Visión Electrónica Vol. 8 No. 2 (2014) • Julio-Diciembre • p.p. 9-18 • ISSN 1909-9746 • ISSN-E 2248-4728 • Bogotá (Colombia)

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Visión Electrónica
Más que un estado sólido

http: revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/visele/index

VISIÓN ELECTRÓNICA

Visión Investigadora

Homogeneización reiterada de un problema de contorno unidimensional

Reiterated homogenization of a two-point boundary value problem

Frank Ernesto Alvarez[a], ***Julián Bravo Castillero***[b], ***Raúl Guinovart Díaz***[c], ***Leslie D. Pérez Fernández***[d], ***y Reinaldo Rodríguez Ramos***[e]

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Enviado: Noviembre de 2014
Recibido: Noviembre de 2014
Aceptado: Diciembre de 2014

Palabras clave:
Homogeneización reiterada
Contacto perfecto
Condiciones de continuidad en la interfaz

RESUMEN

El método de homogeneización asintótica es aplicado para homogeneizar una familia unidimensional de problemas elípticos, con coeficientes periódicos y rápidamente oscilantes que dependen de dos variables rápidas. El problema homogeneizado, los problemas locales y los correspondientes coeficientes efectivos son obtenidos. Una condición necesaria y suficiente para la construcción de una solución asintótica con términos periódicos es demostrada. Basados en el principio del máximo, se demuestra la proximidad entre la solución del problema homogeneizado y la del problema original. Se propone un ejemplo numérico para ilustrar la justificación matemática.

Keywords:
Reiterated homogenization
Perfect contact
Continuity conditions on the interface

ABSTRACT

The asymptotic homogenization method is applied to homogenize a one-dimensional family of elliptic boundary value problems with periodic and rapidly oscillating coefficients which depend on two fast variables. The homogenized problem, the local problems and the corresponding effective coefficient are obtained. A necessary and sufficient condition for constructing an asymptotic solution with periodic terms is demonstrated. Based on a Maximum Principle the proximity between the solutions of the homogenized and original problems is proved. Some numerical computations are used to illustrate the mathematical justification.

[a]Estudiante del último año de Licenciatura en Matemática. Facultad de Matemática y Computación , Universidad de La Habana, La Habana, Cuba
[b]Facultad de Matemática y Computación , Universidad de La Habana, San Lázaro y L, CP 10400, La Habana, Cuba. e-mail: jbravo@matcom.uh.cv
[c]Facultad de Matemática y Computación , Universidad de La Habana, San Lázaro y L, CP 10400, La Habana, Cuba
[d]Departamento de Matemática e Estatística, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas. Campus Universitário Capão do Leão s/nº, Pelotas-RS, Caixa Postal 354, CEP 96010-971, Brazil
[e]Facultad de Matemática y Computación , Universidad de La Habana, San Lázaro y L, CP 10400, La Habana, Cuba

Citar este artículo como: F. E. Alvarez, J. B. Castillero, R. G. Díaz, L. D. Pérez & R. R. Ramos. "Homogeneización reiterada de un problema de contorno unidimensional". Revista Visión Electrónica, algo más que un estado sólido. Vol. 8, No. 2, pinicial-pfinal, Julio-Diciembre de 2014.

1. Introducción

Frecuentemente en la modelación de problemas prácticos de diferente naturaleza aparece una regularidad que involucra la interacción de múltiples escalas espaciales y temporales con escalas físicas que actúan desde niveles atómicos hasta los más perceptibles.

En general, los modelos matemáticos asociados a estos problemas están determinados por una familia de ecuaciones del tipo $L^\varepsilon u^\varepsilon = f$ dependientes de un conjunto de parámetros pequeños $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)$ que representan el tamaño de las escalas involucradas. La aplicación de adecuados métodos matemáticos que permitan interpretar qué acontece en cada uno de estos niveles y cómo están interconectados representa un problema de interés actual en diferentes ramas de la ciencia y la técnica.

El estudio numérico directo de tales ecuaciones requiere de una malla extremadamente fina que hace prácticamente imposible el éxito de su implementación computacional.

Sin embargo, el método de homogeneización reiterada que fue desarrollado en [1] para operadores elípticos escalares ($L^\varepsilon = \mathrm{div}_x(A^\varepsilon(x))\mathrm{grad}_x$)) donde el tensor de segundo rango $A^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon_1, \ldots, x/\varepsilon_N)$ tiene componentes periódicos y rápidamente oscilantes) garantiza el paso a una ecuación homogeneizada $L^0 u^0 = f$ con ($L^0 = \mathrm{div}_x(A^0(x))\mathrm{grad}_x$)) independiente de los parámetros $\varepsilon_i (i = 1, \ldots, N)$, mientras que la solución u^0 está próxima a la familia de soluciones u^ε cuando los ε_i tienden hacia cero.

El tensor $A^0(x)$ es llamado tensor de los coeficientes efectivos u homogeneizados. Esta variante escalar del operador L^ε aparece, por ejemplo, en aplicaciones de transferencia de calor en régimen estacionario donde $u^\varepsilon(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ denota la temperatura en cada punto x del medio heterogéneo Ω^ε; el dato $f = f(x)$ es una fuente de calor; y $A^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon_1, \ldots, x/\varepsilon_N)$ es la conductividad térmica.

Otro ejemplo importante para esta familia de ecuaciones corresponde al caso de homogeneización en medios porosos (o sea cuando Ω^ε es un dominio perforado) por sus aplicaciones en geofísica o en ingeniería petrolera (ver, por ejemplo [2]), en donde el enfoque de escalas múltiples toma en cuenta las longitudes de los poros (o fracturas) que están presentes en los medios porosos reales.

Este trabajo constituye una introducción matemática al estudio del método de homogeneización reiterada a través del problema unidimensional:

$$L^\varepsilon u^\varepsilon \equiv -\frac{d}{dx}(a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)\frac{du^\varepsilon}{dx}) = f(x),\ \forall x \in \Omega = (0,1),$$

con $u^\varepsilon(0) = u_0$ y $u^\varepsilon(1) = u_1$, donde u_0 y u_1 son ambos números reales, $a(y,z)$ es una función real 1-periódica respecto a cada variable, positiva y acotada, $y = x/\varepsilon$, $z = y/\varepsilon$, $\varepsilon = 1/n$, con n natural. Además, f es una función continua dada.

2. Condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución 1-periódica de la ecuación $LN = F$

Se comenzará demostrando el siguiente **Lema**, el cual será la base de todo el proceso que se realizará más adelante:

Lema 1

Sean $a(y,z)$, $F_0(y,z)$ y $F_1(y,z)$ funciones diferenciables a trozos, que presentan discontinuidades de salto finito para $z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, $0 < z_j < 1$. Además son 1-periódicas con respecto a ambas variables z, con $a(y,z)$ mayor que cero y acotada sobre $[0,1] \times [0,1]$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución 1-periódica con respecto a z y que además, para todo j entre 1 y n, cumple las siguientes condiciones de contacto:

$$[[N(y,z)]]\Big|_{z=z_j} = 0, \quad (1)$$

$$\left[\left[a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\right]\right]\Big|_{z=z_j} = 0, \quad (2)$$

de la ecuación:

$$LN = F_0 + \frac{\partial}{\partial z}F_1, \quad (3)$$

para $z \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ es:

$$\langle F_0(y,z)\rangle_z = 0.$$

Aquí $L = \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\dfrac{\partial}{\partial z}\ \Big)$, $\langle F_0(y,z)\rangle_z = \displaystyle\int_0^1 F_0(y,z)dz$ y $[[N(y,z)]]\Big|_{z=z_j} = N(y, z_j^+) - N(y, z_j^-)$.

Demostración:

Necesidad:

Sea $N(y,z)$ una solución 1-periódica de (3) que satisface las condiciones (1) y (2). Entonces $LN = F_0 + \dfrac{\partial}{\partial z}F_1$

es una identidad, y después de integrar de 0 a 1 con respecto a z, se obtiene $\langle LN\rangle_z = \langle F_0 + \frac{\partial}{\partial z}F_1\rangle_z$, de donde resultan

$$\begin{aligned}
\langle F_0\rangle_z &= \langle LN - \frac{\partial}{\partial z}F_1\rangle_z,\\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)dz,\\
&= \int_0^{z_1} \frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)dz\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)dz\\
&\quad + \int_{z_n}^{1} \frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)dz,\\
&= \Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z=1}\\
&\quad - \Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z=0}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z_i^-}\\
&\quad - \Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z_i^+}\Big].
\end{aligned}$$

En esta última expresión, debido a la condición (2), el término correspondiente a la sumatoria se anulará, llevando a la igualdad

$$\begin{aligned}
\langle F_0(y,z)\rangle_z &= \Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z=1}\\
&\quad - \Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\Big)\Big|_{z=0},
\end{aligned}$$

y, por tanto, la periodicidad de $a(y,z)$, $N(y,z)$ y $F_1(y,z)$ implica que $\langle F_0\rangle_z = 0$.
Suficiencia:

Se obtendrá la solución 1-periódica que satisface (1) y (2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_0(y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(a(y,t)\frac{\partial}{\partial t}N(y,t) - F_1(y,t)\Big),\\
\int_0^z F_0(y,t)dt &= \int_0^z \frac{\partial}{\partial t}\Big(a(y,t)\frac{\partial}{\partial t}N(y,t) - F_1(y,t)\Big)dt,\\
&= a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z)\\
&\quad -a(y,0)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z)\Big|_{z=0} + F_1(y,0),\\
&= a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z) - c_1(y),
\end{aligned}$$

donde $c_1(y) = a(y,0)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z)\Big|_{z=0} - F_1(y,0)$. Nótese que como el miembro derecho de esta última igualdad es una función definida por una integral con límite superior variable, será continua con respecto a z, es decir, para todo $y \in [0,1]$, la función

$$\int_0^z F_0(y,t)dt + c_1(y) = a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) - F_1(y,z),$$

es continua con respecto a z, y por lo tanto se cumple la condición (2). A partir de ahora será utilizada la notación

$$\frac{1}{a(y,s)}\Big[\int_0^s F_0(y,t)dt + F_1(y,s) + c_1(y)\Big] = f(y,z),$$

de este modo si se continúa con el proceso para hallar $N(y,z)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}N(y,z) &= \frac{1}{a(y,z)}\Big[\int_0^z F_0(y,t)dt + F_1(y,z) + c_1(y)\Big],\\
&= f(y,z)\\
N(y,z) &= \int_0^z f(y,s)ds + c_2(y),
\end{aligned}$$

donde $c_2(y)$ es una función diferenciable arbitraria. De nuevo, el miembro derecho es una función definida por una integral con límite superior variable, por lo tanto $N(y,z)$ será continua para todo z y así se satisface la condición (2.1). Ahora solo basta encontrar $c_1(y)$ tal que $N(y,z)$ sea, de hecho, 1-periódica con respecto a z. Para ello es necesario que

$$N(y,z+1) - N(y,z) = \int_z^{z+1} f(y,s)ds = 0. \quad (4)$$

Pero como se cumple que $f(y,s+1) = f(y,s)$, entonces $\int_z^{z+1} f(y,s)ds = \int_0^1 f(y,z)dz$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&f(y,s+1) - f(y,s)\\
&= \frac{1}{a(y,s+1)}\int_0^{s+1} F_0(y,t)dt + F_1(y,s+1) + c_1(y)\\
&\quad -\Big(\frac{1}{a(y,s)}\int_0^s F_0(y,t)dt + F_1(y,s) + c_1(y)\Big),\\
&= \frac{1}{a(y,s)}\Big[\int_0^{s+1} F_0(y,t)dt - \int_0^s F_0(y,t)dt\Big],\\
&= \frac{1}{a(y,s)}\Big[\int_s^{s+1} F_0(y,t)dt\Big],\\
&= \frac{1}{a(y,s)}\Big[\int_0^1 F_0(y,s)ds\Big],\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así $f(y,s+1) = f(y,s)$ como era requerido. Cada uno de estos pasos es justificado por la periodicidad de

$F_0(y,z)$, $F_1(y,z)$ y $a(y,z)$, además de la hipótesis de que $\langle F_0(y,z)\rangle_z = 0.$, Entonces, volviendo a (4):

$$\begin{aligned}
0 &= N(y,z+1) - N(y,z),\\
&= \int_0^1 f(y,s)dz,\\
&= \int_0^1 \Big[\frac{1}{a(y,z)}\Big(\int_0^z F_0(y,t)dt + F_1(y,z)\Big)\Big]dz\\
&\quad +c_1(y)\int_0^1 \frac{1}{a(y,z)}dz,\\
&= \langle a^{-1}(y,z)\Big(\int_0^z F_0(y,t)dt + F_1(y,z)\Big)\rangle_z\\
&\quad +c_1(y)\langle a^{-1}(y,z)\rangle_z,
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$c_1(y) = -\frac{\langle a^{-1}(y,z)\Big(\int_0^z F_0(y,t)dt + F_1(y,z)\Big)\rangle_z}{\langle a^{-1}(y,z)\rangle_z}.$$

Luego, ha sido demostrada la existencia de una familia de funciones $\tilde{N}(y,z)$ que se diferencian en una función diferenciable $c_2(y)$ y satisfacen las condiciones (1) a la (3).

Observación

Si en las hipótesis del problema se tiene la periodicidad con respecto a y de todas las funciones involucradas, entonces la familia de soluciones $\tilde{N}(y,z)$ también será periódica con respecto a este parámetro si se le exige la periodicidad a la función $c_2(y)$.

Corolario 1

Bajo las mismas hipótesis que en el **Lema 1**, si existe solución 1-periódica con respecto a z de

$$LN = F_0 + \frac{\partial}{\partial z}F_1,$$

entonces

$$\int_0^1\int_0^1 F(y,z)dydz = 0.$$

3. Expansión asintótica

Sean $a(y,z)$ una función infinitamente diferenciable para todo y y z excepto para $y \in \{y_i\}_{i=1}^k$ y $z \in \{z_i\}_{i=1}^l$ y 1-periódica con respecto a ambas variables, que satisface la desigualdad $0 < \alpha < a(y,z) < \beta$ (donde α y β son constantes reales), $f(x)$ una función real infinitamente diferenciable determinada en $[0,1]$ y $\varepsilon = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. A continuación se expondrá el método de construcción de una solución asintótica formal (s.a.f.) de una solución del problema:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}(a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)\frac{du^\varepsilon}{dx}) &= f(x), && (5)\\
[[u(x)]]\Big|_{x=x_{ij}^m} &= 0, && (6)\\
\Big[\Big[a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)\frac{du^\varepsilon}{dx}\Big]\Big]\Big|_{x=x_{ij}^m} &= 0. && (7)
\end{aligned}$$

en $\Omega = (0,1)$ y con las condiciones $u^\varepsilon(0) = u_0$ y $u^\varepsilon(1) = u_1$, donde $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. Aquí x_{ij}^m representa las discontinuidades de la función $a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)$ en el intervalo $(0,1)$:

$$\begin{aligned}
x_{ij}^1 &= \varepsilon\cdot(y_i + j),\ \ i = 1,\dots,k\ \ j = 0,\dots,n-1,\\
x_{ij}^2 &= \varepsilon^2\cdot(z_i + j),\ \ i = 1,\dots,l\ \ j = 0,\dots,n^2-1.
\end{aligned}$$

Se desarrolla $u^\varepsilon(x)$ en una serie en potencias de ε considerando $y = x/\varepsilon$ y $z = x/\varepsilon^2$ se trunca después del término de orden 4, es decir se considera $u^\varepsilon(x) \approx u^{(4)}(x,y,z)$, con

$$\begin{aligned}
u^{(4)}(x,y,z) &= u_0(x,y,z) + \varepsilon u_1(x,y,z) + \varepsilon^2 u_2(x,y,z)\\
&\quad +\varepsilon^3 u_3(x,y,z) + \varepsilon^4 u_4(x,y,z). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Luego se sustituye (6) en la ecuación (5) y en las condiciones (6) y (7), se aplica la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial z},$$

se agrupan todos los términos en potencias de ε y se igualan a cero los coeficientes de dichas potencias que tengan exponentes no positivos. El resto de los términos es despreciable cuando ε tiende a 0.

Luego de realizar este proceso y adoptando la notación $L_{\alpha\beta}u = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(a(y,z)\dfrac{\partial u}{\partial\beta})$ con $\alpha,\beta = x,y,z$, se obtiene el siguiente conjunto de problemas recurrentes correspondientes a cada una de las potencias de ε:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-4} : L_{zz}u_0 &= 0,\\
\varepsilon^{-3} : L_{zz}u_1 &= -L_{zy}u_0 - L_{yz}u_0,\\
\varepsilon^{-2} : L_{zz}u_2 &= -L_{zy}u_1 - L_{zx}u_0 - L_{yz}u_1\\
&\quad -L_{yy}u_0 - L_{xz}u_0,\\
\varepsilon^{-1} : L_{zz}u_3 &= -L_{zy}u_2 - L_{zx}u_1 - L_{yz}u_2 - L_{yy}u_1\\
&\quad L_{yx}u_0 - L_{xz}u_1 - L_{xy}u_0,\\
\varepsilon^{0} : L_{zz}u_4 &= -L_{zy}u_3 - L_{zx}u_2 - L_{yz}u_3 - L_{yy}u_2\\
&\quad -L_{yx}u_1 - L_{xz}u_2 - L_{xy}u_1\\
&\quad -L_{xx}u_0 - f(x),
\end{aligned}$$

con las siguientes condiciones:

Para ε^{-2}:

$$\left[\left[a(y,z)\frac{\partial u_0}{\partial z}\right]\right]\Big|_{y=y_i} = 0, \quad (9)$$

$$\left[\left[a(y,z)\frac{\partial u_0}{\partial z}\right]\right]\Big|_{z=z_j} = 0. \quad (10)$$

Para ε^{-1}:

$$\left[\left[a(y,z)\Big(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\Big)\right]\right]\Big|_{y=y_i} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\left[a(y,z)\Big(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\Big)\right]\right]\Big|_{z=z_j} = 0. \quad (12)$$

Para ε^{0}:

$$[[u_0]]\Big|_{y=y_i} = 0, \quad (13)$$

$$[[u_0]]\Big|_{z=z_j} = 0, \quad (14)$$

$$\left[\left[a(y,z)\Big(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Big)\right]\right]\Big|_{y=y_i} = 0, \quad (15)$$

$$\left[\left[a(y,z)\Big(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Big)\right]\right]\Big|_{z=z_j} = 0. \quad (16)$$

A continuación serán analizados cada uno de estos problemas.

Problema para ε^{-4}:

En este caso se cumplen las hipótesis del Lema 1,por lo cual existe una solución 1-periódica del problema. Como la función nula es solución de este problema, el problema tendrá una familia de soluciones de la forma

$$u_0(x,y,z) = v(x,y). \quad (17)$$

con $v(x,y)$ diferenciable por tramos.

Problema para ε^{-3}:

El resultado obtenido en el problema anterior, reduce el presente problema a la ecuación

$$L_{zz}u_1 = -L_{zy}u_0,$$

es decir, $u_1(x,y,z)$ es solución de

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}u_1(x,y,z)\Big) = -\frac{\partial}{\partial z}a(y,z)\cdot\frac{\partial}{\partial y}v(x,y),$$

Esta ecuación también cumple las hipótesis del Lema 1 por lo que existirá una familia de soluciones 1-periódicas con respecto a z. Aplicando el método de separación de variables, se puede considerar una solución de la forma

$$u_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)N_1(y,z) + w(x,y) \quad (18)$$

donde $N_1(y,z)$ es una solución 1-periódica de

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z) + a(y,z)\Big) = 0.$$

Antes de pasar al próximo problema, nótese que de esta ecuación se infiere que

$$a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z) + a(y,z) = \hat{a}(y),$$

donde $\hat{a}(y)$ es una función diferenciable a trozos. Para determinar el valor de esta función, se dividirá entre $a(y,z)$ ambos miembros y se integrará de 0 a 1 con respecto a z, de donde se obtiene

$$\langle\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z)+1\rangle_z = \langle\frac{\hat{a}(y)}{a(y,z)}\rangle_z,$$

$$N_1(y,z)\Big|_{z=0}^{1} + 1 = \hat{a}(y)\langle\frac{1}{a(y,z)}\rangle_z.$$

Luego, por la periodicidad de N_1, se tiene que

$$1 = \hat{a}(y)\langle\frac{1}{a(y,z)}\rangle_z.$$

y por tanto

$$\hat{a}(y) = \langle a^{-1}(y,z)\rangle_z^{-1}.$$

Entonces, por las hipótesis impuestas sobre $a(y,z)$ se puede asegurar que $\hat{a}(y)$ es 1-periódica con respecto a y, además de positiva y acotada en todo $[0,1]$. Además tendrá a lo sumo discontinuidades de salto finito para $y \in \{y_i\}_{i=1}^{k}$.

Problema para ε^{-2}:

Antes de comenzar con el análisis de esta ecuación debe notarse que en este problema también se incluyen las condiciones (3.5) y (3.6), pero en virtud de (3.13), todas quedan satisfechas.
Por este mismo resultado, se cumple que $L_{xz}u_0 = 0$, así que la ecuación se reduce a

$$L_{zz}u_2 = -L_{zy}u_1 - L_{zx}u_0 - L_{yz}u_1 - L_{yy}u_0.$$

Aplicando nuevamente el Lema 1, y en virtud de que $\langle L_{zy}u_1\rangle_z = \langle L_z x u_0\rangle_z = 0$ ya que las funciones involucradas son 1-periódicas con respecto a z, se tiene que existirá solución 1-periódica de esta ecuación si y solo si

$$\langle L_{yz}u_1 - L_{yy}u_0\rangle_z = 0,$$

es decir, si se cumple

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial z}u_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}u_0(x,y)\Big]\Big)dz = 0. \quad (19)$$

Sustituyendo (17) y (18) en (19):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\cdot N_1(y,z) \\
+w(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\Big]\Big)dz &= 0, \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\cdot \frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z) \\
+\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\Big]\Big)dz &= 0, \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z)+1\Big]\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\Big)dz &= 0, \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}v(x,y))dz &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}(\hat{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)) &= 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Es decir, la ecuación correspondiente a ε^{-2} tiene solución si y solo si existe solución de (20), pero a esta última ecuación se le puede aplicar el Lema 1, ya que $\hat{a}(y)$ es acotada, positiva y periódica. De este modo, existirá una familia de soluciones 1-periódicas con respecto a y y como la función nula satisface la igualdad, la solución será de la forma

$$v(x,y) = v(x). \tag{21}$$

Este resultado es muy importante, porque ahora las funciones $u_0(x,y,z)$ y $u_1(x,y,z)$, vienen dadas por

$$u_0(x,y,z) = v(x), \tag{22}$$
$$u_1(x,y,z) = w(x,y), \tag{23}$$

respectivamente.

La ecuación correspondiente a ε^{-2} ahora ha sido reducida a la expresión

$$L_{zz}u_2 = -L_{zy}u_1 - L_{zx}u_0, \tag{24}$$

Se puede comprobar que la familia de funciones de la forma

$$u_2(x,y,z) = \Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{dv}{dx}\Big)N_1(y,z) + c_1(x,y), \tag{25}$$

donde $c_1(x,y)$ es diferenciable por tramos, satisfacen la igualdad (24). Más adelante se darán condiciones para determinar esta función.

Problema para ε^{-1}:

En este caso vienen incluidas las condiciones (15) y (16), pero en virtud de (22) y (23), todas quedan satisfechas. Como se cumple que $L_{xz}u_1 = L_{xy}u_0 = 0$, la ecuación queda reducida a

$$L_{zz}u_3 = -L_{zy}u_2 - L_{zx}u_1 - L_{yz}u_2 - L_{yy}u_1 - L_{yx}u_0.$$

Al aplicar el Lema 1, y utilizando el hecho de que $\langle L_{zy}u_2\rangle_z = \langle L_{zx}u_1\rangle_z = 0$, existirá solución 1-periódica con respecto a z si y solo si

$$\begin{aligned}
\langle L_{yz}u_2 + L_{yy}u_1 + L_{yx}u_0\rangle_z &= 0 \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial z}u_2 + \frac{\partial}{\partial y}u_1 + \frac{\partial}{\partial x}u_0\Big]\Big)dz &= 0, \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y,z)\Big[\frac{\partial}{\partial z}N_1+1\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial y}w + \frac{d}{dx}v\Big]\Big)dz &= 0, \\
\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\hat{a}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial y}w(x,y) + \frac{d}{dx}v(x)\Big]\Big)dz &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}\Big(\hat{a}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial y}w(x,y) + \frac{d}{dx}v(x)\Big]\Big) &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Si se considera

$$w(x,y) = M(y)\frac{d}{dx}v(x) + c_2(x), \tag{27}$$

con $c_2(x)$ diferenciable a trozos y $M(y)$ una solución 1-periódica de

$$\frac{d}{dy}\Big(\hat{a}(y)\Big[\frac{d}{dy}M(y)+1\Big]\Big) = 0,$$

entonces se satisface (20).

Nótese que

$$\hat{a}(y)\frac{d}{dy}M(y) + \hat{a}(y) = \tilde{a},$$

con $\tilde{a}$ real. Dicho valor puede ser hallado dividiendo entre $a(y)$, integrando de 0 a 1 con respecto a y y utilizando la periodicidad de $M(y)$ (propiedad que será demostrada más adelante). Siguiendo este procedimiento se llega a que

$$\tilde{a} = \int_0^1\int_0^1 a^{-1}(y,z)dydz.$$

Finalmente, una expresión para $u_2(x,y,z)$ sería

$$u_2(x,y,z) = \Big(\frac{d}{dy}M+1\Big)\cdot\frac{d}{dx}v\cdot N_1 + c_1(x,y). \tag{28}$$

Problema para ε^0:
Las condiciones (13) y (14) quedan satisfechas debido a la no dependencia de $u_0(x,y,z)=v(x)$, con respecto a las variables y o z. Por otro lado tras sustituir (22), (23) y (28) en las condiciones (15) y (16), éstas quedan reducidas a

$$\begin{aligned}\left[\left[\tilde{a}\frac{d}{dx}v(x)\right]\right]\Big|_{y=y_i} &= 0,\\ \left[\left[\tilde{a}\frac{d}{dx}v(x)\right]\right]\Big|_{z=z_j} &= 0,\end{aligned}$$

y ambas se satisfacen debido a la independencia con respecto a y y a z de $\tilde{a}\dfrac{d}{dx}v(x)$.

Antes de continuar, se plantearán los problemas locales relacionados con este proceso. Dichos problemas, en virtud del Lema 1, garantizan la existencia de las funciones $N_1(y,z)$ y $M(y)$ antes mencionadas, así como su periodicidad junto con el cumplimiento de determinadas condiciones de contacto. Además, dan las condiciones para determinar las funciones $c_1(x,y)$ y $c_2(x)$ presentes en (24) y (26) respectivamente:

Primer Problema Local

Determinar la solución $N_1(y,z)$ de

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z)+a(y,z)\Big)=0,$$

con las condiciones de contacto

$$\begin{aligned}[[N_1(y,z)]]\Big|_{z=z_j} &= 0,\\ \left[\left[a(y,z)\frac{\partial}{\partial z}N_1(y,z)+a(y,z)\right]\right]\Big|_{z=z_j} &= 0,\end{aligned}$$

y las condiciones de frontera $N(y,0)=N(y,1)=0$.

Segundo Problema Local
Determinar la solución $M(y)$ de

$$\frac{d}{dy}\Big(\hat{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}M(y)+\hat{a}(y)\Big)=0,$$

con las condiciones de contacto

$$\begin{aligned}[[M(y)]]\Big|_{y=y_i} &= 0,\\ \left[\left[\hat{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}M(y)+\hat{a}(y)\right]\right]\Big|_{y=y_1} &= 0,\end{aligned}$$

y las condiciones de frontera $M(0)=M(1)=0$.

Continuando con el proceso para hallar el problema homogeneizado, se analizará ahora la ecuación

$$\begin{aligned}L_{zz}u_4 = & -L_{zy}u_3-L_{zx}u_2-L_{yz}u_3-L_{yy}u_2\\ & -L_{yx}u_1-L_{xz}u_2-L_{xy}u_1\\ & -L_{xx}u_0-f(x),\end{aligned}$$

Para ello se utilizará el Corolario 1. De este modo si dicha ecuación posee solución, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}\langle L_{zy}u_3+L_{zx}u_2+L_{yz}u_3+L_{yy}u_2+\\ +L_{yx}u_1+L_{xz}u_2+L_{xy}u_1+\\ +L_{xx}u_0+f(x)\rangle=0.\end{aligned}$$

Aquí se considera

$$\langle F(x,y,z)\rangle=\int_0^1\int_0^1 a^{-1}(y,z)dydz.$$

Nótese que, en virtud de la periodicidad de las funciones involucradas, se cumple que:

$$\langle L_{zy}u_3+L_{zx}u_2+L_{yz}u_3+L_{yy}u_2+L_{yx}u_1\rangle=0,$$

por lo que solo es necesario hallar condiciones para que

$$\langle L_{xz}u_2+L_{xy}u_1+L_{xx}u_0+f(x)\rangle=0.$$

Tras sustituir (22), (23) y (28) en esta última expresión, se llegará a que la condición buscada es que $v(x)$ sea solución de

$$-\tilde{a}\frac{d^2}{dx^2}v(x)=f(x),$$

y luego de fijar las condiciones de frontera como en el problema original, $v(0)=u_0$ y $v(1)=u_1$, se ha obtenido el problema homogeneizado.

4. Justificación Matemática

Primero, serán vistos el Lema de Lax-Milgram y algunos aspectos de espacios de funciones. Para profundizar en este tema, puede consultarse el Apéndice A de [4]:

DEFINICIÓN 1 (FORMA BILINEAL COERCIVA)

Una forma bilineal $a(u,v)$ en el espacio vectorial V se dice coersiva si

$$a(u,v)\geq\alpha||v||^2,\forall v\in V,\text{con }\alpha>0. \tag{29}$$

Esto implica que si $a(u,v)$ también es simétrica entonces también será un producto escalar en V.

LEMA 2 (LEMA DE LAX-MILGRAM)

Si la forma bilineal $a(u,v)$ es acotada y coerciva en el espacio de Hilbert V, y L una forma lineal acotada en V, entonces existe un único vector $u\in V$, tal que

$$a(u,v)=L(v),\forall v\in V, \tag{30}$$

y que satisface

$$||u||_V \leq C||L||_{V^*}. \tag{31}$$

Aquí C es una constante positiva.

El espacio H^k

Si una función $u \in L_2([0,1])$ (funciones de cuadrado integrable en el intervalo $[0,1]$), las derivadas de u no tienen porque existir en el sentido clásico, pero pueden ser definidas mediante el siguiente método. Considérese el funcional lineal:

$$L(\varphi) = -\int_0^1 u\frac{d\varphi}{dx}dx, \forall\varphi \in C_0^1([0,1]),$$

donde $C_0^k(\Omega) = \{\varphi \in C^k(\Omega); \varphi(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Por el teorema de representación de Riesz (pp 228,[4]) existe una única función $v \in L_2$ tal que $L(\varphi) =< v, \varphi >$. Utilizando la integración por partes y el resultado antes planteado, se llega a que:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\varphi dx = -\int_0^1 u\frac{d\varphi}{dx}dx = \int_0^1 v\varphi dx, \forall\varphi \in C_0^1([0,1]),$$

y finalmente se puede hacer $\frac{du}{dx} = v$. A esta función se le conoce como derivada generalizada o débil de u.
De igual modo pueden ser definidas las derivadas de órdenes superiores de u, $D^n u$ mediante el funcional lineal:

$$D^n v(\varphi) = (-1)^n \int_0^1 vD^n\varphi dx, \forall\varphi \in C_0^n([0,1]).$$

Una vez introducidos estos conceptos, se define el espacio $H^k([0,1])$ como:

$$H^k([0,1]) = \{v \in L_2([0,1]) : D^n v \in L_2([0,1]) \text{ para } n \leqslant k\},$$

además:

$$H_0^k([0,1]) = \{v \in H_0^k([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Finalmente, en el espacio H^k se define la norma $\|\cdot\|_1$ del siguiente modo:

$$\|v\|_1 = \Big(\sum_{n\leqslant k}\int_0^1 (D^n v)^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Formulación integral y justificación matemática

Antes de realizar la justificación, se introducirán algunos conceptos referentes a la formulación integral.
Considérese el problema:

$$Au \equiv (au')' = f, \ \forall x \in \Omega = (0,1) \tag{32}$$

con $f \in L_2$. Si se multiplica por una función φ que se anule para $x = 0$ y $x = 1$, y se integra de 0 a 1, se llegará a la expresión

$$\int_0^1 (au')'\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx,$$

y luego de integrar por partes en el miembro derecho se transforma en

$$\int_0^1 au'\varphi' dx = \int_0^1 f\varphi dx. \tag{33}$$

Una función $u \in H_0^1$ que satisfaga (30) para toda φ que cumpla las condiciones mencionadas arriba, se le llama solución débil de (29). Además la siguiente relación se cumple para esta función:

$$\|u\|_1 \leqslant C\|f\|.$$

Tanto este resultado como su demostración pueden ser encontrados en [4] pp 20-22. La demostración se apoya en el Lema de Lax Milgram.
Ahora, de los resultados obtenidos en el proceso para hallar la expansión asintótica, se obtuvo que la función $u^\varepsilon(x) - u^{(4)}(x,\varepsilon)$ es solución de

$$A(u^\varepsilon - u^{(4)}) = \varepsilon F(x,\varepsilon).$$

En esta ecuación debe notarse que $u^\varepsilon(x) - u^{(4)}(x,\varepsilon) \in H_0^1([0,1])$ ya que ambas son funciones tales que, tanto ellas como sus derivadas son de cuadrado integrable, y además ambas toman los mismos valores en la frontera de $[0,1]$, por lo tanto su diferencia se anula en dicha región. Por otro lado la función $F(x,\varepsilon)$ tiene a lo sumo discontinuidades de salto finito en los puntos $x_{i,j}^1 = \varepsilon\cdot(y_i + j)$, por lo tanto es de cuadrado integrable. Luego aplicando el resultado antes mencionado

$$\|u^\varepsilon - u^{(4)}\|_1 \leqslant C\|\varepsilon F(x,\varepsilon)\|_1 = C_1\cdot\varepsilon.$$

De igual modo que en el caso de los coeficientes continuos, también se cumple que:

$$u^{(4)}(x,\varepsilon) - v(x) = \varepsilon G(x,\varepsilon),$$

por lo tanto

$$\|u^{(4)}(x,\varepsilon) - v(x)\|_1 = \|\varepsilon G(x,\varepsilon)\|_1 = C_2\cdot\varepsilon.$$

Finalmente, por medio de la desigualdad triangular, se llega a que

$$\|u^\varepsilon(x) - v(x)\|_1 \leqslant (C_1 + C_2)\cdot\varepsilon = C\cdot\varepsilon,$$

quedando así demostrada la proximidad entre la solución del problema original y el problema homogeneizado.

5. Ejemplo numérico

Considérese el subconjunto A del cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$ definido del siguiente modo:

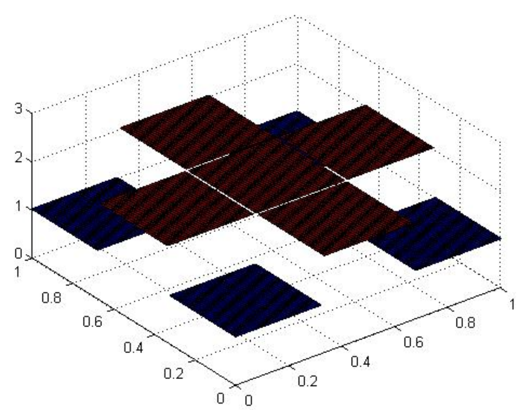
$$\begin{aligned} A &= \{(0,1/3)\times(0,1/4)\}\cup\{(0,1/3)\times(3/4,1)\}\cup \\ &\quad \cup\{(2/3,1)\times(0,1/4)\}\cup\{(2/3,1)\times(3/4,1)\}. \end{aligned}$$

Ahora será definida la función $a(y,z)$ del siguiente modo:

$$a(y,z)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad [y,z]\in A \\ 2 & \text{si} \quad [y,z]\notin A \end{cases}$$

extendiéndola de forma periódica a todo $\mathbb{R}^2$, Figura 1. En este caso hay presentes discontinuidades de salto finito en $y\in\{1/3,2/3\}$ y $z\in\{1/4,3/4\}$.

Figura 1. Función $a(y,z)$.



En las Figura 2 y Figura 3 son mostrados los gráficos de la función $a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)$ para $\varepsilon=1$ y $\varepsilon=1/2$ respectivamente.

Figura 2. $a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)$ para $\varepsilon=1$.

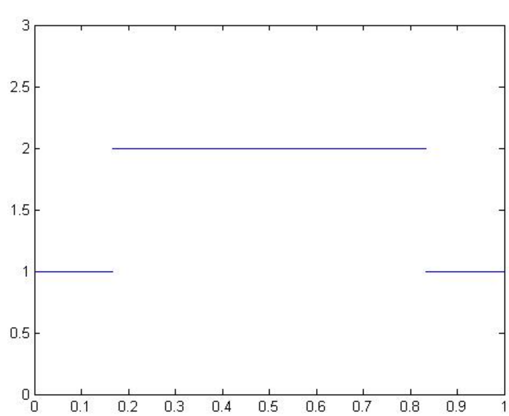
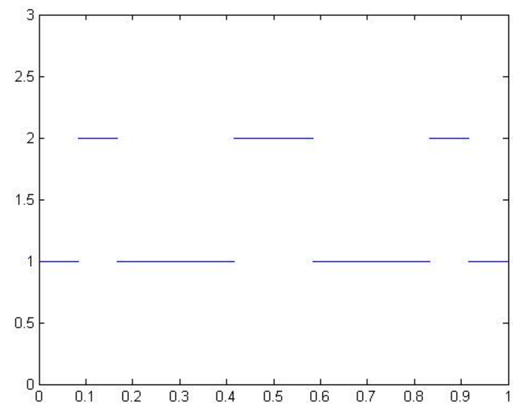


Figura 3. $a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)$ para $\varepsilon=1/2$.



El problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a(x/\varepsilon,x/\varepsilon^2)\frac{du^\varepsilon}{dx}) &= 0, & (34)\\ [[u(x)]]\Big|_{x=x_{ij}^m} &= 0, & (35)\\ \left[\left[a(x/\varepsilon,x/\varepsilon^2)\frac{du^\varepsilon}{dx}\right]\right]\Big|_{x=x_{ij}^m} &= 0. & (36)\end{aligned}$$

para la función $a(x/\varepsilon,x/\varepsilon^2)$ antes mencionada y las condiciones de frontera $u^\varepsilon(0)=0$, $u^\varepsilon(1)=1$ para $\varepsilon=1$ puede ser resuelto del siguiente modo:

Lo primero que es necesario hacer es determinar los puntos de discontinuidad. Dichos puntos son los denotados por x_{ij}^m en el planteamiento del problema y son determinados por las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} x_{ij}^1 &= \varepsilon\cdot(y_i+j), \ \ i=1,\ldots,k \ \ j=0,\ldots,n-1,\\ x_{ij}^2 &= \varepsilon^2\cdot(z_i+j), \ \ i=1,\ldots,l \ \ j=0,\ldots,n^2-1,\end{aligned}$$

Para este caso los puntos son

$$x\in\{1/4,1/3,2/3,3/4\},$$

De este modo la solución estará definida por cinco funciones de la forma $\omega_i(x)=m_i\,x+p_i$. Para determiar los coeficientes m_i y p_i se evalúan estas funciones en la ecuación (34), en las condiciones (35) y (36), así como en las condiciones de frontera, para obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}m_0+n_0 &= \frac{1}{4}m_1+n_1,\\ \frac{1}{3}m_1+n_1 &= \frac{1}{3}m_2+n_2,\\ \frac{2}{3}m_2+n_2 &= \frac{2}{3}m_3+n_3,\\ \frac{3}{4}m_3+n_3 &= \frac{3}{4}m_4+n_4,\end{aligned}$$

De (36)

$$\begin{aligned} m_0 &= 2m_1, \\ 2m_1 &= m_2, \\ m_2 &= 2m_3, \\ 2m_3 &= m_4, \end{aligned}$$

De las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} n_0 &= 0, \\ m_4 + n_4 &= 1. \end{aligned}$$

Tras resolverlo se llega a la solución

$$u^1(x) = \sum_{i=0}^{4} w_i(x)\, I_{(a_i,b_i)}$$

donde $I_{(a_i,b_i)}$ representa a las funciones indicadoras de cada uno de los intevalos definidos por los puntos de discontinuidad, y las funciones $w_i(x)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \frac{12}{11}x, \\ w_1(x) &= \frac{6}{11}x + \frac{3}{22}, \\ w_2(x) &= \frac{12}{11}x - \frac{1}{22}, \\ w_3(x) &= \frac{6}{11}x + \frac{7}{22}, \\ w_4(x) &= \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}, \end{aligned}$$

Solución del problema homogeneizado:
El problema homogeneizado es de la forma

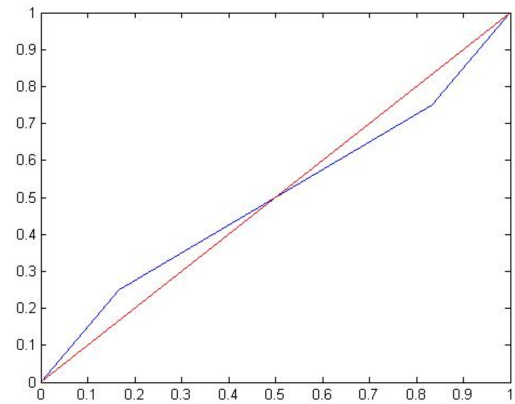
$$\tilde{a}\frac{d^2}{dx^2}v = 0,$$

con $v(0) = 0$ y $v(1) = 1$, cuya solución es $v(x) = x$, es decir, por los resultados hasta ahora obtenidos se puede afirmar que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} u^{\varepsilon} = v(x).$$

En la Figura 4 se muestran las funciones $v(x)$ y u^1.

Figura 4. Funciones $v(x)$ y u^1.



6. Conclusiones

Se describió el proceso de construción de una solución asintótica formal para una familia de problemas de contornos unidimensionales. La técnica empleada combina las ideas que aparecen en [1] con el formalismo desarrollado en [3] para homogeneización simple. Se demuestra, basado en el principio del máximo generalizado, la proximidad entre la solución del problema original y la del problema homogeneizado. Se introduce un ejemplo numérico que ilustra tal convergencia cuando el parámetro geométrico tiende hacia cero. El trabajo puede ser útil a interesados en el conocimiento del procedimiento matemático de la homogeneización reiterada, incluso para medios heterogéneos multidimensionales.

Reconocimientos

Se agradece a los proyectos PNCB 2015 y CAPES nº 881.030424/2013-01).

Referencias

[1] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. (1978) *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, Amsterdam.

[2] Allaire G., Briane M. (1996) *Multiscale convergence and reiterated homogenization*. Proceedings of the Royal Society of the Edinburgh 126A, 297-342.

[3] Bakhvalov N., Panasenko G. (1989) *Homogenization Averaging Processes*. Kluwer Academic, London.

[4] Larsson S., Thomhée V. (2009) *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.