

# DISEÑO DE UN CONTROL ÓPTIMO PARA REGULAR LA CONCENTRACIÓN DE CO<sub>2</sub> AL INTERIOR DE UN INVERNADERO

## *OPTIMAL CONTROL DESIGN TO REGULATE THE CONCENTRATION OF CO<sub>2</sub> INSIDE A GREENHOUSE*

**Edwin Alonso Monje**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
*alonso.201116878@gmail.com*

**J. M. Gutiérrez Arias**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
*mgutierrez@ece.buap.mx*

**I. López Cruz**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
*alonso.201116878@gmail.com*

### **Resumen**

En este trabajo optimizamos el enriquecimiento de la concentración de CO<sub>2</sub> en la producción del cultivo de tomate en un invernadero. Consideramos un modelo dinámico integrado, tres variables de estado relacionadas al cultivo y tres variables de estado relacionadas al invernadero. Dicho modelo integrado se validó mediante la construcción de una estación meteorológica ubicada en la sierra norte de Puebla. Se pretende maximizar la producción y minimizar el consumo de energía mediante la teoría de control óptimo. La simulación de la ley de control sintetizada, se hizo en un periodo de cosecha de 80 días.

**Palabra(s) Clave:** Control óptimo, Cultivo de Tomate, Enriquecimiento de dióxido de carbono, Invernadero.

### **Abstract**

*In this work we optimize the enrichment of the concentration of CO<sub>2</sub> in the production of the tomato crop. We consider an integrated dynamic model, three state variables related to the crop and three state variables related to the*

*greenhouse. This integrated model was validated through the construction of meteorological station located in the northern highlands of Puebla. We maximize production and minimize energy consumption through optimal control theory. The simulation of the synthesized control law was done in a harvest period of 80 days.*

**Keywords:** *Dioxide carbon enrichment, Greenhouse, Optimal control, Tomato crop.*

## **1. Introducción**

A principios del siglo XX, se empezaron a estudiar los efectos del enriquecimiento de dióxido de carbono en el crecimiento de las plantas. Estos estudios se han enfocado en los efectos positivos y negativos en el crecimiento de las plantas (Robb, 1964).

En estudios anteriores se han demostrado que el enriquecimiento de CO<sub>2</sub> en invernaderos desde los niveles atmosféricos de aproximadamente 380 ppm a niveles tan altos como 800-1800 ppm pueden acelerar la planta crecimiento y aumentar el rendimiento de los cultivos en aproximadamente un 40% (I. Seginer, 2017).

Existen métodos comunes de enriquecimiento de CO<sub>2</sub> (por ejemplo, combustibles de hidrocarburos, que utilizan CO<sub>2</sub> comprimido en botella) optimizando el nivel y la duración del enriquecimiento de CO<sub>2</sub> es una consideración importante en la agricultura de invernadero. Obviamente, en términos de duración, el enriquecimiento solo es necesario durante el día (o cuando las luces están encendidas) ya que las plantas toman CO<sub>2</sub> cuando fotosintetizan (T. Kuroyanagi, 2014).

Algunos métodos de control son: los controles clásicos y robustos, los cuales controlan el CO<sub>2</sub> reduciendo a cero la desviación. Otros métodos de control óptimo que consideran los requisitos del comportamiento del invernadero, actuadores, consumo de energía, etc. Y que predicen el comportamiento del medio ambiente. Los beneficios económicos de optimización son bienvenidos por los productores. La mayoría de los estudios se enfocan en optimizar el enriquecimiento de CO<sub>2</sub> (Y. Li, 2018).

El enriquecimiento de CO<sub>2</sub> dentro de los invernaderos como el control utilizado solo es implementado en los países como nueva Zelanda y Japon. Actualmente en México los invernaderos no son dotados de este tipo de tecnología por ello el estudio de ésta para su implementación.

### Establecimiento del problema de control óptimo

El planteamiento del problema de control óptimo de cualquier sistema debe estar basado en tres conceptos: el modelo dinámico del sistema, una función y las restricciones del sistema. La notación de forma matricial de la ecuación de estados se representa como se presenta en la ecuación 1.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados,  $\mathbf{u}(t)$  es la señal de control y  $t$  es el tiempo. Se requiere de un criterio para evaluar el desempeño del sistema se emplea la ecuación 2.

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2)$$

Donde  $t_f$  y  $t_0$  son el tiempo final e inicial respectivamente,  $\phi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  y  $L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  son funciones escalares (G. van Straten, 2011).

Las restricciones ecuación 1 se agregan a la ecuación 2 con un vector de multiplicadores de Lagrange variante en el tiempo  $\lambda(t)$  obteniendo la ecuación 3.

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (3)$$

Definiendo la función escalar Hamiltoniana como se muestra en la ecuación 4.

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)) \quad (4)$$

Integrando por partes el término  $\lambda^T \dot{\mathbf{x}}$  se obtiene la ecuación 5.

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^T(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t) dt \quad (5)$$

Considerando una variación infinitesimal en  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\delta\mathbf{u}(t)$ . Esta variación produce una variación en la trayectoria de los estados  $\delta\mathbf{x}(t)$  y una variación en el índice de desempeño  $\delta J$ . Esta última variación puede ser calculada como ecuación 6.

$$\delta J = \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} \right]_{t=t_f} + [\boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x}]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right] dt \quad (6)$$

Para evitar tener que determinar las funciones  $\delta\mathbf{x}(t)$  producidas por  $\delta\mathbf{u}(t)$  se eligen los multiplicadores  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  de tal manera que los coeficientes de  $\delta\mathbf{x}(t)$  y  $\delta\mathbf{x}(t_f)$  en la ecuación anterior desaparezcan. Eligiendo ecuación 7.

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (7)$$

Con las condiciones de frontera, ecuación 8.

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}(t_f) \quad (8)$$

Se determina el índice de desempeño, ecuación 9.

$$\delta J = \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\delta\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dt \quad (9)$$

Si  $\mathbf{x}(t_0)$  ésta especificada, entonces  $\delta\mathbf{x}(t_0) = 0$ . Para una solución se requiere  $\delta J = 0$  para una variación arbitraria  $\delta\mathbf{u}(t)$ . Esto sucede sí  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0$ , en  $t_0 \leq t \leq t_f$ , esta ecuación es llamada la condición estacionaria.

### Modelo del invernadero y del cultivo

El modelo del TOMGRO relaciona múltiples variables para un invernadero y el cultivo, entre las variables que presenta se encuentran la de concentración de

CO<sub>2</sub>, humedad relativa, temperatura, etc. relacionadas con el invernadero y biomasa seca del dosel, biomasa seca de la raíz y número de nodos, etc. relacionadas con el cultivo.

En éste trabajo se consideran las variables de estado relacionadas al cultivo tales como: la concentración de CO<sub>2</sub> al interior del invernadero ( $C_i$ ), la humedad relativa ( $V_i$ ), la temperatura al interior del invernadero ( $T_g$ ) y las variables de estado relativas al cultivo como: número de nodos ( $N$ ), biomasa seca del dosel ( $W_c$ ), biomasa seca de la raíz ( $W_r$ ).

Dentro de las variables de entrada de control se encuentran los de inyección de CO<sub>2</sub>  $\phi_{inj}$ , temperatura  $Q_{calef}$ , etc.

Entonces definimos el vector de estados del sistema  $x$  (ecuación 10) y vector de controles  $u$  (ecuación 11).

$$x = [N \ W_c \ W_r \ C_i \ T_g \ V_i]^T \quad (10)$$

$$u = [\phi_{inj} \ Q_{calef}]^T \quad (11)$$

Dado que el sistema se describe por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden ecuación 1, en este trabajo se consideran las ecuaciones diferenciales 12 a la 17.

$$\frac{dN}{dt} = N f_N(T_g) \quad (12)$$

$$\frac{dW_c}{dt} = E(P_g - R_m(W_r + W_c)) f_c \quad (13)$$

$$\frac{dW_r}{dt} = E(P_g - R_m(W_r + W_c))(1 - f_c) \quad (14)$$

$$\frac{V_g}{A_g} \frac{dC_i}{dt} = G_v(C_o - C_i) + \phi_{inj} + R - P\mu \quad (15)$$

$$C_g \frac{dT_g}{dt} = k_v(T_o - T_g) + Q_{calef} + k_r(T_o - T_g) + k_s(T_o - T_g) + G\eta \quad (16)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{A_g}{V_g} (E - G_v(V_i - V_o)) \quad (17)$$

## Diseño de la ley de control

El índice de desempeño se encuentra descrito mediante ecuación 18.

$$J = \frac{1}{2} [-N^2(t_f) - W_r^2(t_f) - W_c^2(t_f) + C_i^2(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [-N^2(t) - W_r^2(t) - W_c^2(t) + \varphi_{inj}^2(t)] dt \quad (18)$$

Y la función Hamiltoniana esta descrita por ecuación 19.

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = [-N^2(t) - W_r^2(t) - W_c^2(t) - V_i^2(t) + \varphi_{inj}^2(t)] + \lambda_1(t)f_1(t) + \lambda_2(t)f_2(t) + \lambda_3(t)f_3(t) + \lambda_4(t)f_4(t) + \lambda_5(t)f_5(t) + \lambda_6(t)f_6(t) \quad (19)$$

Del cual se obtienen los co-estados, ecuaciones 20 a 25.

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\partial H}{\partial N} = N \quad (20)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial H}{\partial W_c} = W_c + \lambda_2 ER_m f_c + \lambda_3 ER_m (1 - f_c) \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{\partial H}{\partial W_r} = W_r + \lambda_2 ER_m f_c + \lambda_3 ER_m (1 - f_c) \quad (22)$$

$$\dot{\lambda}_4 = \frac{\partial H}{\partial C_i} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial C_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial C_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial C_i} \quad (23)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \frac{\partial H}{\partial T_g} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial T_g} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial T_g} + \lambda_5 \frac{\partial f_5}{\partial T_g} \quad (24)$$

$$\dot{\lambda}_6 = \frac{\partial H}{\partial V_i} = \lambda_6 \frac{A_g}{V_g} G_v \quad (25)$$

Si bien se tienen los estados en condiciones iniciales y los co-estados con condiciones finales se utiliza el tiempo inverso, ecuaciones 26 a 28.

$$\tau = t_f - t \quad (26)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -1 \quad (27)$$

$$d\tau = -dt \quad (28)$$

Por lo tanto, el sistema se reescribe mediante ecuaciones 29 a 40.

$$\dot{x}_1 = N f_N(T_g) \quad (29)$$

$$\dot{x}_2 = E (P_g - R_m(W_r + W_c)) f_c \quad (30)$$

$$\dot{x}_3 = E(P_g - R_m(W_r + W_c))(1 - f_c) \quad (31)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{A_g}{V_g} [G_v(C_o - C_i) + \varphi_{inj} + R - P\mu] \quad (32)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{C_g} [k_v(T_o - T_g) + Q_{calef} + k_r(T_o - T_g) + k_s(T_o - T_g) + G\eta] \quad (33)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{A_g}{V_g} (E - G_v(V_i - V_o)) \quad (34)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -N \quad (35)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -W_c - \lambda_2 ER_m f_c - \lambda_3 ER_m (1 - f_c) \quad (36)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -W_r - \lambda_2 ER_m f_c - \lambda_3 ER_m (1 - f_c) \quad (37)$$

$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial C_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial C_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial C_i} \quad (38)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial T_g} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial T_g} + \lambda_5 \frac{\partial f_5}{\partial T_g} \quad (39)$$

$$\dot{\lambda}_6 = -\lambda_6 \frac{A_g}{V_g} G_v \quad (40)$$

### 3. Resultados

Resolviendo el sistema de ecuaciones mediante integración numérica ODE45 en Matlab y con un periodo de simulación de 80 días, que es el tiempo promedio de cultivo del tomate se obtiene lo siguiente:

- **Simulación de las variables relacionadas al cultivo.** En la figura 1 se observa que el número de nodos presenta un aumento si bien no es muy notorio esto es relativo debido a que las unidades de medida son de número de nodos sobre metro cuadrado que es considerable y representa una ganancia a los agricultores. Como se muestra en la figura 2 la biomasa seca del dosel presenta un aumento de aproximadamente un 50%, esto es

beneficioso considerando que la biomasa es deshidratada y posteriormente pesada y esto representaría que existe un aumento del 1.5 del dosel.

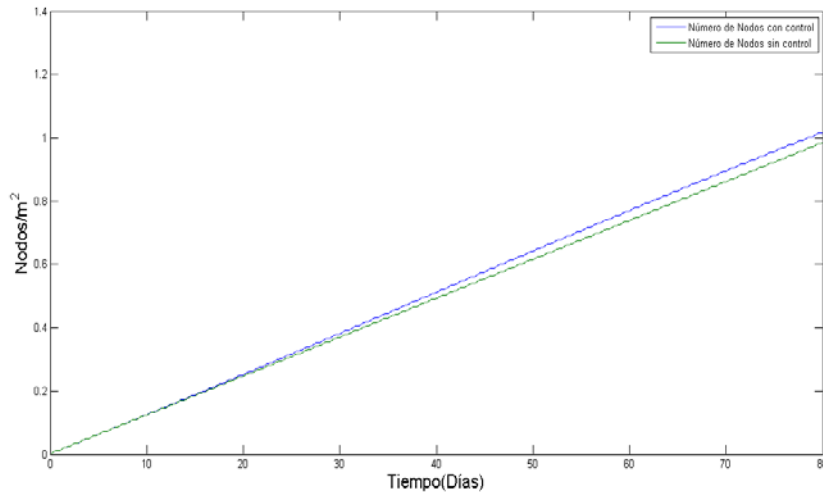


Figura 1 Número de Nodos.

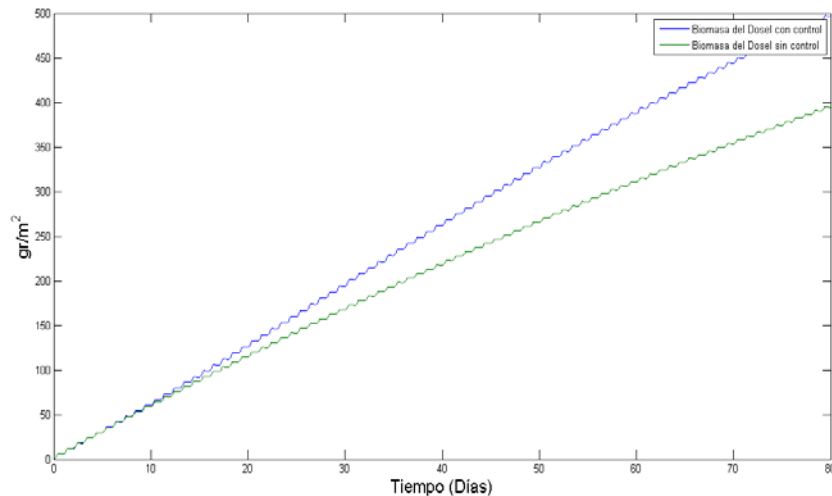


Figura 2 Biomasa seca del dosel.

Como se muestra en la figura 3, la biomasa del dosel también presenta un aumento si bien no es del 50% como la del dosel es de aproximadamente 30-40 %. Esto es razonable debido a que si existe un aumento de dosel la raíz también debe presentar un aumento ya que sino el peso del dosel arrancaría la planta del suelo.



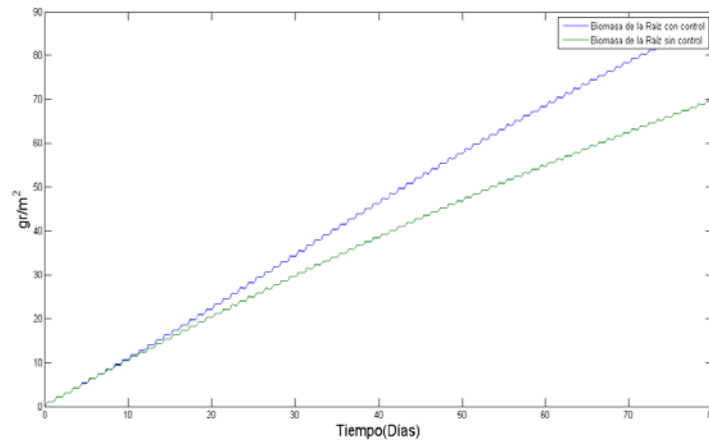


Figura 3 Biomasa seca de la raíz.

- **Simulación de las variables relacionadas al invernadero.** Como se muestra en la figura 4, la concentración de CO<sub>2</sub> se mantiene en el valor de 350 ppm (valor óptimo) dentro del invernadero, en el caso cuando el sistema no tiene la ley de control este valor permanece constante en todo el tiempo de cultivo (línea verde), para el caso cuando se tiene la ley de control actuando se observa que si bien la concentración permanece en las 350 ppm existen variaciones, éstas son debido a que la concentración debe ser mayor durante el día que por la noche, debido a que el proceso de fotosíntesis se realiza durante el día por ello se requiere mayor concentración pero no sobrepasar los límites permitidos para evitar daños al cultivo.

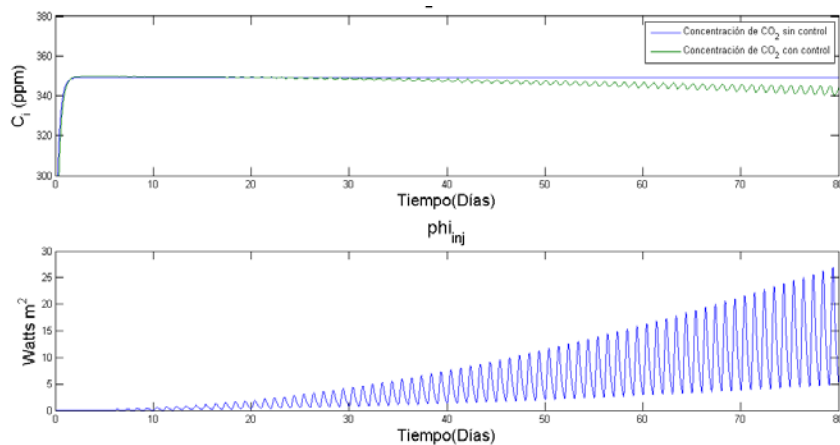


Figura 4 Concentración de CO<sub>2</sub> al interior del invernadero y variable de control.

También se observa que el consumo de energía para la variable de control la cual muestra la energía necesaria para seguir la trayectoria óptima de las variables de estado del sistema dinámico.

Como se muestra en la figura 5, la temperatura presenta variaciones, debido a que también se considera una ley de control para la temperatura esta es similar a la presentada en un trabajo anterior (E. Córdoba, 2017). En la figura 6 la humedad presenta cambios y requiere mayor concentración de humedad dentro del invernadero y esta puede llegar al 86% aproximadamente pero no puede decrecer del 80% de humedad.

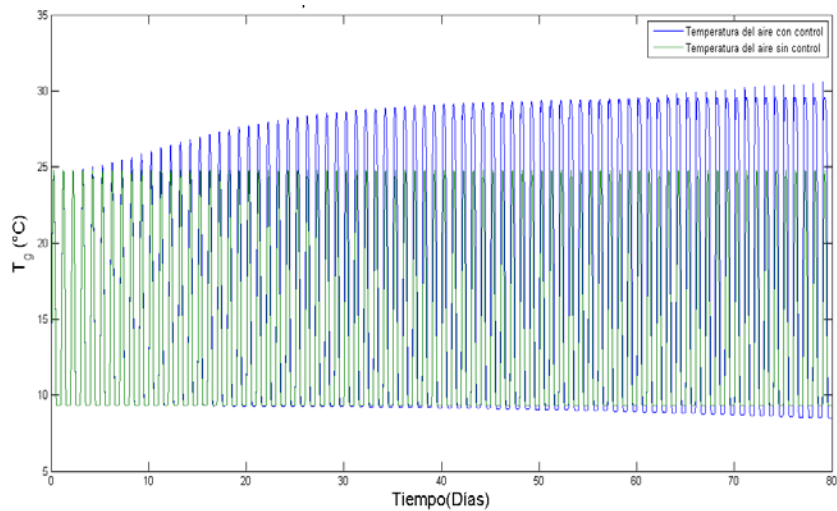


Figura 1 Temperatura dentro del invernadero.

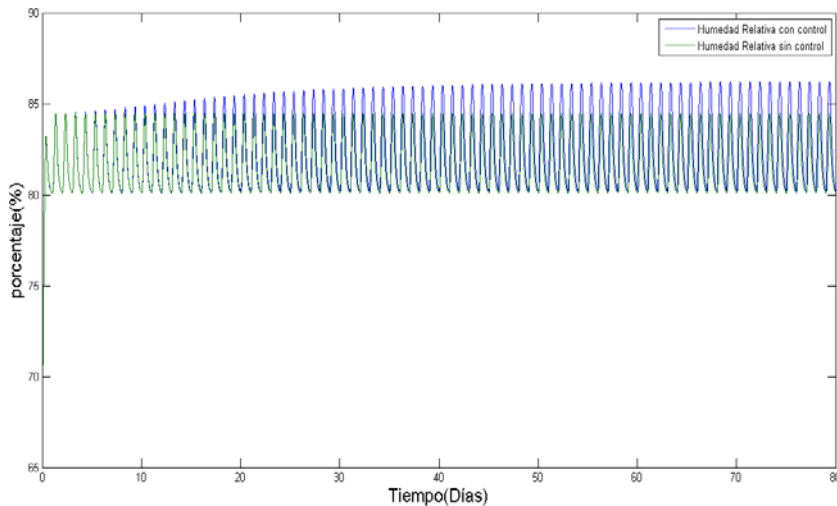


Figura 2 Humedad dentro del invernadero.

#### **4. Discusión**

Como se puede apreciar en éste trabajo se observa que los resultados son satisfactorios, es decir existe ganancias de aumento de biomasa seca del dosel de un 50 % más y de la raíz un 30-40 %, la concentración de CO<sub>2</sub> se mantiene en los parámetros óptimos (350 ppm) para el crecimiento óptimo del cultivo como se ven reflejados en el aumento del número de nodos, del dosel y la raíz, en este caso el consumo de energía es menor a 30 W/m<sup>2</sup>, ésta energía es la recomendable para seguir la trayectoria óptima de la variable de estado relacionada con la concentración de CO<sub>2</sub> al interior del invernadero.

Por ello la implementación de un sistema electrónico para regular la concentración dentro de un invernadero aumentaría la producción, lo cual es el objetivo de éste trabajo.

#### **5. Bibliografía y Referencias**

- [1] Córdoba, E., Gutiérrez, J. M., López, I., (2017), Control óptimo para el control de temperatura en un cultivo de tomate en invernadero basado en un Sistema dinámico, *Pistas Educativas*, 39, 83-95.
- [2] Kuroyanagi, T., (2014), Efficiency of carbon dioxide enrichment in an unventilated greenhouse, *Biosystems Engineerings*, 119, 58-68.
- [3] Li, Y., (2018), Automatic carbon dioxide enrichment strategies in the greenhouse: A review, *Biosystems Engineerings*, 171, 101-119.
- [4] Robb, S. H., (1964), Carbon Dioxide Enrichment of Greenhouse Atmospheres for Food Crop Production, *Economic Botany*, 34-36.
- [5] Seginer, I., (2017), Day-to-night heat storage in greenhouse:1 Optimization for periodic weather, *Biosystems Engineering*, 161, 174-187.
- [6] Van Straten, G., (2011), Optimal control of greenhouse cultivation, United States of America, CRC Press.