

# CÁLCULO DE LA RIGIDEZ DE UN ROBOT INDUSTRIAL DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD

***Pablo Rodríguez Arzate***

Tecnológico Nacional de México en Celaya

*jp.rodriguez.arzate@gmail.com*

***Eduardo Esquivel***

University of Cassino

*eesquivelg0687@gmail.com*

***Giuseppe Carbone***

University of Cassino

***Marco Ceccarelli***

University of Cassino

***Juan C. Jáuregui***

Universidad Autónoma de Querétaro

## Resumen

Como parte de una investigación para producir un sistema de compensación on-line para el proceso de Roll Hemming, proponemos un método para calcular la matriz de rigidez de las juntas de un robot industrial de seis grados de libertad. Este análisis fue hecho aplicando solo una fuerza sobre la el punto central de la herramienta, esta fuerza solo actuaba en la dirección Z del marco de referencia. El experimento puede ser mejorado sin embargo los resultados pueden ser utilizados como referencia para experimentos relacionados con robots industriales.

**Palabra(s) Clave:** Rigidez, Robot Industrial, Roll Hemming.

## **Abstract**

*As part of a research to produce an on-line compensation system for Roll Hemming process, we propose a method to calculate the joint stiffness matrix of an industrial robot of six degrees of freedom. This analysis was done applying only one force over the tool center point, this force only acted in the Z world frame reference direction. The experiment can be improved nevertheless the values can be used as reference for experiments related with industrial robots.*

**Keywords:** *Industrial robot, Roll Hemming, Stiffness.*

## **1. Introducción**

La rigidez es una propiedad de toda pieza de maquinaria, es un importante de casi cualquier proceso donde es necesario la aplicación de fuerzas. La maquinaria de alta rigidez es capaz de producir productos de alta calidad, sin embargo este tipo de maquinaria no ofrece mucha flexibilidad para cambiar su proceso, por otra parte los robots industriales tienen una gran flexibilidad para cambiar su proceso lo que permite realizar modificaciones rápidas sin necesidad de manufacturar nuevas piezas, pero la rigidez de un robot industrial es muy baja en comparación a la de máquinas especializadas lo que resulta en maquinados de baja calidad.

Para compensar la baja rigidez y mejorar los resultados de los robots industriales en las industrias del formado de metal autores como [1] han modelado robots industriales para ser utilizados en procesos de maquinado. En [2] implementaron a su modelo el efecto elástico de las juntas para ser comparado con una simulación de elemento finito y así estudiar sus efectos en operaciones de maquinado y single point incremental forming con robots industriales.

El Roll Hemming es un proceso que consiste en doblar la orilla de una pieza de lámina sobre si misma o sobre otra por acción de un robot industrial equipado con un rodillo, el proceso se realiza para producir una fuerte unión entre las láminas evitando imperfecciones que la soldadura u otras formas de unión producen. El Roll Hemming es mayormente utilizado en la industria automotriz para dar acabado a puertas, cofres y cajuelas de automóviles. El Roll Hemming requiere aplicación de fuerzas y como se mencionó anteriormente debido a la baja rigidez

de los robots industriales los resultados suelen ser de menor calidad de lo deseado, para incrementar la calidad del Roll Hemming diversos autores han aportado conocimiento científico a través de simulación y experimentación.

En [3] analizaron la influencia de láminas pre-tensadas sobre superficies cóncavas y convexas para compararlo con una simulación numérica de elemento finito, la simulación tomó en cuenta las características geométricas, la orientación del rodillo, la rigidez tanto del material como del robot industrial.

[4] Realizó un análisis de elemento finito del Roll Hemming, en el cual consideraron un amplio rango de parámetros como la rigidez, tamaño del rodillo, ángulo entre otros, con el fin de crear una ecuación cuadrática que predijera defectos en la unión.

En [5] se realizó un estudio de la influencia de la rigidez en el Roll Hemming, describiendo una relación directa entre la postura del robot y la rigidez del mismo. Este tipo de trabajos revelan el esfuerzo para mejorar el desempeño de los robots industriales en las industrias de formado de metal como lo es el Roll Hemming y de los cuales la rigidez ha sido un factor fundamental para caracterizar el comportamiento del robot industrial y del material. Es por eso que este experimento fue realizado para proponer una manera sencilla de medir la rigidez de un robot industrial para agilizar los análisis de compensación de robots industriales.

### **Robots industriales en el formado de metal**

Un proceso de formado de metal requiere de un robot capaz de producir fuerzas suficientemente grandes para deformar en el material, las fuerzas de reacción en la máquina obligan a considerar la rigidez en el diseño de la máquina y el proceso. Una rigidez de la máquina puede producir deformaciones indeseadas en el maquinado o incluso dañar la misma máquina. La figura 1 muestra dos probetas de lámina después de ser sometidas a procesos de Roll Hemming y Hemming clásico, las arrugas o wrinkles en la lámina sometida a Roll Hemming son resultado de las reacciones del material y la baja rigidez del robot, mientras

que la alta rigidez conseguida en el Hemming clásico sobrepasa las reacciones del material consiguiendo un mejor resultado.



Figura 1 Comparativa de defectos entre Roll Hemming y Hemming clásico.

La rigidez de un robot industrial vista desde el espacio cartesiano depende de la rigidez de cada una de las articulaciones y de la posición relativa entre ellas, en cambio la rigidez de un robot vista desde el espacio de las articulaciones permanece constante pero resulta impráctico utilizar el espacio de las articulaciones ya que sería necesario transportar los procesos desde el espacio cartesiano al espacio de las articulaciones por lo cual resulta más práctico transportar solamente la rigidez del robot al espacio cartesiano. Debido a la variación de rigidez del robot en el espacio cartesiano dos fuerzas con misma magnitud y dirección pero aplicadas en posiciones diferentes del robot (ver figura 2) producirán diferentes desplazamientos del extremo del robot, e inclusive se podrían producir desplazamientos en direcciones diferentes a la dirección de la fuerza aplicada.

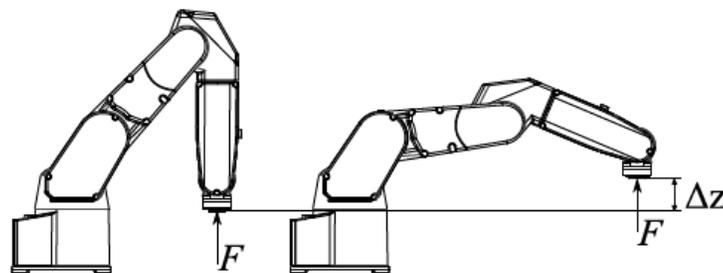


Figura 2 Comparativa de desplazamiento en dos posturas del robot.

El transportar la rigidez de las articulaciones al espacio cartesiano producirá un mapa de rigidez como el que se muestra en la figura 3 este mapa indicaría el comportamiento y variación de la rigidez en cada punto alcanzable por el robot, lo que permitiría una rápida localización del mejor espacio de trabajo y por ende la mejor posición del robot para trabajar un proceso en específico. Este mapa de rigidez puede ser definido mediante cálculos matemáticos y experimentación.

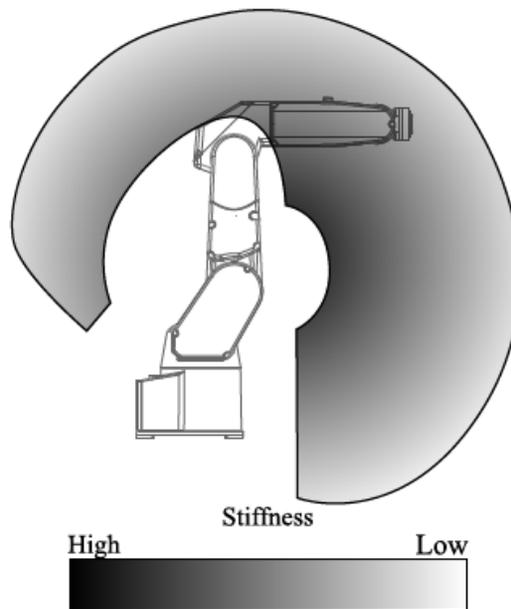


Figura 3 Representación de un mapa de rigidez.

## 2. Métodos

### Modelo cinemático del robot

Para este experimento se utilizó el robot industrial Fanuc LR Mate 200ic, un brazo robótico de seis grados de libertad, este robot es comúnmente utilizado con propósitos educativos y en operaciones de pick and place. La figura 4 muestra el diagrama de alambre del robot y los marcos de referencia del robot acorde a la notación propuesta por Craig [6].

En este experimento se consideraron todas las juntas como flexibles, la tabla 1 contiene los parámetros Denavit-Hartenberg del robot con valores de  $a_1 = 75mm$ ,  $a_2 = 300mm$ ,  $a_3 = 75mm$ ,  $d_4 = 320mm$ , y  $d_t = 200mm$  el parámetro  $d_t$

corresponde a la distancia desde el marco de referencia de la sexta articulación al Punto Central de la Herramienta (TCP) del robot.

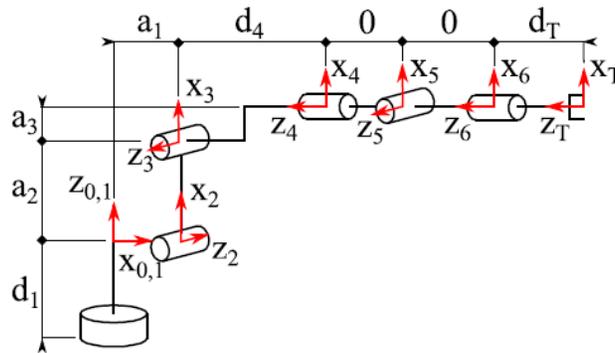


Figura 4 Diagrama de alambre del robot Fanuc LR Mate 200ic.

Tabla 1 Parámetros Denavit-Hartenberg del robot Lr Mate 200ic.

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-\frac{\pi}{2}$	$a_1$	0	$\theta_2 - \frac{\pi}{2}$
3	$\pi$	$a_2$	0	$\theta_3$
4	$-\frac{\pi}{2}$	$a_3$	$-d_4$	$\theta_4$
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\theta_5$
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	$\theta_6$
T	0	0	$-d_T$	0

### Análisis de rigidez del robot

La rigidez en el espacio cartesiano puede ser calculada desde el principio de trabajo virtual de [6], que establece que el trabajo realizado en el espacio de las articulaciones es el mismo que aquel realizado en el espacio cartesiano. En la ecuación 1  $\tau$  es el vector de torques aplicados a las articulaciones del robot y  $\delta_\theta$  es el desplazamiento de las articulaciones.

$$F^T \delta_X = \tau^T \delta_\theta \quad (1)$$

El vector  $F$  (ecuación 2) son las fuerzas y torque aplicadas en el TCP vistas desde el espacio cartesiano.

$$\mathbf{F} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \quad (2)$$

El vector  $\delta_{\mathbf{x}}$  (ecuación 3) contiene los desplazamientos del TCP en el espacio cartesiano.

$$\delta_{\mathbf{X}} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z \quad \delta \theta_x \quad \delta \theta_y \quad \delta \theta_z]^T \quad (3)$$

Considerando las definiciones de fuerza (ecuación 4) y torque (ecuación 5) en términos de rigidez.

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_X \delta_{\mathbf{X}} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_\theta \delta_\theta \quad (5)$$

Se transpone la ecuación de trabajo virtual (ecuación 1) y se remplazan los términos  $\mathbf{F}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  con las ecuaciones 4 y 5.

$$\delta_{\mathbf{X}}^T \mathbf{K}_X \delta_{\mathbf{X}} = \delta_\theta^T \mathbf{K}_\theta \delta_\theta \quad (6)$$

Reemplazando el término  $\delta_{\mathbf{x}}$  con la relación Jacobiana entre desplazamientos cartesianos y desplazamientos de las articulaciones (ecuación 7) obtenemos ecuación 8.

$$\delta_{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\Theta) \delta_\theta \quad (7)$$

$$\delta_\theta^T \mathbf{J}(\Theta)^T \mathbf{K}_X \mathbf{J}(\Theta) \delta_\theta = \delta_\theta^T \mathbf{K}_\theta \delta_\theta \quad (8)$$

Por la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices podemos retirar los términos  $\delta_\theta$ , ecuación 9.

$$\mathbf{J}(\Theta)^T \mathbf{K}_X \mathbf{J}(\Theta) = \mathbf{K}_\theta \quad (9)$$

Resolviendo para  $\mathbf{K}_X$ , tenemos ecuación 10.

$$\mathbf{K}_X = (\mathbf{J}(\Theta)^T)^{-1} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}(\Theta)^{-1} \quad (10)$$

La ecuación 10 da como resultado la rigidez del robot vista desde el espacio de trabajo cartesiano.

En el experimento para calcular la rigidez de las articulaciones (ecuación 11) del robot se utilizó el modelo matemático utilizado por Dumas et al. 2011 [7] que permite introducir fuerzas vistas desde el espacio cartesiano, la matriz  $\mathbf{K}_\theta$  es calculada mediante ecuación 12.

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} k_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\theta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_6} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \delta_{\mathbf{x}} \quad (12)$$

Donde  $\mathbf{C}$  representa un vector de la compliance un valor que corresponde al inverso de la rigidez, ecuación 13.

$$\mathbf{C} = \left[ \frac{1}{k_{\theta_1}} \quad \frac{1}{k_{\theta_2}} \quad \frac{1}{k_{\theta_3}} \quad \frac{1}{k_{\theta_4}} \quad \frac{1}{k_{\theta_5}} \quad \frac{1}{k_{\theta_6}} \right]^T \quad (13)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  (ecuación 14) es la relación Jacobiana entre las fuerzas externas (ecuación 2) y la posición geométrica del robot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_{11} \sum_{i=1}^6 J_{i1} F_i & \cdots & J_{16} \sum_{i=1}^6 J_{i6} F_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{61} \sum_{i=1}^6 J_{i1} F_i & \cdots & J_{66} \sum_{i=1}^6 J_{i6} F_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

### Restricciones del modelo matemático

La ecuación 1 de trabajo virtual y la definición del Jacobiano (ecuación 7) representan la relación entre los espacios de las articulaciones y el cartesiano, dado que la ecuación  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \delta_{\mathbf{x}}$  deriva de estas dos ecuaciones el cálculo de la compliance será más fiel al valor real conforme sean más pequeños los desplazamientos del TCP [6].

En caso de que la matriz **A** no tenga inversa el cálculo se realiza con la pseudo inversa de Moore-Penrose (ecuación 15) [7].

$$A^{-} = (A^T A)^{-1} A^T \quad (15)$$

### Metodología experimental

El primer experimento consiste en evaluar dos diferentes posiciones dentro de un plano formado por **XY** a una altura de **Z = -350mm**, se utilizaron dos posiciones a lo largo del eje **X** como se muestra en la figura 5. En cada posición se realizaron múltiples pruebas cambiando la magnitud de la fuerza aplicada en dirección al eje **Z**, la tabla 2 contiene las posiciones y la fuerza para cada una de las pruebas.

Tabla 2 Parámetros del experimento.

Posición (mm)	Prueba	Fuerza (N)
<b>X=660</b> <b>Y=0</b> <b>Z=-350</b>	1	20
	2	40
	3	60
	4	80
	5	100
	6	120
<b>X=425</b> <b>Y=0</b> <b>Z=-350</b>	7	20
	8	40
	9	60
	10	80
	11	100
	12	120

Para calcular los valores de compliance acorde a la ecuación 12 se requieren tres parámetros: el vector de posición de las articulaciones **θ**, la fuerza aplicada **F** y los desplazamientos cartesianos **δ<sub>x</sub>**.

Mediante el giro de un tornillo se moderó la fuerza aplicada durante el experimento, como se puede observar en la figura 6 la fuerza solo actuaba en dirección del eje **Z**. Para medir la fuerza aplicada sobre el TCP se utilizó un

herramental equipado con un sensor de fuerza. Los valores del vector de posición de las articulaciones y los desplazamientos del robot  $\delta_x$  fueron obtenidos desde el Teach Pendant del robot.

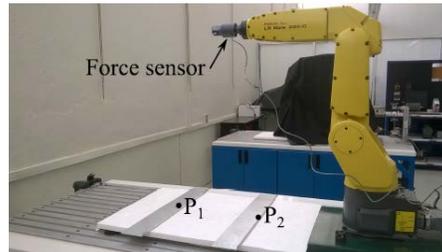


Figura 5 Esquema del experimento.

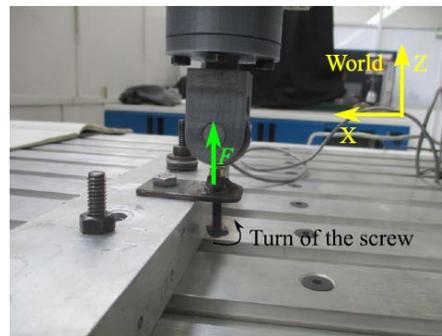


Figura 6 Marcos de referencia del experimento.

### 3. Resultados

Para el análisis de los datos se utilizó un programa computacional, todas las variables se manejaron acorde al Sistema Internacional de Unidades. El núcleo del programa consiste en el cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$ , el termino  $sjw$  representa la sumatoria  $\sum_{i=1}^6 \mathbf{J}_{ij} \mathbf{F}_i$  de la ecuación 14, posteriormente se evalúa la determinante de la matriz para saber si la matriz tiene inversa, en caso contrario se utiliza el comando `pinv( )` para calcular la pseudo-inversa, después se realiza el cálculo de la compliance, se le saca la inversa y se obtiene la rigidez, tal como se muestra en el código siguiente:

```
for i = 1:6
    for j = 1:6
        sjw=0;
```

```
for k = 1:6
    sjw=sjw+(J(k,j)*F(k,1));
end
A(i,j)=J(i,j)*sjw;
end
end
adet=det(A);
if adet~=0;
    C=A^(-1)*dX;
else
    C=pinv(A)*dX;
end
for i=1:6
    Kt(i,i)=1/C(i,1);
end
```

Como se muestra en la figura 7 el cálculo de la rigidez da resultados positivos y negativos, los resultados negativos son resultado de la dirección del marco de referencia en la evaluación de los parámetros D-H. También se puede observar que no se muestra un valor de  $K_6$  en la figura 7, en todas las pruebas del experimento el valor de la rigidez para la sexta articulación fue infinito, esto se debe a que la fuerza solo actuaba en dirección al eje  $Z$  coincidente al eje de rotación de la sexta articulación impidiendo movimiento en la misma lo que a vista matemática representa un valor infinito de la rigidez. Por último como se observa en la figura 7 los valores de  $K_1$  en la sexta prueba y  $K_2$  en la segunda prueba sobrepasan el rango de la escala, estos dos valores fueron considerados atípicos. Los valores de todas las pruebas fueron promediados (a excepción de los valores atípicos) y concentrados en la tabla 3.

#### 4. Discusión

Para este experimento la fuerza solo se aplicó solamente en dirección al eje  $Z$  pero esto resulto ser insuficiente para generar toda la información necesaria, esto se dedujo por el análisis de la matriz Jacobiana donde por la ubicación de los valores dentro de la matriz era necesario la utilización de un torque en dirección al eje de la sexta articulación. Con esto en mente podemos esperar que aplicando

fuerzas en otras direcciones se obtengan mejores resultados de la rigidez de las articulaciones.

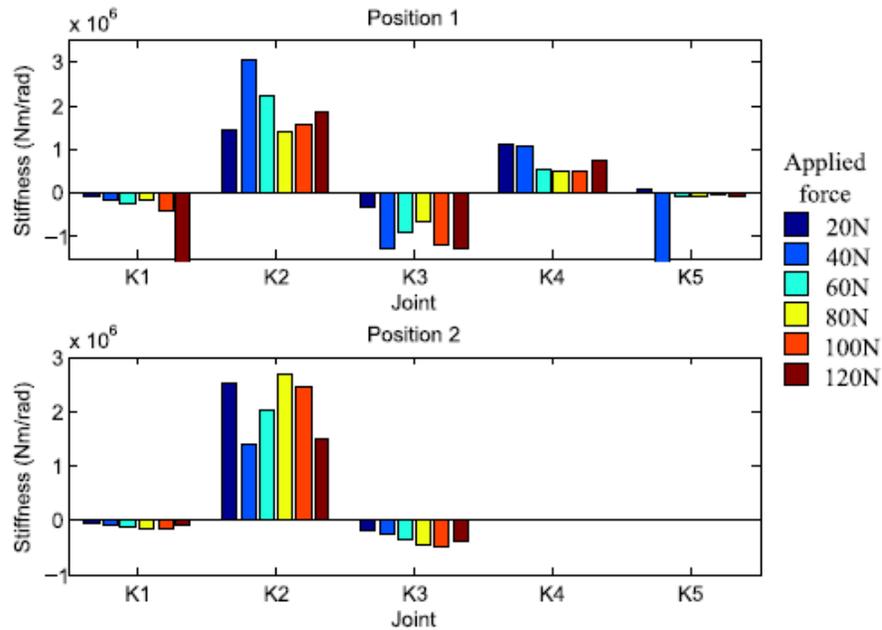


Figura 7 Gráfica de rigidez de las articulaciones.

Tabla 3 Valores promedio de la rigidez.

Articulación	Rigidez promedio (Nm/rad)
1	$-0.160 \times 10^6$
2	$2.001 \times 10^6$
3	$-0.651 \times 10^6$
4	$0.370 \times 10^6$
5	$0.020 \times 10^6$
6	<i>inf</i>

Por lo mencionado anteriormente se sugiere como mejora la aplicación de al menos un torque en dirección de la sexta articulación además de la utilización de una medición de la posición de las articulaciones distinta a la proporcionada por los encoders del robot.

Este experimento fue realizado con el propósito de facilitar la medición de la rigidez de un robot industrial para apoyar las investigaciones de control de los

robots industriales en el área de maquinado y formado de metal, en particular a la industria de Roll Hemming. En este apartado se mencionan trabajos que se le recomienda al lector revisar para profundizar en la investigación del Roll Hemming. Una alternativa al experimento mostrado en este documento fue utilizada por Belchior et al. en el 2013 [8] quien mediante cables tensados en el TCP del robot mide la rigidez de las articulaciones, en su trabajo además utiliza un sistema de compensación offline de robots industriales.

En sus trabajos del 2013 Kohrt [9] expone como las compensaciones offline se quedaran poco a poco obsoletas y como es que las compensaciones online ayudaran a reducir costos y tiempos de programación.

Actualmente los métodos de compensación online están siendo investigadas por investigadores como Guillo [10] quien implementó un sistema de control en tiempo real en un proceso de soldadura con robot industrial. Para futuros trabajos se pretende alcanzar resultados similares aplicados al proceso del Roll Hemming.

## **5. Bibliografía y Referencias**

- [1] E. Abele, M. Weigold, and S. Rothenbücher. Modeling and identification of an industrial robot for machining applications. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 56(1):387–390, 2007.
- [2] E. Abele, J. Bauer, C. Bertsch, R. Laurischkat, H. Meier, S. Reese, M. Stelzer, and O. Von Stryk. Comparison of Implementations of a Flexible Joint Multibody Dynamics System Model for an Industrial Robot. 6th CIRP International Conference on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering, pages 23–25, 2008.
- [3] N. Le Maoût, S. Thuillier, and P. Y. Manach. Classical and Roll-hemming Processes of Pre-strained Metallic Sheets. *Experimental Mechanics*, 50(7):1087–1097, 2010.
- [4] Roll Karl Eisele Urs and Mathias Liewald. Development of an empirical model to determine results from FEA roller hemming processes. *LS-Dyna Forum, Metallumformung I*, pages 1–14, 2010.

- [5] Welf-Guntram Drossel, Marko Pfeifer, Mathias Findeisen, Markus Rössinger, Alexander Eckert, and Daniel Barth. The influence of the robot's stiffness on roller hemming processes. *Isr Robotik*, pages 531–538, 2014.
- [6] John J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* 3rd. Prentice Hall, 1(3):408, 2004.
- [7] Claire Dumas, Stéphane Caro, Sébastien Garnier, and Benoît Furet. Joint stiffness identification of six-revolute industrial serial robots. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 27(4):881–888, 2011.
- [8] J. Belchior, M. Guillo, E. Courteille, P. Maurine, L. Leotoing, and D. Guines. Offline compensation of the tool path deviations on robotic machining: Application to incremental sheet forming. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29(4):58–69, 2013.
- [9] C. Kohrt, R. Stamp, A. G. Pipe, J. Kiely, and G. Schiedermeier. An online robot trajectory planning and programming support system for industrial use. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29(1):71–79, 2013.
- [10] Mario Guillo and Laurent Dubourg. Impact & improvement of tool deviation in friction stir welding: Weld quality & real-time compensation on an industrial robot. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 39:22–31, 2016.