

# La simulación por computador en investigación y desarrollo

## Computer simulation in research and development

### **JULIO ENRIQUE DUARTE**

Licenciado en Física y Magíster en Física, Universidad Industrial de Santander. Doctor en Física, Universidad de Barcelona, docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Titular, Sede Duitama, Grupo de Energía y Aplicación de Nuevas Tecnologías (GEANT).

[julioenriqueduarte@latinmail.com](mailto:julioenriqueduarte@latinmail.com)

### **FLAVIO HUMBERTO FERNÁNDEZ MORALES**

Ingeniero Electrónico, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Doctor en Ingeniería Electrónica, Universidad de Barcelona. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Sede Duitama, categoría Asociado. Investigador Grupo de Energía y Aplicación de Nuevas Tecnologías (GEANT).

[flaviofm@telecom.com.co](mailto:flaviofm@telecom.com.co)

Fecha de recepción: diciembre 13 de 2005

Clasificación del artículo: reflexión

Fecha de aceptación: junio 27 de 2005

**Palabras clave:** método de los elementos finitos, modelado, simulación.

**Key words:** finite element method, modeling, simulation.

### **R E S U M E N**

En el presente trabajo se ilustra la importancia de la simulación por computador, en especial del método de los elementos finitos (MEF) como una alternativa de interés para la investigación en áreas como electricidad, mecánica, electrónica, biología y medicina, entre otras. Por su versatilidad, esta clase de herramientas es fundamental en la investigación de diversos fenómenos físicos, en el desarrollo de procesos productivos y en el estudio de dispositivos, modelos y sistemas, ya que permiten generar conocimiento de punta en forma eficiente y a costos reducidos. Por tratarse de herramientas 'transversales', esto es, que pueden ser utilizadas

por diversas disciplinas, los programas de simulación adquieren una enorme importancia y deben tenerse en cuenta a la hora de plantear currículos actualizados y con un gran contenido investigativo que faciliten al egresado su ejercicio profesional.

### **A B S T R A C T**

This paper shows the importance of computer simulation; specially it permit to acquire knowledge of the Method of Finite Elements (FEM) like interesting alternative for researching in areas such as electricity, mechanics, electronics, biology and medicine, among others. Given its versatility, this

type of tools is fundamental for researching diverse physical phenomena, development of productive processes and study of devices, models and systems; they allow generating knowledge in efficient form and reduced costs. Like transversal tools, that is to

say that can be used by diverse disciplines, simulation programs acquire an enormous importance and are considered at the time of raising updated curricula and with a great investigative content; they facilitate to withdraw its professional exercise.

\*\*\*\*\*

## 1. Introducción

En forma general, la simulación puede entenderse como la utilización del computador para la reproducción aproximada y el estudio de un fenómeno (físico, químico, biológico, económico, psicológico, sociológico, etc.) (Wachutka, 1994). Su principal objetivo es obtener mayor información y entendimiento acerca de la respuesta y evolución de un sistema físico bajo ciertas condiciones impuestas: cargas, condiciones de contorno y condiciones iniciales. Esta información será útil en el proceso de toma de decisiones para optimizar prototipos, puesto que permite conocer y estudiar las variables que participan en un fenómeno y establecer su influencia en un determinado diseño sin necesidad de construir el objeto bajo estudio.

Pese a que las herramientas de simulación por computador tienen una historia relativamente reciente, se basan en técnicas matemáticas desarrolladas tiempo atrás y que sólo pudieron ser puestas en práctica gracias a la aparición de máquinas con gran capacidad de memoria y elevada velocidad de procesamiento. Dicho en forma sencilla, el computador resuelve una serie de ecuaciones conocidas que se utilizan para calcular las variables que describen los fenómenos físicos involucrados. Por ejemplo, en el campo de la Dinámica Computacional de Fluidos (CFD, por su sigla en inglés) estas variables son la velocidad y la presión de la corriente de aire (o líquido) que fluye alrededor del objeto que se estudia. Las ecuaciones empleadas para la solución de este problema fueron descubiertas hace más de 150 años por el ingeniero francés Claude Navier y el matemático irlandés George Stokes; son las ecuaciones de Navier-Stokes, así denominadas

en su honor, que se derivan directamente de las leyes del movimiento de Newton (Morn y Kim, 1997).

Como es concebida actualmente, la simulación por computador comenzó a mediados de los años setenta. Durante este periodo su desarrollo y aplicación fueron liderados por los procesos de investigación en ingeniería aeronáutica; en esta área del conocimiento trabajaron los pioneros en el desarrollo y mejora de los métodos de análisis numérico.

Para llevar a cabo una simulación se requieren tres componentes básicos. El primero es la base teórica que permite formular el problema por resolver en función de modelos que permitan hacer un análisis matemático y entender el problema desde una perspectiva abstracta. En modelos reales, este componente dejará observar aspectos cuantitativos del problema pero difícilmente, excepto en casos sencillos, proporcionará los resultados cualitativos que se esperan. Es por esto que las herramientas de cálculo numérico son de gran ayuda.

El segundo componente son los algoritmos que facilitan desarrollar una secuencia de pasos lógicos que serán ejecutados por el computador para la solución del modelo y el estudio más minucioso del problema. Finalmente, el conocimiento de lenguajes y técnicas de programación permitirá efectuar las simulaciones y, a partir de sus resultados, iniciar un proceso iterativo para perfeccionar el modelo a medida que se descubren nuevos aspectos del problema real.

El objetivo del presente artículo es el de ilustrar las posibilidades del método de los elementos finitos (MEF), como una alternativa para la solución de

problemas en ciencias e ingeniería que involucran diversos dominios físicos. En este contexto se presenta una descripción cualitativa acerca del MEF, junto con algunos ejemplos de aplicación en micro-sistemas y medicina. Igualmente, se describen los elementos básicos a tener en cuenta a la hora de utilizar los métodos de cálculo numérico en la solución de problemas físicos. De otra parte, se hace una mención de las ventajas y desventajas del MEF y, finalmente, se dan algunas conclusiones y recomendaciones sobre el tema.

## 2. El cálculo numérico de problemas físicos

### 2.1 Problemas físicos y discretización

Un problema a nivel físico es aquel en el cual intervienen uno o varios dominios físicos, como por ejemplo, el térmico, el fluídico, el mecánico o el electromagnético. La solución de este tipo de problemas se caracteriza por establecer las ecuaciones que relacionan las variables de interés y para ello se apela a principios de física e ingeniería bien conocidos, entre los cuales pueden mencionarse: equilibrio, segunda ley de Newton, leyes de conservación, termodinámica y ecuaciones de Maxwell. Las dificultades que se presentan al formular el problema y resolver analíticamente las ecuaciones matemáticas resultantes, normalmente ecuaciones diferenciales (algunas veces lineales y a menudo parciales no lineales), son muy complejas y casi siempre imposibles de resolver. En la práctica, su solución se restringe a casos de geometrías sencillas como cuadriláteros o esferas bajo condiciones de contorno muy simples.

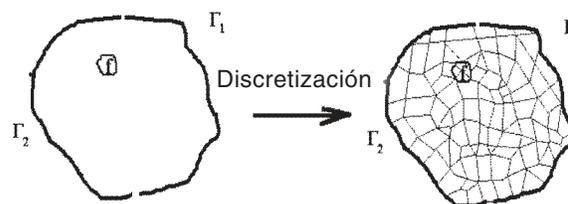
En vista de lo anterior, cuando el problema es muy complejo hay que recurrir a métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones involucradas. Esta situación es típica cuando se estudian sensores y actuadores fabricados en silicio, por ejemplo sensores de presión o de flujo y microespejos (Walker, 2000); los anteriores son dispositivos cuya estructura contiene múltiples componentes, con encapsulados complejos y la existencia de varios procesos físicos en un mismo dominio o distintos

pero colindantes, situaciones en las cuales es necesario hacer el análisis de fenómenos acoplados.

El problema principal del modelado de un sistema, es la cantidad de grados de libertad (GdL) requeridos para su descripción, los cuales pueden conducir a tiempos de cálculo considerable. Uno de los puntos clave en el desarrollo de modelos a este nivel es saber fraccionar el sistema, establecer las condiciones de contorno y saber cómo se acoplan entre sí; una mala elección en este proceso conducirá a un análisis erróneo (Funk, 1995). La idea final de la simulación física es obtener, mediante de un conjunto mínimo de parámetros (GdL), la descripción más fiel posible del sistema, en la cual se reflejen aspectos tan importantes como las no linealidades y los acoplamientos.

Lo anterior se puede conseguir por medio de la discretización, proceso en el cual se requiere del paso de un modelo continuo a uno discreto, como se ilustra en la figura 1.

Figura 1. Discretización de un dominio continuo



Si  $L$  se define como el operador diferencial que describe el sistema,  $v$  como los grados de libertad que constituyen el campo, asociados a cada punto del espacio y  $f$  como las fuentes del sistema o cargas, el modelo matemático quedará descrito de la siguiente manera (Zienkiewicz y Taylor, 1994):

$$\begin{aligned}
 L \vec{v}(x) &= \vec{f}(x) \quad \forall x \in \Omega & (1) \\
 \vec{v}(x) &= \vec{g}(x) \quad \forall x \in \Gamma_1 & \text{c.c. de Dirichlet} \\
 \frac{\partial \vec{v}(x)}{\partial n} &= \vec{g}(x) \quad \forall x \in \Gamma_2 & \text{c.c. de Newmann}
 \end{aligned}$$

En (1),  $\Omega$  es el dominio del modelo y  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son particiones disjuntas de la frontera del dominio; también puede definirse otro tipo de condiciones de contorno, de acuerdo con la naturaleza del problema. Dado que cada punto del espacio tiene un conjunto de GdL, la representación de este modelo contiene infinitos GdL; de todos ellos sólo se conocen los de las condiciones de frontera. Las fuentes de los campos  $f$  actuarán de tal forma que se establezca un equilibrio en el sistema o condición de mínima energía.

Los diferentes métodos numéricos buscan reducir el número de GdL de una forma óptima, sin perder información acerca del sistema. Una idea intuitiva, aplicable a cualquier método, es que si se obtiene la solución exacta en un punto del espacio, ésta no diferirá excesivamente de la de otro punto suficientemente cercano; es decir, que conociendo la solución en un número discreto de puntos del dominio, bastará con realizar una interpolación para obtener una buena aproximación a la solución real. La forma como se desarrolla esta idea conduce a los diferentes métodos numéricos existentes.

En últimas, el objetivo es discretizar el problema, calcular la solución en los puntos donde se ha definido el dominio discreto, llamados nodos, y realizar una interpolación de dicha solución para cualquier otro punto. La interpolación se realiza en un dominio definido por varios nodos vecinos y es lo que constituye el 'elemento'. Al conjunto de nodos y elementos se le denomina malla.

## 2.2 El MEF y otros métodos de simulación

Uno de los métodos más populares para el cálculo numérico de ecuaciones diferenciales e integrales es el denominado "método de los elementos finitos" (MEF), el cual se aplica a distintos dominios energéticos: mecánico, transferencia de calor, fluidos y electromagnetismo, entre otros. Adicionalmente, puede utilizarse en el estudio de fenómenos acoplados como la piezoelectricidad y los efectos termo-mecánicos (Angulo *et al.*, 1995).

Básicamente, el método consiste en la subdivisión de un medio continuo en elementos discretos compuestos por nodos, es decir, por puntos a través de los cuales se unen los distintos elementos; su respuesta se conoce a partir de los valores proporcionados en tales nodos. La variable física por calcular se interpola en todo el volumen mediante determinadas funciones, llamadas "funciones de forma", a partir de los valores nodales. Se establece entonces un sistema de valores nodales que equilibren todas las cargas aplicadas al dominio. La solución de este sistema permitirá determinar los valores del parámetro físico de interés en cada nodo. El MEF se puede entender como un método para encontrar una solución aproximada de un modelo simplificado.

Comparado con otros métodos de cálculo, la ventaja principal del MEF es la generalidad del proceso, lo cual hace que su uso sea posible en multitud de problemas. Además, el enmallado generado puede ajustarse a las necesidades del problema reduciendo su densidad cuando no se obtienen variaciones importantes de las variables independientes; de esta forma puede mejorarse la precisión del cálculo. No obstante, su gran problema son las enormes matrices que se generan, incluso en geometrías no muy complejas, lo que exige un tiempo de cálculo que en muchas ocasiones puede ser excesivamente alto.

En la práctica, los programas comerciales que utilizan un simulador a nivel físico basado en el método MEF son muchos; entre ellos cabe mencionar: ANSYS para análisis multidominio (Swanson Analysis Systems Inc.); MARC para análisis multidominio (MARC Analysis Research Corporation); ABAQUS para análisis mecánico (Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc.); y NASTRAN para análisis mecánico (MSC. Software Corporation).

A parte del MEF, a nivel físico existen otros métodos de cálculo numérico tales como:

- BEM ("Boundary Element Method", o Método de los Elementos de Frontera): en él se resuelven las ecuaciones sobre valores nodales en los

contornos del dominio; de esta forma se reduce una dimensión en el problema. Una ventaja es que los cambios que se efectúen en el modelo pueden hacerse de forma rápida. Sin embargo, las matrices presentan un alto grado de asimetría, que hace que el tiempo total de cálculo sea comparable al requerido en el método MEF (Kythe, 1995). Un ejemplo de simuladores que utilizan este método es el BEASY (Computational Mechanics Inc.), que ha sido empleado para la simulación simultánea de problemas multidominio (Lahrmann, 1995).

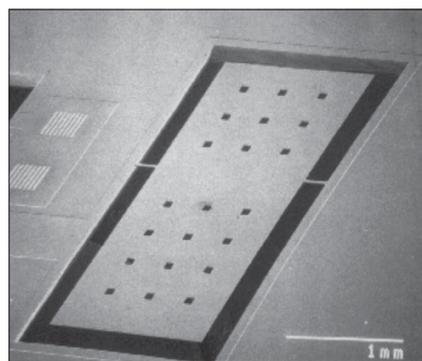
- FDM ('Finite Difference Method' o Método de las Diferencias Finitas): este método discretiza las variables independientes y sustituye las derivadas continuas de la ecuación en derivadas parciales por expresiones que contienen diferencias de la solución en los puntos discretos del mallado (Koley, 1997). El método es fácil de implementar; sin embargo, uno de sus problemas es que requiere de una discretización regular, que limita así el ajuste adecuado del enmallado e impide en muchas ocasiones obtener la precisión deseada (Mitchell, 1985).
- FVM ('Finite Volume Method' o Método de los Volúmenes Finitos): este método obliga a cumplir las leyes de conservación de manera local (en cada elemento) y global (en todo el dominio). Sin embargo, para la discretización de las variables independientes utiliza una aproximación por diferencias finitas, limitando la versatilidad en el enmallado de la estructura. Este método es especialmente útil en el estudio de problemas fluidicos (Senturia, 1998).

### 3. Algunas aplicaciones de la simulación

En este apartado se presentan algunos ejemplos que ilustran el potencial de los aportes de la simulación por computador en contribuir a la solución de un problema en física e ingeniería. Los problemas que se resuelven mediante simulación comprenden desde situaciones microscópicas hasta macroscópicas, como las ilustradas en las figuras 2 y 3. La figura 2 muestra un acelerómetro torsional por efecto ca-

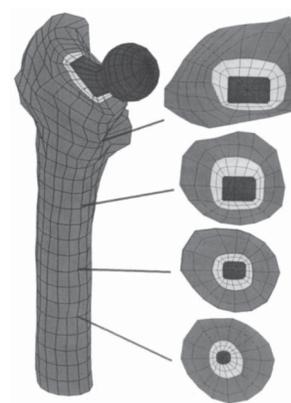
pacitivo fabricado en silicio, cuya estructura fue optimizada mediante de un análisis por el Método de los Elementos Finitos (MEF), que dio como resultado la implementación de agujeros en el electrodo móvil para reducir el efecto amortiguador del aire circundante.

**Figura 2.** Acelerómetro pendular de 1.000  $\mu\text{m}$  de largo, 500 mm de ancho y 10 mm de grosor. Los agujeros sirven para reducir los efectos de amortiguación o "camping" del aire (Fernández, 2000)



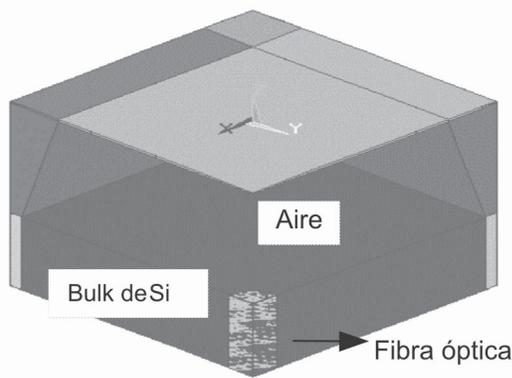
La figura 3 presenta el modelo computarizado de un fémur para el estudio, diseño e implementación de un implante de cadera. En este tipo de aplicaciones biomecánicas, es posible conocer la distribución de esfuerzos en el hueso y en el material de la prótesis, así como optimizar la posición del implante de manera que se pueda garantizar el éxito de la intervención quirúrgica.

**Figura 3.** Modelo MEF de un fémur generado a partir de imágenes de tomografía computarizada (Vander Sloten *et al.*, 1999)



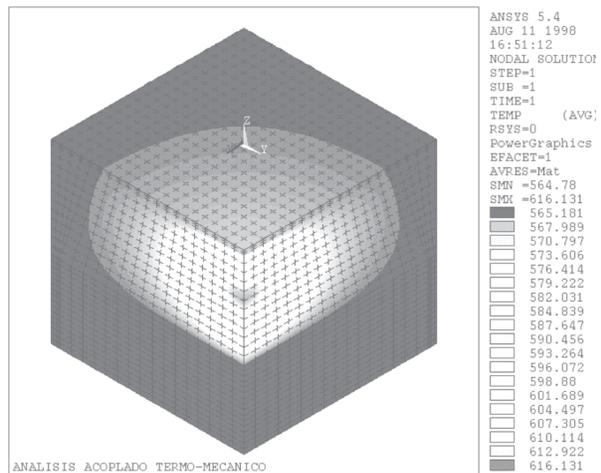
La figura 4 presenta el modelo propuesto para una membrana de silicio actuada termo-ópticamente. Vale decir que, debido a las excelentes propiedades mecánicas del silicio (Si) y al extenso uso de su tecnología, se han realizado muchos esfuerzos en la aplicación de membranas de (Si) como actuadores en microsistemas. El principio termo-óptico es especialmente ventajoso en situaciones en las cuales se deben evitar las interferencias eléctricas o un excesivo calentamiento.

**Figura 4.** Modelo para estudiar el principio de actuación termo-óptico. Se muestra un cuarto de la membrana y la cavidad de actuación. La fibra óptica transporta la energía luminosa requerida para efectuar el calentamiento del aire, el cual, a su turno, induce el incremento de presión que causa la deflexión de la membrana. La fibra óptica está incrustada en un bloque (*bulk*) de Si de 200  $\mu\text{m}$  de grosor. La cavidad de actuación donde está encerrado el aire es de 250  $\mu\text{m}$  de alto. La membrana es cuadrada y su lado tiene 800  $\mu\text{m}$  de longitud.

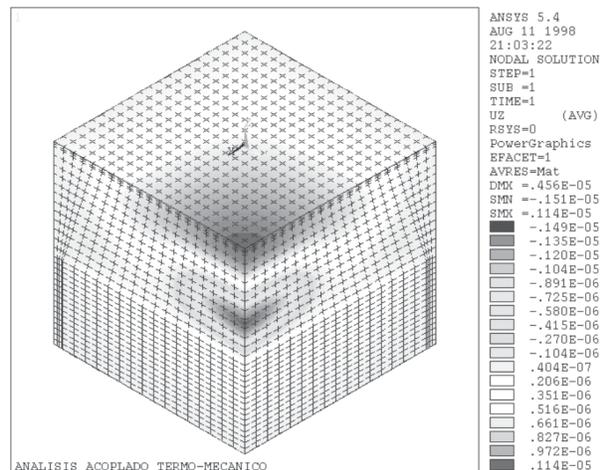


Para el modelado de la microestructura se escogió el programa ANSYS basado en el método de elementos finitos. Por las características de simetría de la estructura sólo se requiere la simulación de un cuarto del sistema; esto es suficiente para obtener la información completa del comportamiento de la membrana, con la consiguiente reducción en el tiempo de cálculo. En este caso, y debido a las particularidades del problema, se llevó a cabo un análisis acoplado termo-mecánico en tres dimensiones. Los resultados se obtuvieron considerando un haz láser con potencia de 10 mW.

**Figura 5. a)** Distribución de la temperatura en la microestructura;



**Figura 5. b)** componente vertical de la deflexión extraída del análisis acoplado termo-mecánico.



La figura 5a muestra la distribución de temperatura en la cavidad de actuación, derivada de la simulación térmica estática. La temperatura más alta aparece en el punto en que el haz láser cae sobre la estructura y decrece hacia el cuerpo o *bulk* de Si con una variación total de 50 °K. Los resultados del análisis térmico son usados como carga para la simulación mecánica, la cual determina la distribución de deflexiones en la microestructura, como puede verse en la figura 5b. Como era de esperar-

se, el punto de máxima deflexión se encuentra en el centro de la membrana (Duarte et al., 1998).

## 4. Elementos requeridos para realizar una simulación

Existen tres elementos importantes en la obtención de resultados útiles a partir de una simulación.

### 4.1 Modelo matemático

Consiste en una representación idealizada de la realidad. Para su elaboración se tienen en cuenta el propósito final de la modelación del proceso o sistema físico, las variables conocidas acerca de él y las consideradas importantes. Entre los datos que deben conocerse del modelo se encuentran las propiedades de los materiales, las propiedades geométricas (configuración física) y las condiciones de operación (iniciales y de contorno).

Dada la complejidad de las aplicaciones reales, en diversas ocasiones es necesario recurrir a la experiencia y a la intuición para plantear un modelo reducido que, sin perder fiabilidad, se adapte a las limitaciones del sistema computacional disponible. En otras palabras, es necesario reducir el número de variables y parámetros considerados para que la solución pueda ser obtenida en un tiempo razonable.

### 4.2 Hardware

En el pasado existían grandes limitaciones en cuanto a capacidad de memoria, velocidad de proceso y flexibilidad en la programación de computación; además, incidía el costo excesivo de los equipos requeridos y la poca disponibilidad de personal calificado. Gracias a avances en la microelectrónica, hoy se dispone de equipos de bajo costo que superan con creces las características de sus predecesores; asimismo, la línea que separaba a los computadores personales (PCs) de las estaciones de trabajo (workstation) y de los grandes computadores (mainframes) se hace cada vez más difusa.

La capacidad de memoria y el costo de la máquina aumentan en función del tipo de aplicación que se

desea emplear. Por ejemplo, para simular el funcionamiento de una planta termonuclear hará falta un supercomputador con la capacidad suficiente para manejar el número de variables involucrado; por su parte, con un PC simple bastará para estudiar los engranajes de una máquina.

En general puede decirse que hoy día el hardware impone muy pocas restricciones a los modelos que se pueden simular; en el futuro, la próxima generación de computadores hará que estas limitaciones desaparezcan casi por completo.

### 4.3 Software

Anteriormente la programación de los modelos se llevaba a cabo en forma 'artesanal' por especialistas en el área, y existían grandes dificultades para resolver las partes críticas del diseño; el término "artesanal" hace referencia a que para cada problema se desarrollaba un algoritmo específico y no existía una metodología general que permitiera la reutilización del código generado.

Como se observa en la tabla 1, hoy día la generación del modelo es una operación que requiere muy poco tiempo y es hecha por personal que no necesariamente es experto en modelado matemático ni en el área de aplicación.

**Tabla 1.** Evolución del tiempo de desarrollo de un modelo de simulación

Año	Tiempo de desarrollo
1980	Meses
1994	Días
1998	Horas
2004	Minutos

En el futuro será posible diseñar aplicaciones basadas en módulos de propósito general y los paquetes de software serán mas 'inteligentes', y ejecutarían muchas de las operaciones que hoy realiza el usuario. Igualmente, se están desarrollando interfaces que parten de la base de la interoperabilidad; esto

significa que los programas de tipo CAD/CAM/CAE podrán compartir información sin problema alguno.

## 5. Ventajas y desventajas de la simulación

Como se ha mencionado, se hacen simulaciones por computador con el propósito de obtener el mayor conocimiento posible sobre un proceso o sistema, empleando un modelo matemático que reúna las principales variables que intervienen en él, resuelto por un computador.

### 5.1 Ventajas

- Permite el estudio del sistema completo, independientemente de su complejidad, sin necesidad de disponer de los componentes físicos.
- Permite el modelado físico completo; es decir, pueden estudiarse fenómenos térmicos, mecánicos, electromagnéticos y fluidicos.
- Permite hacer el análisis de efectos acoplados, así como estudios de no linealidad.
- Permite realizar análisis de sensibilidad, es decir, estudiar el efecto de pequeñas variaciones de los parámetros y propiedades de los materiales sobre el comportamiento del sistema.
- Posibilita la optimización de los parámetros de diseño y rendimiento del sistema, con base en los criterios de diseño establecidos.
- Permite el estudio de variaciones probabilísticas y estadísticas del diseño.
- El grado de automatismo de los programas es cada día mayor, minimizando la intervención del usuario. Además, permite la interface con otros programas de diseño y manufactura muy difundidos en el ámbito industrial.
- La presentación gráfica de los resultados facilita bastante la comprensión del problema y la optimización del objeto de estudio.

Todo lo anterior unido al bajo costo de los programas y equipos de cómputo requeridos, convierte a las herramientas de simulación en elementos in-

dispensables para la investigación y desarrollo de soluciones novedosas en temáticas interdisciplinarias, en las cuales sería muy difícil trabajar de otra manera.

### 5.2 Desventajas

Pese a las grandes bondades de la simulación, ésta debe emplearse con precaución, dado que presenta limitaciones propias de la metodología en la cual está basada. Como principales desventajas pueden citarse las siguientes:

- La solución del problema implica elaborar un modelo simplificado en el cual pueden omitirse variables y parámetros importantes a la hora de evaluar el comportamiento global del sistema.
- El resultado de una simulación es una aproximación a la realidad, sin embargo, la verificación o 'prueba de fuego' del modelo se obtendrá al comparar sus resultados con los del sistema o proceso real.
- El éxito del modelo será directamente proporcional al grado de conocimiento del sistema, así como de los fenómenos que intervienen en él.
- Cuando la simulación no ha sido bien estructurada, puede convertirse en un proceso lento y costoso.

## 6. Conclusiones

Para ser competitivos en cualquier área de la ciencia y la tecnología de hoy es indispensable incorporar, adoptar y adaptar las metodologías de simulación por computador al campo específico de trabajo, con el propósito de obtener un mejor rendimiento en el desarrollo profesional. No obstante, es necesario ser cuidadosos en el uso y evaluación de los resultados de las simulaciones, pues si bien los programas disponibles en la actualidad son bastante 'inteligentes', también están muy lejos de ser la panacea para resolver todos los problemas que plantean los avances tecnológicos en física e ingeniería.

El hecho de que la simulación sea una técnica aplicable a profesiones relacionadas con ciencias biológicas y de la salud y en diversas áreas de la ingeniería (mecánica, eléctrica, electrónica, civil, metalúrgica, de vías y transportes, geológica y de petróleos entre otras) la convierte en una importante temática de estudio en programas académicos de pregrado y posgrado, con excelentes perspectivas académicas y de investigación.

De otra parte, por tratarse de herramientas de bajo costo y gran versatilidad, se abren grandes posibilidades de aplicación en investigaciones de prime-

ra línea, en especial en temáticas interdisciplinarias como la bioingeniería, en las cuales países como Colombia pueden competir con probabilidad de éxito.

Por lo anterior, se considera que las universidades colombianas, laboratorios y centros de investigación deben tomar la decisión de incorporar en sus currículos áreas temáticas relacionadas con métodos y herramientas para la simulación asistida por computador; ello permitirá elevar la calidad en investigación y desarrollo (I&D) de sus egresados y de las mismas instituciones.

---

## Referencias bibliográficas

---

- [1] ANGULO, T., Marco, S. y SAMITIER, J. (1995). *3D Coupled Electro-mechanical Simulations in Microstructures: Simulation and Design of Microsystems and Microstructures*. En: Computational Mechanics Publications, pp. 165-174.
- [2] DUARTE, J. E., FERNÁNDEZ Morales, F. H., SIEIRO, J., LESEDUARTE, S. y MORENO, M. (1998). *Thermo-mechanical Modeling of a Thermo-optically Actuated Silicon Membrane. Proceedings of 4th International Workshop on Thermal investigations of ICs and Microstructures*. Septiembre 27 a 29, 1998, Cannes, Francia.
- [3] FERNÁNDEZ Morales, F. H. (2000). *Mecatrónica*. En: Memorias I Semana de Ingeniería Electromecánica, Paipa (Col.).
- [4] FUNK, J. (1995). *Modelling and Simulation of IMEMS*. Tesis doctoral, ETH Zuerich.
- [5] HIBBITT, Karlsson & Sorensen Inc. (2005). En: <http://www.abaqus.com>.
- [6] KOLEV, S. D., Ádám, M., ISTVÁN, Bársony y COBIANU, C. (1997). *Three Dimensional Thermal Model of a Porous Silicon Based Pellistor with Suspended Bridge Structure*. EUROSENSORS XI (1997), pp. 965-968.
- [7] KYTHE, P. K. (1995). *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC Press.
- [8] LAHRMANN, A. (1995). *An Integrated Design and Simulation Tool for m-structures: Simulation and Design of Microsystems and Microstructures*. Computational Mechanics Publications, pp. 219-226.
- [9] MARC Analysis Research Corporation (2005). En: <http://www.mssoftware.com>
- [10] MITCHELL, A. R. (1985). *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- [11] MORN, P. y KIM, J. (1997). *Simulación de turbulencia mediante supercomputadores*. En: Investigación y Ciencia, N° 246, pp. 46-51.
- [12] SENTURIA, S.D. (1998). *CAD Challenges for Microsensors, Microactuators and Microsystems*. Proceedings of the IEEE, 86, pp. 1611-1626.
- [13] Swanson Analysis Systems Inc. (2005). En: <http://www.ansys.com>
- [14] VANDER Sloten, J. et al (1999). *Computer Technology in Biomechanics Research and Hard Tissue Surgery*. 2 day course on New Technologies in Biomedical Engineering and Ethical Issues, EURO-BME'99, Barcelona.
- [15] WACHUTKA, G. (1994). *Problem Orientated Modeling of Microtransducers: State of the Art and Future Challenges*. Sensors and Actuators A, 41-42, 279-283.
- [16] WALKER, J. (2000). *The Future of MEMS in Telecommunications Networks*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 10, R1 - R7.
- [17] ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R. L. (1994). *El método de los elementos finitos*. 4ª Ed. Mc Graw Hill, Barcelona.