Algunos métodos de interpolación para generar un modelo digital de elevación

Some interpolation methods to generate a digital increase model

Wilson Jairo Pinzón Casallas[1]
Licenciado en Matemáticas, magíster en Docencia de la Matemática
Docente tiempo completo, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales
Grupo MATTOPO

Wilson Gordillo Thiriat
Licenciado en Matemáticas, magíster en Docencia de la Matemática
Docente Tiempo Completo, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales
Grupo MATTOPO

Edilberto Sarmiento Sarmiento
Licenciado en Matemáticas, magíster en Ciencias Matemáticas
Docente tiempo completo, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales
Grupo MATTOPO

Fecha de recepción: marzo 21 de 2008
Fecha de aceptación: mayo 30 de 2008

Resumen

El uso de puntos de control y la generación de las mallas geodésicas permiten la elaboración de mapas y modelos cartográficos digitales de terreno. La elección de estos puntos se debe realizar en torno a un criterio de interpolación que permita minimizar la generación de errores en la elaboración de un modelo digital. Por tal razón, en el presente artículo se muestra que existe un único polinomio que interpola un conjunto finito de puntos del plano con abscisas distintas y se presentan algunas formas de obtener este polinomio; entre ellas, el polinomio de interpolación de Newton (1687), el polinomio de Lagrange (1775), el método matricial y el método de diferencias divididas.

Palabras claves: modelo digital, interpolación, elevación.

Summary

The use of checkpoints and the generation of the geodesic meshes allow the elaboration of maps and digital cartographic models of land. The election of these points should be carried out around an interpolation approach that allows to minimize the generation of errors in the elaboration of a digital model. For such a reason, presently I articulate it is shown that an only polynomial that interpolates a finite group of points of the plane with different abscissas exists and some forms are presented of obtaining this polynomial, the polynomial of interpolation of Newton are among them (1687), the polynomial of Lagrange (1775), the matrix method and the method of divided differences.

Key words: digital model, interpolation, increase.

[1] Enviar correspondencia a Wilson Pinzón Casallas, Avenida Circunvalar Venado de oro, tel. 0571-3376981, wjpinzonc@unidistritral.edu.co

1. Reseña histórica

La historia de la interpolación comienza con los matemáticos babilónicos y sus trabajos en las tablas exponenciales que, aunque presentan grandes huecos, no dudaban en interpolar linealmente o proporcionalmente para conseguir una aproximación a sus valores intermedios.

El desarrollo de la interpolación se entrelazó con los primeros desarrollos de las diferencias finitas, empezando por la cuadratura del círculo de Wallis en 1655, con la que propuso el principio de "intercálculo" o interpolación. Esto fue aceptado por Newton en 1676, lo cual le permitió la derivación de las series binómicas, es decir, a partir de un problema de cuadraturas, Newton pudo obtener el teorema binomial. Luego se continúa con la construcción de fórmulas prácticas de interpolación.

Aunque "la historia de las fórmulas de interpolación es complicada y muy discutida" (Bell, 1995, p. 421), se le puede considerar como un potente estímulo en los siglos XVII y XVIII para la evolución independiente de las operaciones fundamentales de la teoría clásica de las diferencias finitas, las cuales se desarrollaron principalmente para facilitar cálculos numéricos en astronomía, la creación de tablas y la cuadratura mecánica.

2. Interpolación polinominal

La interpolación polinómica es un método usado para conocer, de un modo aproximado, los valores que toma cierta función de la cual sólo se conoce su imagen en un número finito de abscisas. A menudo, ni siquiera se conocerá la expresión de la función y sólo se dispondrá de los valores que toma para dichas abscisas.

El objetivo será hallar un polinomio que cumpla lo antes mencionado y que permita hallar aproximaciones de otros valores desconocidos para la función con una precisión deseable fijada. Por ello, para cada polinomio interpolador se dispondrá de una fórmula de error que permita ajustar la precisión del mismo.

Se dispone de cinco métodos generales de interpolación polinómica que permiten aproximar una función por un polinomio de grado *n*. Los métodos de interpolación son el de Newton, el de Lagrange, usando matrices, el de diferencias divididas y el de diferencias divididas de orden superior.

3. Interpolación mediante funciones de una variable

Definición: sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de n puntos en R^2 tal que $x_i < x_j$ para $i < j$. Una función de interpolación correspondiente a estos datos es una función continua f tal que $f(x_i) = y_i$, $0 \le i \le n$.

Teorema: sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de $n + 1$ puntos. Si $x_i < x_j$ para $i < j$ entonces existe un único polinomio p de grado a lo más n tal que $p(x_i) = y_i$, para $0 \le i \le n$.

Demostración:

1) Probemos primero la unicidad:

Supongamos que existieran p y q polinomios distintos de grado menor o igual que n, con $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ para $0 \le i \le n$, luego $p - q$ tendría $n + 1$ raíces y por el teorema fundamental del álgebra se tiene $p - q = 0$ luego $p = q$.

2) Probemos ahora por inducción la existencia:

El paso $n = 0$ se cumple, pues existe el polinomio constante $p(x) = y_0$ que satisface la condición $p(x_0) = y_0$.

Supongamos ahora que se ha obtenido un polinomio p_{k-1} de grado menor o igual a k, con $p_{k-1}(x_i)=y_i$ para $0 \le i \le k - 1$.

El polinomio $p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$ es un polinomio de grado menor o igual a k que interpola los mismos datos que $p_{k-1}(x)$ y también debe interpolar el dato (x_k, y_k), así:

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) = y_k$$

despejando c_k obtenemos:

$c_k = y_k - p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})$, el denominador de esta fracción no es nulo, pues $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i, j \leq k$.

Así, el polinomio anterior $p_k(x)$ satisface $p_k(x_i) = y_i,\ 0 \leq i \leq k$.

Note que los polinomios $p_0, p_1, \ldots, p_n$ generados en la demostración anterior tienen la propiedad de que cada p_k se obtiene de p_{k-1} agregándole un sumando, con ello al final del proceso p_n estará formado por una suma de términos y cada p_i será visible en la expresión de p_n. El k-ésimo polinomio se puede expresar:

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)\ldots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

En forma compacta:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

donde adoptamos la convención

$$\prod_{j=0}^{m} (x - x_j) = 1, \text{ si } m < 0.$$

4. Polinomio de interpolación de Newton

Los polinomios $p_k(x)$ obtenidos antes

$p_0(x) = c_0$

$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$

$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$

…

$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)\ldots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$

reciben el nombre de polinomios de interpolación de Newton.

Los coeficientes c_k se obtienen iterando sucesivamente al sustituir los valores de x_k en el polinomio $p_k(x)$ y despejando:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)} \quad c_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_i)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

Ejemplo: calcular el polinomio de interpolación para los siguientes datos:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	1	3	4
y	2	5	8	12
	y_0	y_1	y_2	y_3

Solución:

$c_0 = 2$, $p_0(x) = 2$ $c_1 = ((5 - 2)/((1+1))) = (3/2)$ $p_1(x) = 2 + (3/2)(x+1)$,

$p_1(3) = 8$ $p_1(x) = p_2(x)$

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad c_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

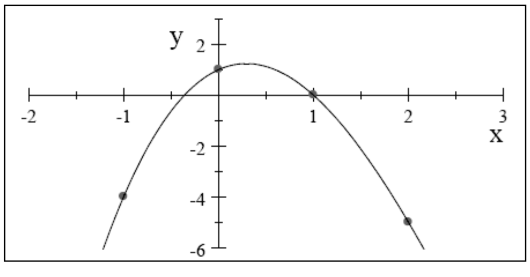
$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

$$c_2 = 0, \qquad p_2(4) = \frac{19}{2},$$

$$c_3 = \frac{12 - \frac{19}{2}}{5*3*1} = \frac{1}{6}$$

El polinomio de interpolación

$$p_3(x) = 2 + \tfrac{3}{2}(x+1) + \tfrac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-3)$$



5. Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

El polinomio de interpolación en la forma de Lagrange es:

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

Donde las funciones $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ son polinomios que dependen de las abscisas $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, como cada polinomio p_n interpola los puntos se tiene:

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j) = y_0 l_0(x_j) + y_1 l_1(x_j) + \cdots + y_j l_j(x_j) + \cdots + y_n l_n(x_j) = y_j,$$

luego $l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j \end{cases}$.

Así que deben hallarse *n+1* polinomios con esta propiedad, estos se pueden construir así:

$$l_k(x) = c\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} (x - x_i)$$

$$l_k(x_k) = c\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} (x_k - x_i) = 1$$

$$c = \frac{1}{\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$l_k(x_k) = c\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} (x_k - x_i) = 1$$

Estas funciones son conocidas como funciones cardinales.

Ejemplo: encuentre el polinomio que interpola los datos

	x_0	X_1	x_2	x_3
x	-1	0	1	2
y	-4	1	0	-5
	y_0	y_1	y_2	y_3

usando la fórmula de Lagrange

$$l_0(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x\,(x-1)\,(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)1(1-2)} = -\frac{1}{2}x\,(x+1)\,(x-2)$$

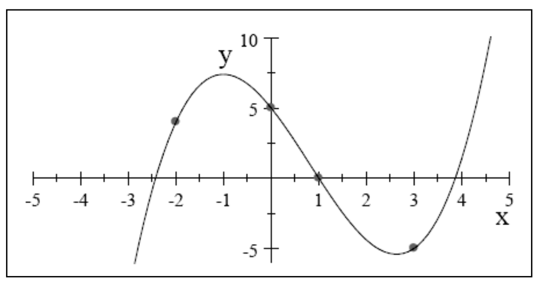
$$l_3(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2(2-1)} = \frac{1}{6}\,(x+1)\,(x-1)x$$

así

$$p_3(x) = -4l_0(x) + l_1(x) + 0l_2(x) - 5l_3(x)$$

$$= \frac{2}{3}x\,(x-1)\,(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{5}{6}\,(x+1)\,(x-1)x$$

$$= \frac{2}{3}x\,(x-1)\,(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{5}{6}\,(x+1)\,(x-1)x$$



6. Polinomio de interpolación usando matrices

La forma usual de un polinomio es:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, si el polinomio interpola los puntos se tiene:

$p(x_k) = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_n x_k^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = y_k$ $0 \leq k \leq n$ esto es un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas que en forma matricial se representa:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

que tiene solución única, puesto que el determinante de la matriz (determinante de Vandermonde) es diferente de 0 si los x_i son todos distintos.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

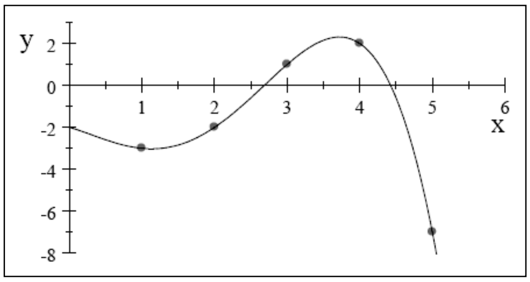
Ejemplo: hallar el polinomio que interpola los siguientes puntos:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-2	1	0	3
y	4	0	5	-5
	y_0	y_1	y_2	Y_3

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{127}{30} \\ -\frac{13}{10} \\ \frac{8}{15} \end{bmatrix}$$

El polinomio es:

$$p(x) = 5 - \tfrac{127}{30}x - \tfrac{13}{10}x^2 + \tfrac{8}{15}x^3$$



7. Interpolación polinominal por el método de diferencias divididas

Retomamos el problema de interpolar un conjunto de puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ tal que si $i \neq j$, entonces $x_i \neq x_j$. Por la teoría anterior sabemos que existe un único polinomio p de a lo más grado n que interpola a f en estos puntos, es decir $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$.

El polinomio p se puede escribir como una combinación lineal de los polinomios básicos

$$q_0(x) = 1,\ q_1(x) = x - x_0, q_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \ldots, q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Esto nos conduce al polinomio de interpolación de Newton:

$$p(x) = c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) + \cdots + c_n q_n(x)$$

Las condiciones de interpolación dan lugar a un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales:

$$p(x_i) = c_0 q_0(x_i) + c_1 q_1(x_i) + c_2 q_2(x_i)$$
$$c_2 q_2(x) + \cdots + c_n q_n(x), 0 \leq i \leq n.$$

En este sistema la matriz A de coeficientes de tamaño $(n+1)\times(n+1)$ tiene por elementos $a_{ij} = q_j(x_i)$ $0 \leq i, j \leq n$, esta matriz es triangular inferior, pues:

$q_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})$ y $q_j(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{j-1})$ si $i < j$.

Ejemplo: supongamos que se tienen tres puntos:
$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$. *p(x)* = $c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$, el sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{aligned}
p(x_0) &= c_0 && = f(x_0) \\
p(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) && = f(x_1) \\
p(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + \\
&\quad c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) && = f(x_2)
\end{aligned}
$$

equivalente a:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}
$$

Para resolver este sistema vamos de arriba hacia abajo sustituyendo.

En este proceso vemos que: $c_0 = f(x_0)$, c_1 solo depende de $f(x_0)$ y $f(x_1)$,…, c_n depende de $f(x_0), f(x_1),...,f(x_n)$.

La notación $c_n = f[x_0,x_1,...,xn]$ es la más adecuada y la notación usual para los coeficientes en el polinomio de interpolación.

Estos coeficientes así notados se denominan diferencias divididas y su nombre es natural debido a que si tenemos solo dos nodos, el polinomio de interpolación para estos es la recta que pasa por ellos:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

así que $f[x_0] = f(x_0)$ y $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Si usamos la notación de diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Newton se escribe

8. $p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_j]$

$$q_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

9. Fórmula de recurrencia para las diferencias divididas

Las diferencias divididas satisfacen

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] =$$

Demostración:

Sean $p_n(x)$ el polinomio que interpola los puntos $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{n}$, $p_{n-1}(x)$ el polinomio que interpola los puntos $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{n-1}$ y $q(x)$ y *q(x)* el polinomio que interpola los puntos $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1}^{n}$. Estos polinomios satisfacen la relación:
$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(q(x) - p_{n-1}(x))$

Esta igualdad se satisface debido a que $p_n(x)$ y $q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(q(x) - p_{n-1}(x))$ tienen ambos grado menor o igual a *n* y son iguales en los puntos $\{(x_k)\}_{k=0}^{n}$, en efecto:

$$
\begin{aligned}
&p_n(x_0) = f(x_0), \quad q(x_0) + \tfrac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}(q(x_0) - \\
&\qquad p_{n-1}(x_0)) = p_{n-1}(x_0) = f(x_0) \\
&\text{si} \quad 1 < k < n \\
&p_n(x_k) = f(x_k), \quad q(x_k) + \tfrac{x_k - x_n}{x_n - x_0}(q(x_k) - \\
&p_{n-1}(x_k)) = q(x_k) = f(x_k). \\
&p_n(x_n) = f(x_n), \quad q(x_n) + \tfrac{x_n - x_n}{x_n - x_0}(q(x_n) - \\
&p_{n-1}(x_n)) = q(x_n) = f(x_n).
\end{aligned}
$$

Ahora el coeficiente de $p_n(x)$ es $f[x_0,x_1,...,x_n]$, el coeficiente de $q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}$ $q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}$ es el coeficiente de $\frac{(x - x_n)q(x) - (x - x_n)p_{n-1}(x)}{x_n - x_0}$, $f[x_0,x_1,...,x_n]$ es el coeficiente principal de *q(x)*, que es el mismo coeficiente principal de $(x-x_n)q(x)$, $f[x_0,x_1,...,x_{n-1}]$ es el coeficiente principal de $p_{n-1}(x)$, que es el mismo coeficiente principal de$(x-x_n)p_{n-1}(x)$, en conclusión:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Este resultado nos permite hallar los coeficientes del polinomio de interpolación de forma recurrente como lo indica la siguiente tabla:

$$\begin{array}{|c|c||c|c|}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & f[x_2,x_3,x_4] \\
x_3 & f[x_3] & f[x_3,x_4] & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-1},x_n] & \\
x_n & f[x_n] & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}
f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \cdots & f[x_0,x_1,x_2,x_3 \dots x_n] \\
f[x_1,x_2,x_3,x_4] & & \\
\vdots & &
\end{array}$$

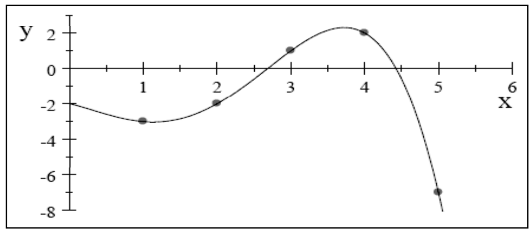
Ejemplo: utilizando la fórmula de recurrencia obtenida en el teorema anterior encuentre las diferencias divididas para el polinomio que interpola los puntos:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3	-2	1	2	-7

$$\begin{array}{cc|cccc}
1 & -3 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\
2 & -2 & 3 & -1 & -\frac{4}{3} & \\
3 & 1 & 1 & -5 & & \\
4 & 2 & -9 & & & \\
5 & -7 & & & &
\end{array}$$

Y el polinomio de interpolación es:

$$p(x) = -3 + (x-1) + (x-1)(x-2) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$



Bibliografía

1. Bell, E., *Historia de las matemáticas*, México, Fondo de cultura económica, 1995.
2. Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza editorial, 1999.
3. Kincaid D. y Cheney, W., *Análisis numérico*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
4. Aubanell, A., Benseny, A. Delshams, A., *Útiles básicos de Cálculo Numérico*, Barcelona, Labor/Publicaciones de la UAB, 1993.
5. Ortega, J., *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*, 2ª ed., Barcelona, Publicaciones de la UAB, 2002.