Testing Journal*, 31(1), 1 -11.
- Bazant, Z. y Xiang, Y. (1997). Size Effect in Compression Fracture: Splitting Crack Band Propagation. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE 123(2), 162-172.
- Belytschko, T.; Liu, W. y Moran, B. (2006). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Londres: John Wiley & Sons, Ltd.
- Cerato, A. y Lutenegeger, A.J. (2006). Specimen Size and Scale Effects of Direct Shear Box Test of Sands. *Geotechnical Testing Journal*, 29(6), 507-516.
- Correa, C.; Maldonado, M.; Prada, L. y Ramos-Cañón, A. (2015). Aplicabilidad de la energía cinética en el inicio de la inestabilidad de materiales granulares en un tambor rotador mediante la técnica PIV. *Revista Ingeniería y Región*, 13(1), 9-18.
- Cosserat, E. y Cosserat, F. (1909). *Theorie des Corps Deformables*. París: Hermann.
- Eringen, A. (1968). *Fracture, volume II – Mathematical-Fundamentals. Chapter Theory of Micropolar Elasticity*. Londres: Academic Press.
- Gao, J.; Haixue, Y. y Weibing, Z. (2000). Characteristic Study of Interface Between Soil and Concrete by Using Larger Size Single Shear Apparatus and Numerical Analysis. *China Civil Engineering Journal*, 33(4), 42-46.

- Lamus, F.; Plazas, M. y Luna, P. (2015). Resistencia de una conexión emperrada solicitada a cizalladura doble paralela a la fibra para estructuras de guadua angustifolia. *Tecnura*, 19(43), 52-62.
- Neff, P.; Chelminski, K.; Muller, W. y Wieners, C.; (2007). A numerical solution method for an infinitesimal elasto-plastic –Cosserat model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(8), 1211-1239.
- Orlando, A.; Hanes, D. y Shen, H. (2009). *Scaling Effects in Direct Shear Test*. Powders and Grains 2009. Proceedings of the 6th International Conference on Micromechanics of Granular Media. AIP Conference Proceedings Col 1145 Issue 1.
- Palmeira, E. y Milligan, G. (1989). Scale Effects in Direct Shear Test on Sand. *Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1(1), 739-742.
- Prada, L.; Ramos-Cañón, A.; Solaque, B. y Caicedo, B. (2011). Confiabilidad aplicada al diseño geotécnico de un muro de contención. *Revista Obras y Proyectos*, 9, 49-58. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-28132011000100006>
- Ramos-Cañón, A. (2015). Influence of the void ratio and the confining on the static liquefaction in slopes in Changi sand. *Tecnura*, 19(43), 63-73.
- Ramos-Cañón, A. y Prada, L. (2015). Desempeño del continuo de Cosserat para tener en cuenta efectos de escala en un ensayo de corte directo. *Revista EIA*, 12(23), 51-59.
- Riahi, A. y Curran, J. (2009). Full finite element Cosserat formulation with application in layered structures. *Applied Mathematical Modelling*, 33(8), 3450-3464.
- Riahi, A. y Curran, J. (2010). Comparison of the Cosserat Continuum approach with finite element interface models in a simulation of layered materials. *Transactions A: Civil Engineering*, 17(1), 39-52.
- Sharbati, E. y Naghdabadi, R. (2006). Computational aspects of the Cosserat finite element analysis of localization phenomena. *Computational Material Science*, 38(2), 303-315.
- Tejchman, J. (2007). FE Analysis of contract shear zones in loose granular materials. *Granular Matter*, 9, 49-67.
- Vega-Posada, C.; Zapata-Medina, D. y Ramos-Cañón, A. (2016). Blast densification: A proposed methodology to quantify the amount of densification required to prevent liquefaction and flow in sandy soils. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 80, 4-8.
- Wu, P.; Matsushima, K. y Tatsuoka F. (2008). Effects of Specimen Size and Some other Factors on the Strength and Deformation of Granular Soil in Direct Shear Tests. *Geotechnical Testing Journal*, 31(1), 1-20.
- Zhou, Q.; Helenbrook, B. y Shen, H. (2009). A Computational Study of the Micromechanics Under Pre and Post-Failure in a 2-D Direct Shear Test. *Chinese Science Bulletin*, 54, 4337. Doi:10.1007/s11434-009-0516-5.

