Pistas Educativas, No. 108, Octubre 2014. México, Instituto Tecnológico de Celaya.

Modelo de Competencia de Lotka Volterra Una Analogía de Inventario EOQ

Irma Martínez Carrillo
Universidad Autónoma del Estado de México UAPT, Toluca, Estado de México, 722 4810800
imartinezca@uaemex.mx

Carlos Juárez Toledo
Universidad Autónoma del Estado de México UAPT, Toluca, Estado de México, 722 4810800
cjuarezt@uaemex.mx

Ana Lilia Flores Vázquez
Universidad Autónoma del Estado de México UAPT, Toluca, Estado de México, 722 4810800
liyamx@gmail.com

Resumen

En tiempos actuales, en donde la oferta y demanda de diversos productos que se ofrecen en el mercado requieren modificarse o adecuarse al gusto del consumidor de forma continua, requiere de estudios en tiempo real para evitar pérdidas drásticas a la empresa, es por ello que es necesario adecuar las técnicas existentes que convencionalmente son utilizadas para la planeación estratégica compra de materia prima con respecto a las necesidades de demanda requeridas. En este trabajo se propone una analogía del modelo de competencia de Lotka-Volterra para realizar un estudio equivalente al modelo de cantidad óptima a pedir (EOQ) con faltantes.

Para probar el modelo propuesto se implementa en una empresa de repuestos de luces de neón para autos [1], se utiliza interpolación numérica de toolbox de ecuaciones diferenciales (ODE) de MATLAB para la obtención de las señales originadas por el su evolución en el tiempo.

Palabra Clave: Analogía, Especies en competencia, Inventario, Lotka-Volterra, Modelo EOQ.

1. Introducción

Hoy en día, una de las grandes problemáticas de diversas empresas es la inversión de gastos para proveerse de la materia prima suficiente para satisfacer la producción de un determinado tiempo [2,3], lo ideal para cada una de las empresas que satisface las necesidades de un determinado sector, es que la inversión sea proporcional a la ganancias que se tiene estipuladas o aún más sean mayores.

Los estudios de nuevas inversiones son primordiales para que una empresa nueva o que se renueva contantemente se arriesguen, es por ello necesario realizar un análisis detallado del gasto monetario y de materia prima que se requiere con respecto a la que la empresa día a día demanda y buscar la forma de no recurrir a gastos innecesario, los cuales podrían ser perjudiciales principalmente en la economía de la empresa.

En tiempos actuales se ha detectado que una de las principales causas que afecta a una empresa es por gastos indebidos [4] debido a que no saben abastecer de materia prima suficiente terminar un producto final y llevarlo al mercado. Teniendo en cuenta que se maneja un limitado margen de inversión, es pertinente cuanto se debe de abastecer en almacén de la materia prima que se va a requerir en un determinado tiempo histórico.

2. Desarrollo

2.1 Modelo de competencia entre dos especies de Lotka-Volterra

El modelo matemático de Lotka-Volterra establece que para dos especies en competencia que se encuentran en un mismo habitad, definidos por x elementos de población de presas mientras que y es la cantidad de elementos que componen la población de depredadores [5], suponiendo que existe suficiente alimentación para la presa y que el único alimento para el depredador es la presa, entonces, la tasa de natalidad de la presa depende directamente del crecimiento de su población como

$$Ax \tag{1}$$

Mientras que la natalidad del depredador, depende directamente del número de encuentros con su presa de la forma

$$Dxy \tag{2}$$

Por lo tanto, la mortalidad de la presa depende directamente del número de interacciones con su depredador como

$$Bxy \tag{3}$$

y la mortalidad de la población del depredador depende de la cantidad de elementos existentes de población de presas

$$Cxy \tag{4}$$

donde A, B, C, y D son constantes positivas. Por lo tanto, la razón de cambio entre ambas poblaciones está representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + Dxy \tag{6}$$

De acuerdo a las ecuaciones (5) y (6) la razón de cambio entre ambas especies puede evolucionar de acuerdo a los tres casos siguientes:

1. Si la población de la presa es mayor que la población de depredadores, es decir $x > y$.

2. Si la población de la presa es igual a la población de los depredadores o $x = y$.
3. Si la población de las presas es menor que la de los depredadores, tal que $x = y$.

Esquemáticamente, la evolución entre ambas especies se muestra en la Fig. 1.

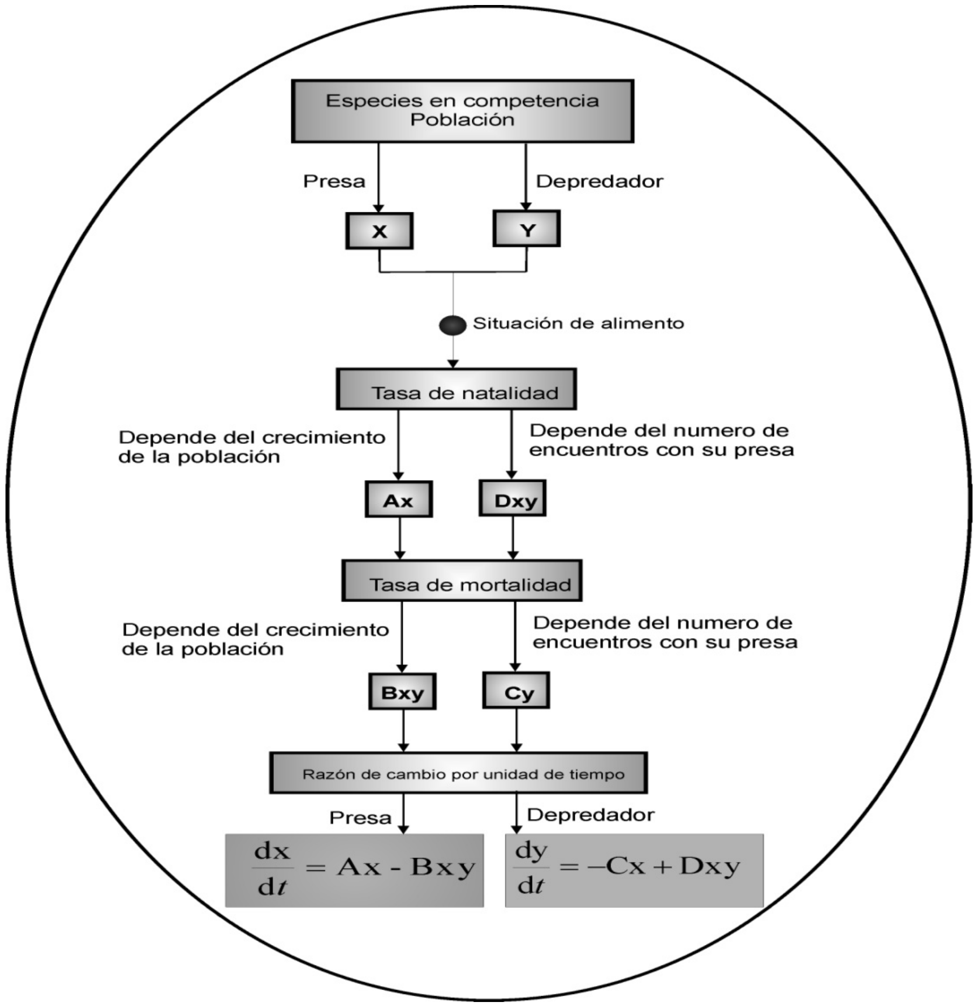

Fig. 1. Modelo de competencia de Lotka-Volterra para dos especies un mismo habitad.

2.2 Modelo de inventario EOQ BÁSICO

El modelo de lote económico (EOQ) es un modelo de inventario deterministico de revisión continua [6] ya que su planeación está contemplada para un histórico de periodo de tiempo y posteriormente reabastecer almacén con la llegada de nuevas unidades [7], este modelo por su fácil implementación es comúnmente utilizado en distribuidores, fabricantes y comerciantes en general; Ya que a partir de datos conocidos como:

Q: Cantidad de unidades requeridas

D: Tasa de demanda o unidades por tiempo

t: Frecuencia de pedido por agotamiento de inventario

El objetivo fundamental del modelo EOQ básico, es establecer un la frecuencia y la cantidad determinada con la mayor precisión para garantizar que la materia prima en requerida no sea un obstáculo para interrumpir su salida de venta al mercado y que pueda satisfacer la demanda en tiempo en cierto sector.

Si la existencia de la materia prima se consume uniformemente a la tasa constante de Demanda D, entonces, el ciclo de pedido para este comportamiento corresponde a

$\frac{\mathrm{Q}}{2}$: Nivel promedio de inventario

L: Tiempo entre colocar y recibir un pedido

n: Número de ciclos

$\mathrm{L_e D}$: Punto de reorden

$\mathrm{L_e}$: Intervalo entre colocar un pedido y recibir otro

Los parámetros necesarios que se requieren conocer son K (costo de preparación correspondiente a la colocación de un pedido) y h (costo de almacenamiento por unidad en un determinado tiempo).

Entonces, el costo total por ciclo se define por

$$K+CQ+\frac{hQ^2}{2D} \tag{7}$$

Por lo tanto, el costo total por unidad de tiempo se define como

$$T=\frac{K+CQ+\frac{hQ^2}{2D}}{Q/D}=\frac{D\cdot K}{Q}+D\cdot C+\frac{hQ}{2} \tag{8}$$

Definición 1: Se dice que T tiene un mínimo relativo en ***c*** si existe un dominio U de c de forma que para todo $Q\in U$ se tiene que $T(C)\leq T(Q)$.

Una primera condición de extremo relativo es el siguiente

Teorema : Sea T una función derivable. Si T tiene un extremo relativo en c, entonces $T'(c)=0$.

Como T, es continua en el dominio de U, entonces por el teorema 1,

$$\frac{dT}{dQ}=-\frac{D\cdot K}{Q^2}+\frac{h}{2}=0 \tag{9}$$

Por lo tanto el valor de Q que minimiza $T(Q^*)$ es de la forma

$$Q^*=\sqrt{\frac{2D\cdot K}{h}} \tag{10}$$

Donde (10) es conocida como la formula EOQ [8], con un tiempo de ciclo correspondiente de la forma

$$t^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2K}{D\cdot h}} \tag{11}$$

Este modelo estable que puede pasar un lapso de tiempo para la entrega ***L*** del material sin que la unidad económica se vea afectada por faltantes de materia prima entre la colocación y recepción de un pedido, entonces se deberá realizar un reorden de la forma

$$L_e = L - nt^*, \qquad (12)$$

Donde n es un número entero tal que $n \leq \frac{L}{t^*}$. Por lo tanto, el punto de reorden conveniente se presenta mediante

$$R = L_e D \text{ unidades} \qquad (13)$$

Por lo cual, el modelo establece un ajuste en el análisis inmediato si se llegara a requerir.

2.3 Analogía entre un modelo de competencia y el modelo EOQ

Mediante la implementación del modelo EOQ se obtiene un estimado de la cantidad óptima de inventario que se debe de pedir, lo cual permite que la unidad económica que depende del abastecimiento de los materiales puedan mantener una producción constante por periodos de tiempos históricamente establecidos [9-10].

Es por ello, que se ve la necesidad de contar con modelos que permitan obtener resultados con el mínimo grado de error; En este apartado se realiza una analogía entre el modelo de competencia entre dos especies de Lotka-Volterra y el modelo de inventario EOQ como a continuación se describe

Término Lotka-Volterra	**Equivalencia Modelo EOQ**
x : Población de la presa	Q: Cantidad de material a pedir
y : Población del depredador	R: Punto de reorden

A: Contante positiva	K: Costo por ordenar un lote
B: Contante positiva	C: Corto por producir en un ciclo
C: Contante positiva	D: Demanda
D: Contante positiva	L: Tiempo de entrega entre la solicitud y recepción del pedido

Tabla 1. Equivalencia entre el modelo de Lotka-Volterra y el modelo EOQ.

3. Resultados

Para tener una comparación entre ambos modelos se tomó como base de datos la siguiente problemática.

El problema de estudio se implementa en una empresa de repuestos de luces de neón para autos [1], de acuerdo a los datos históricos recabados del comportamiento similar en un periodo de tiempo, las características de inventario son las siguientes:

1. Se requiere aproximadamente 100 unidades de luces al día, las cuales se solicitan al proveedor periódicamente.
2. Cuesta $\$100$ iniciar una orden de compra.
3. Cuesta $\$0.02$ tener una luz de neón en almacén por día.
4. El tiempo de entrega entre la solicitud y recepción del pedido es de 12 días.
5. $n = 1$ día.

Conociendo esta información, se requiere determinar la periodicidad de inventario para pedir las luces de neón. Entonces, de acuerdo a los datos conocidos y a la analogía propuesta en la tabla 1, se identifican los siguientes términos:

$D = 100$ unidades de luces que se requieren al día.

$K = \$100$ una orden de compra.

$h : \$0.02$ costo por almacenar una luz de neón por día.

$L = 12$ días el tiempo que transcurre entre la solicitud y recepción del pedido.

Entonces, de (10)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D \cdot K}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0.02}} = 1000 \text{ unidades} \tag{13}$$

Por lo tanto, conociendo Q^* y D podemos obtener la frecuencia de pedido por el agotamiento de inventario mediante la ecuación (11), obtenido como resultado

$$t^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días} \tag{14}$$

Como puede observarse, el tiempo que transcurre entre la solicitud y recepción es mayor a la recepción del ciclo en (21), entonces $1 \leq \frac{12}{10} = 1.2$ se debe calcular L_e de la ecuación (12), obteniéndose

$$L_e D = L - (n \cdot t^*) = 12 - 10 = 2 \text{ días} \tag{15}$$

El punto de reorden se presenta cuando la cantidad de inventario baja a 200 luces de neón, como

$$R = L_e D = 200 \text{ luces} \tag{16}$$

Es decir, la política de inventario mediante el método EOQ establece pedir un lote de 1000 luces cuando el inventario llegue a 200 unidades.

La Fig. 2. y la Fig. 3., muestra la información obtenida a partir del modelo EOQ con reorden.

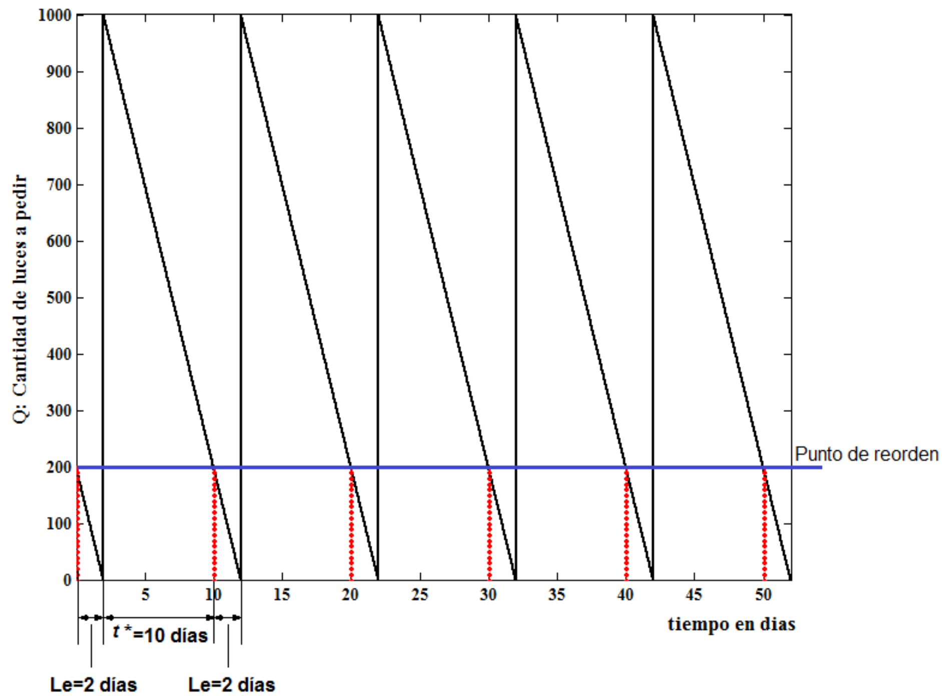

Fig. 2. Cantidad Optima a pedir usando modelo EOQ.

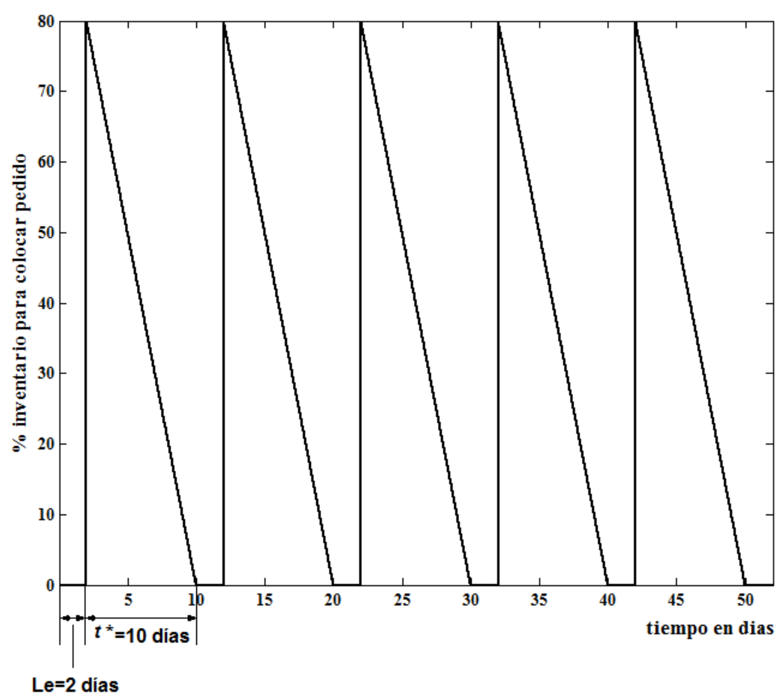

Fig. 3. Porcentaje para colocar pedido modelo EOQ.

A partir de la adecuación de la analogía de las ecuaciones entre el modelo de competencia de Lotka-Volterra y el modelo EOQ con reorden de la Tabla 1, los resultados obtenidos mediante una interpolación numérica del toolbox de ODE (Ecuaciones diferenciales ordinaria de Matlab) se muestran en la fig. 4 y 5.

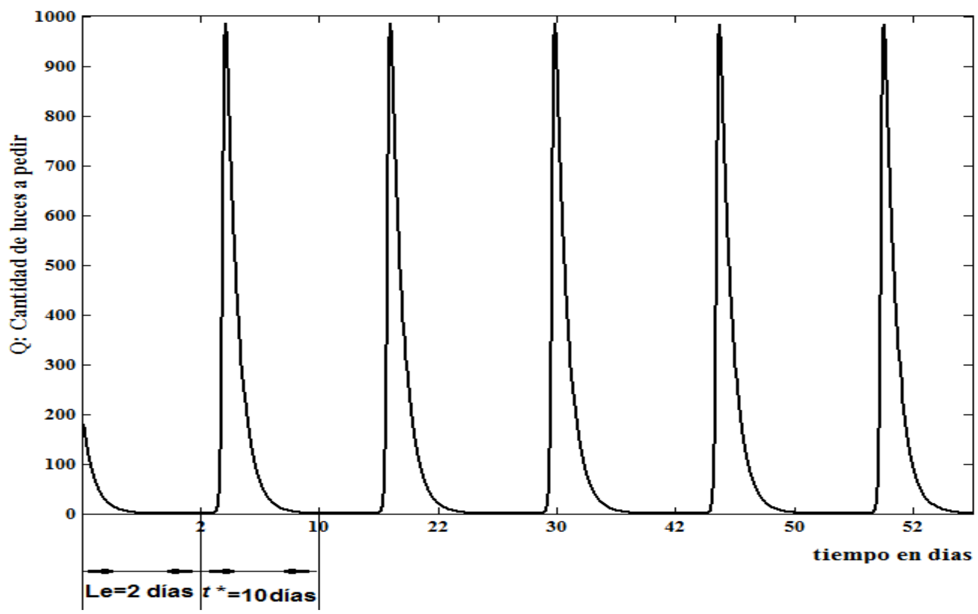

Fig. 4. Cantidad Optima a pedir usando equivalencia Lotka-Volterra.

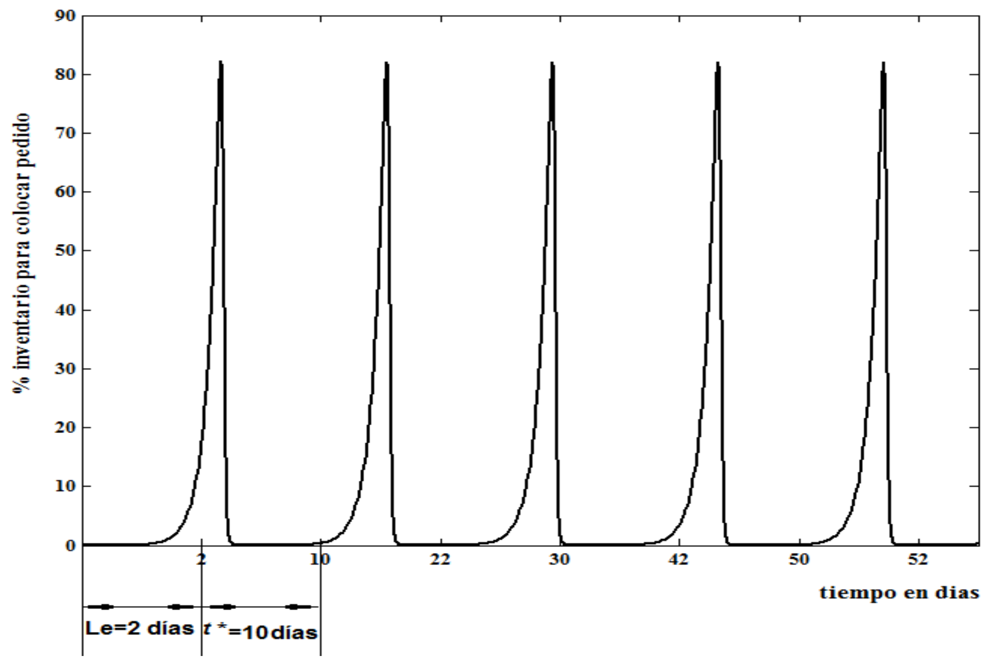

Fig. 5. Porcentaje para colocar pedido equivalencia Lotka-Volterra.

3. Discusión

Como puede observarse de las Figs 2 y 3 en comparación con las Fig. 4 y 5, la equivalencia del modelo de inventario con punto de reorden no muestra un comportamiento lineal lo cual quiere decir que hay información adicional de interés para considerarse como lo son los puntos de inflexión dentro de la misma trayectoria del comportamiento. Además de la información presentada en la Fig. 3 y 4, también podemos conocer el comportamiento histórico entre la cantidad de unidades a pedir contra el porcentaje de inventario para colocar el pedido y verificar que precisamente hay una relación entre ellos que le permita ver la estabilidad del sistema periódicamente como lo muestra la Fig. 6.

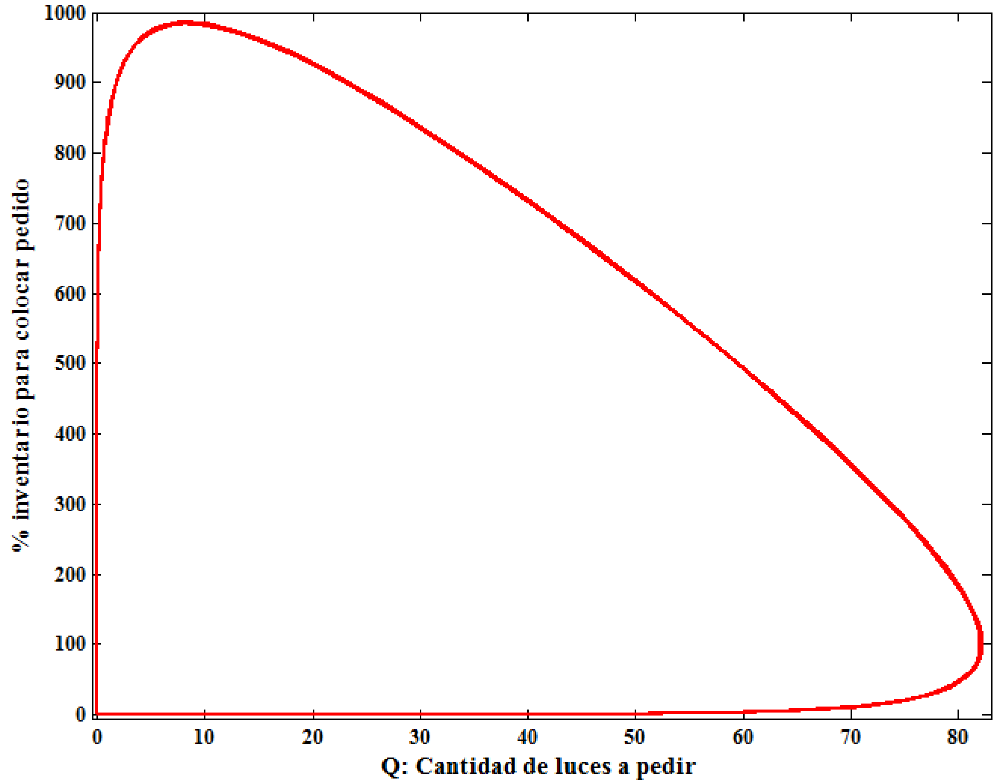

Fig. 6. Diagrama de fase.

La Fig. 6, muestra que si no existe ninguna perturbación que pudiera cambiar o afectar considerablemente la forma de llevar a cabo el inventario para llevar a cabo un lote de producción periódicamente, el plan no debería de cambiar.

4. Conclusiones

El modelo de Lotka-Volterra tiene una analogía natural al comportamiento del modelo EOQ, lo cual permite tener una seguridad que los resultados arrojados ofrecen una mejor precisión con los requerimientos que un proceso de producción requiere, si las características de oferta y demanda necesitan cambiarse y adaptarse a nuevas necesidades [5,8], por lo cual, en próximos trabajos se presentaran modelos más detallados que requieran el estudio de más de dos variables y diferentes condiciones operación.

6. Referencias

[1] H. A. Taha, V. G. Pozo, Investigación de operaciones, Pearson Educación, 2004, ISBN 9702604982.

[2] W. L. Winston, Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos, Thomson, 2005, ISBN 9706863621.

[3] B. Render, M. H. Hanna, R. M. Stair, Métodos cuantitativos para los negocios, Pearson Educación, 2006, ISBN 9702607388.

[4] B. Render, M. H. Hanna, R. M. Stair, Métodos cuantitativos para los negocios, Pearson Educación, 2006, ISBN 9702607388.

[5] I. Martinez , C. Juarez and P. M. Nancy J "Predator-Prey Analitycal Dinamics Behavior Using Normal Form Method" , 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Octubre 2011, Merida, Mexico, ISBN: 978-1-4577-1012-4.

[6] N. K. Malhotra, J. F. J. D. Martínez, M. E. T. Rosales, Investigación de mercados, Pearson Educación, 2004, ISBN 9702604915.

[7] F. S. Fajardo, F. M. Focazzio, L. R. Cortés, Álgebra Lineal y Programación Lineal. Con aplicaciones a ciencias administrativas, contables y financieras con uso de: Derive, O.S.B y Excel, ECOE Ediciones, 2005, ISBN 9586484092.

[8] C. Juarez and I. Martinez, "Analysis of Power System Stability using Phase Plane Analysis of Linear OMIB Equivalents", 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Octubre 2011, Merida, Mexico, ISBN: 978-1-4577-1012-4.

[9] Irma Martínez, A. R. Messina and E. Barocio,"Perturbation Analysis of Power systems: Effects of Second and- Third-Order Nonlinear Terms on system Dynamic

Behavior" , Electric Power Systems Research, Volume 71, Issue 2, October 2004, Pages 159-167, ISSN: 03787796.

[10] I. Martinez; A. R. Messina; E. Barocio, "Higher-Order Normal Form Analysis of stressed Power Systems: A Fundamental Study", Electric Power Components and systems, Volume 32, Issue 12, December 2004, Pages 1301-1317, ISSN: 15325008.

7. Autores

Dra. Irma Martínez Carrillo obtuvo su título de Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV, Unidad Guadalajara, 2003 y 2008 respectivamente, Ganadora de los certámenes nacionales de tesis en el área de Informática y Control a nivel Maestría y Doctorado en 2005 y 2009. Actualmente es profesora de tiempo completo en la UAEMex.

Dr. Carlos Juárez Toledo obtuvo su título de Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV, Unidad Guadalajara, 2003 y 2008 respectivamente, desarrollo una estancia doctoral en el departamento de Eléctrica y Computación de NU, Boston, Massachussets en 2005 y una estancia posdoctoral en la Facultad de Ingeniería Eléctrica en la UNAM en 2008-2009. Actualmente es profesor de tiempo completo en la UAEMex.

Ana Lilia Flores Vázquez obtuvo su título de doctorado ciencias físicas, UNAM. Actualmente es profesor de tiempo completo en la UAEMex.