ANÁLISIS DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA POR MEDIO DE LA TEORÍA APOE

ANALYSIS OF THE CONCEPTUALIZATION OF THE INTEGRAL DEFINED THROUGH THE APOE THEORY

Martha Patricia Jiménez Villanueva
Instituto Politécnico Nacional
mpjvillanueva1972@gmail.com

Elena Fabiola Ruiz Ledesma
Instituto Politécnico Nacional
efruiz@ipn.mx

Ángel Salvador Montiel Sánchez
Instituto Politécnico Nacional
chavamontiel@hotmail.com

Resumen

El estudio que se reporta toma como referencia el análisis de las construcciones mentales que se ponen en juego al abordar el concepto de integral definida, las cuales son: Acciones, Procesos y Objetos. Con base en la información obtenida se diseñaron tareas de acuerdo a su nivel cognitivo para propiciar una evolución en el desarrollo de su conocimiento del concepto en estudio. Se trabajó con una muestra de 14 estudiantes de nivel superior, quienes resolvieron un cuestionario relacionado con la integral definida. Los resultados señalan que los estudiantes se encuentran en diferentes etapas de construcción del concepto, ya que el 78% mostró evidencia de una concepción Acción al tener que realizar cada uno de los pasos en la resolución de los problemas propuestos, el 35% parece haber ido un poco más allá, en el sentido de que mostró evidencia del trabajo con objetos genéricos y el 7% parece haber encapsulado el conocimiento, ya que fue capaz de identificar las características para que una función sea integrable y de construir nuevas integrales. Por ello, se diseñaron tareas de acuerdo a la etapa de construcción en la que se encuentran.

Palabras Claves: Diseño de tareas, etapas de la teoría APOE, integral definida

Abstract

The study that is reported takes as reference the analysis of the mental constructions that are put into play when approaching the concept of definite integral, which are: Actions, Processes and Objects. Based on the information obtained, tasks were designed according to their cognitive level to promote an evolution in the development of their knowledge of the concept under study. We worked with a sample of 14 higher level students, who resolved a questionnaire related to the defined integral. The results indicate that the students are in different stages of construction of the concept, since 78% showed evidence of a conception Action having to perform each of the steps in the resolution of the proposed problems, 35% seems to have gone a little further, in the sense that it showed evidence of work with generic objects and 7% seems to have encapsulated knowledge, since it was able to identify the characteristics for a function to be integrable and to build new integrals. Therefore, tasks were designed according to the construction stage in which they are located.

Keywords: *Definite integral, design of tasks, stages of APOE theory.*

1. Introducción

Diversas investigaciones que se han realizado sobre problemas del aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales [Orton, 1983], [Bezuidenhout, 2000], [Muñoz, 2000], coinciden en que la mayor parte de ellos tienen su origen, en primera instancia, en una incomprensión de los conceptos básicos y fundamentales del cálculo, por lo que uno de los retos que enfrentan los profesores en las aulas, consiste en recuperar el significado de los conceptos que están inmersos en el Cálculo, utilizando la capacidad numérica, gráfica y simbólica que el medio computacional ofrece en la actualidad.

Las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería en la comprensión de la integral definida han motivado el desarrollo de investigaciones que intentan explicar las razones de tales dificultades desde diferentes enfoques: teoría de las representaciones [Narro, 2011], teoría APOE, [Boigues, 2009], [Jiménez, 2017], teoría de Campos Conceptuales [Muñoz, 2000].

Desde la perspectiva de las representaciones, con el objetivo de indagar si los estudiantes de diferentes ramas de ingeniería logran la aprehensión conceptual de la integral definida y la aplican a la resolución de problemas, [Narro, 2011] realizó un estudio con 176 estudiantes de ocho especialidades de ingeniería. Ella concluyó que el aprendizaje logrado consiste en acercamientos a la aprehensión de alguna representación semiótica, principalmente la algebraica (pueden proceder algorítmicamente aplicando reglas y algoritmos) y en menor proporción la geométrica; que no han reflexionado sobre la interpretación del concepto ni logran aplicarlo a la resolución de problemas.

Desde el enfoque de la teoría APOE (por ser las siglas de las construcciones mentales que se ponen en juego al abordar cualquier concepto matemático y que son estudiadas por esta teoría: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), algunos investigadores plantean la necesidad de relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia del valor *n* de la partición, como una manifestación de la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el paso al límite que configura el significado de la integral definida [Boigues, 2009].

Desde la teoría de Campos Conceptuales se plantea la problemática de la enseñanza del Cálculo Integral como un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, en el sentido de que se enseñan procedimientos para calcular integrales mediante los métodos de integración y hasta que se abordan las *aplicaciones* es cuando se estudian aspectos relacionados con la integral [Muñoz, 2000].

En el presente documento se reporta un estudio realizado sobre el concepto de integral definida, el cual tiene como finalidad mostrar las etapas cognitivas de acuerdo con la teoría denominada APOE en la que se encuentran los estudiantes en relación con dicho concepto.

Problemática de investigación y su justificación

Generalmente los grupos de Cálculo de primer semestre están conformados por estudiantes que cursaron el nivel medio superior en bachilleratos generales o en áreas específicas (fisicomatemáticas, administrativa, biológica). Esto conduce a la formación de grupos que incluyen estudiantes que han tenido o no un primer acercamiento a los conceptos propios del cálculo, como derivación e integración y, dentro de los que ya han tenido una primera aproximación a los conceptos, se pueden identificar estudiantes con diferentes niveles de comprensión. El que no todos los estudiantes hayan construido algunos conceptos que son fundamentales para construir nuevos conceptos al abordar los temas de las distintas asignaturas que llevarán a lo largo de su carrera, provoca en el estudiante situaciones adversas durante su trayectoria académica, convirtiéndose en un problema que debe ser resuelto entre el maestro y el estudiante, que en la mayoría de los casos recae la solución sólo en el estudiante, quien busca alternativas que lo ayuden a resolver la serie de situaciones desencadenadas por las deficiencias conceptuales con las que ingresó al nivel superior. Esta problemática motivó a desarrollar esta investigación, la cual se limitó a trabajar con uno de los conceptos fundamentales en Cálculo, que es el de la integral definida.

Objetivo de la investigación

Identificar las etapas en las que se encuentran los estudiantes de acuerdo a la teoría APOE, mediante la resolución de actividades sobre la integral definida, para proponer tareas que involucran a este concepto y, que vayan acordes a la etapa en la que se encuentre el estudiante.

Referentes teóricos

La teoría APOE se basa en la idea de Abstracción Reflexiva[1] de Piaget y ha sido reconstruida para el desarrollo de nociones matemáticas más avanzadas. Esta teoría proporciona un ciclo de investigación, que integra tres componentes:

- Análisis teórico.
- Diseño e implementación de enseñanza.

[1] La abstracción reflexiva consiste de dos partes. La primera parte, involucra la reflexión en dos sentidos: el primero en el sentido de tomar conciencia de los contenidos y las operaciones sobre esos contenidos, el segundo, en el sentido de reflejar el contenido y las operaciones desde un nivel o estado cognitivo más bajo a un nivel más alto (es decir, desde procesos a objetos). La segunda parte, consiste en la reconstrucción y la reorganización de los contenidos y las operaciones en esta etapa superior, donde resulta que las operaciones mismas se convierten en contenidos a los cuales se pueden aplicar nuevas operaciones (Piaget y García, 1973, citado en Arnon, et al. 2014, p.6).

- Observación, análisis y verificación de datos.

El propósito del análisis teórico de un concepto es proponer modelos que pueden desarrollarse en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender un concepto matemático. Este modelo es conocido dentro de esta teoría como *descomposición genética preliminar* del concepto, el cual es un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo el concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo [Arnon, 2014].

Estructuras y mecanismos mentales

Desde el punto de vista de la teoría APOE los individuos dan sentido a los conceptos matemáticos mediante la construcción y el uso de estructuras (o construcciones) mentales denominadas Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, llamadas etapas en la construcción de un concepto. Esas estructuras surgen como resultados de mecanismos mentales como la interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización.

Posteriormente, esta primera descomposición se usa como base teórica para diseñar materiales que se utilizan en el salón de clase, así como instrumentos de investigación que se pueden utilizar en la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto. Con base en los resultados del conocimiento de los individuos antes y después de la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto, se refina la descomposición genética para que sea más congruente con la forma en que realmente aprenden los individuos. Este procedimiento se repite, en principio, todas las veces que sea necesario, hasta que se considere que la descomposición propuesta permite tanto enseñar de manera efectiva como explicar las construcciones mentales de los individuos cuando están aprendiendo un concepto determinado [Trigueros, 2005].

En una descomposición genética se destacan las construcciones mentales, la relación entre ellas y los mecanismos mentales que un individuo podría realizar en la compresión de un concepto. Una construcción de **Acción** es una transformación que ocurre como una reacción a estímulos que el individuo percibe esencialmente como externos (una fórmula, un algoritmo, un conjunto de reglas). Una construcción de **Proceso** es una transformación que ocurre como resultado de una reflexión propiciada por la repetición consciente de acciones que conduce al individuo a pensar en cómo llevar a cabo el mismo tipo de acción, sin la necesidad de estímulos externos, además de describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos teniendo de esta manera más control de la misma [Dubinsky, 2001], [Trigueros, 2005]. Un Proceso puede ser resultado de la interiorización de una Acción, pero también puede generarse por la coordinación de dos o más Procesos; este mecanismo permite establecer relaciones entre los Procesos para determinar nuevos Procesos (mediante el uso de operaciones aritméticas "+, -, *, /", conectores lógicos "∧, ∨" entre otros). Una construcción de **Objeto** se logra mediante el mecanismo de encapsulación, que consiste básicamente en la conversión de una estructura dinámica (un Proceso) en una estructura estática (un Objeto), la cual se genera cuando el individuo tiene la necesidad de transformar un Objeto para resolver una situación [Arnon, 2014].

La realización de las construcciones mentales sobre un tópico determinado conduce al individuo al desarrollo de *concepciones*[2]*:* un individuo con una *concepción Acción* del nuevo concepto requiere de información que le indique paso a paso cómo realizar la transformación, donde cada paso de la transformación necesita ser realizado. Un individuo con una *concepción Proceso* del concepto tiene la habilidad para imaginar que se han realizado todos los pasos de la transformación sin necesidad de haber ejecutado cada uno de ellos de manera explícita y es capaz de saltarse pasos e incluso invertirlos. Un individuo con una *concepción Objeto* del concepto concibe un Proceso como un todo y es capaz de actuar sobre él y, realiza y construye transformaciones sobre su totalidad [Arnon, 2014].

En esta teoría se describe un **esquema** de un individuo, para un tópico matemático, como un conjunto coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas

[2] McDonald et al. (2000) hacen una distinción entre concepción y concepto, el primero es intrapersonal (las ideas o la comprensión del individuo) y la segunda es comunal (acordado por los matemáticos). En la teoría APOE, una concepción se desarrolla como un resultado de la actividad reflexiva y el concepto se refiere a la comprensión colectiva de ese contenido por la comunidad de matemáticas. (citado en Arnon, et al., 2014, p. 18)

previamente construidos, al que se recurre para tratar con una situación matemática nueva. El término *coherente* se usa en el sentido que éste da, explícita o implícitamente, un medio para determinar cuál fenómeno está en el ámbito del Esquema y cuál no [Dubinsky, 2001].

Cuando un individuo se enfrenta a una situación matemática específica, evoca un Esquema para resolverla y pone en juego aquellos conceptos que están disponibles para él en ese momento, así como el tipo de construcciones que posee del concepto (Acciones, Proceso y Objetos) y utiliza relaciones entre esos elementos. Al respecto [Trigueros, 2005] afirma que:

> "*Ante una misma situación, diferentes estudiantes pueden utilizar los mismos conceptos y diferentes relaciones lógicas entre estos conceptos. El tipo de relaciones lógicas que cada sujeto establece entre los elementos que utiliza, así como el tipo de construcciones que hace sobre el concepto matemático, depende del conocimiento matemático que tenga. Se espera que a mayor conocimiento se hayan construido más relaciones y que estas relaciones formen estructuras cognitivas coherentes en el sentido de que el individuo distinga claramente aquellas situaciones que pueden tratarse poniendo en juego un esquema específico y aquellas para las que no es adecuado"* [p. 11].

Así, cuando los estudiantes resuelven un mismo problema, es posible identificar, en las Acciones que realizan, Esquemas en distintos grados de formación o estructuración dependiendo del tipo de relaciones que pueden manifestarse como construidas. En la figura 1 se esquematiza la relación entre las estructuras y los mecanismos mentales para construcción de conceptos matemáticos.

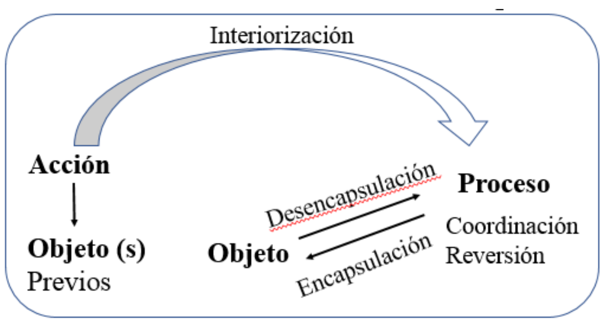

Figura 1 Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conceptos matemáticos [Arnon, 2014].

2. Métodos

El estudio se realizó en tres etapas (figura 2), en la primera etapa denominada **diseño**, se seleccionó la muestra de estudiantes con los que se trabajaría y se diseñó el cuestionario, con la finalidad de identificar los conocimientos que tenían los estudiantes con relación al concepto de integral definida.

En la etapa 2 denominada **ejecución**, se aplicó el cuestionario a la muestra de estudiantes, se efectuó una revisión general de las respuestas dadas por los estudiantes, se determinaron categorías y de acuerdo a ellas es como se clasificaron las respuestas de los participantes.

En la etapa 3, llamada **evaluación**, se organizaron las respuestas de acuerdo a las etapas de la teoría APOE.

Con la información obtenida se diseñaron actividades que van acorde a los niveles en los que se encuentran los estudiantes de acuerdo a la teoría APOE.

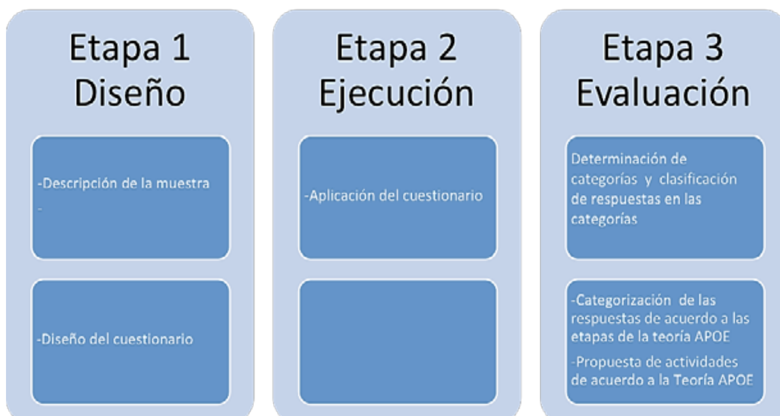

Figura 2 Etapas del método empleado en la investigación.

Etapa 1. Diseño

Descripción de la muestra

Inicialmente se contempló un grupo formado por 30 estudiantes que se encontraban cursando la asignatura de Cálculo en su primer semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales. El día en que se aplicó el cuestionario varios estudiantes llegaron después de iniciado la aplicación del cuestionario, por lo que ya no participaron y sólo estuvieron presentes desde el inicio de la sesión

14 de los estudiantes del grupo, por lo que sólo se contempló a esta cantidad de estudiantes para la investigación. Los participantes proceden de diferentes áreas del nivel medio superior: fisicomatemática, contador-administrativo y bachillerato general. La edad de los estudiantes está entre 18 y 19 años.

Cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico sobre la integral definida está conformado por 7 ítems, que toman en cuenta las diferentes etapas de la construcción del conocimiento, de acuerdo a la teoría APOE. Las cuestiones abordadas se muestran en la tabla 1.

Tabla 1 Cuestionario diagnóstico de integral definida.

	Reactivos
1	¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)dx$? Describe y da un ejemplo.
2	¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$? Describe y da un ejemplo.
3	Evaluar la integral definida $\int_{-2}^{3}(x+2)\,dx$ usando: a) La definición de límite. b) Una interpretación geométrica. c) Reglas de integración.
4	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$ Hallar: a) $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ b) $\int_0^1 f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx$ c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)dx$ d) $\int_0^1 3f(x)dx$
5	Determina si la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo [3,5]. Escribe una breve explicación
6	Proporciona un ejemplo (si es posible) de una función que sea integrable en el intervalo [-1,1], pero no continua en [-1,1]
7	Escribe la expresión $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$ como una integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

Después de la aplicación del cuestionario, se revisaron las respuestas dadas por los estudiantes y se clasificaron en categorías. Con esta información se hizo la categorización de acuerdo con las etapas de comprensión del concepto de integral definida que plantea la teoría APOE. Estas acciones corresponden a la Etapa 3 del método de investigación, así como a la parte de resultados del presente documento.

3. Resultados

En este apartado del documento se contempla lo correspondiente a la etapa 3 del método de investigación empleado.

Etapa 3. Evaluación

Primero se proporcionan los resultados obtenidos del cuestionario diagnóstico, usando para ello una tabla por cada pregunta del cuestionario. Las respuestas dadas a las preguntas abiertas fueron clasificadas en categorías, de acuerdo a lo expresado por los estudiantes, anotándose la frecuencia de aparición de las mismas expresadas como porcentajes, con la finalidad de hacer un conteo y mostrar los resultados de forma cuantitativa y su correspondiente análisis cualitativo.

En la tabla 2 se presentan los resultados obtenidos en la pregunta 1, que dice: ¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)dx$? Describe y da un ejemplo. Las categorías asociadas a la primera pregunta fueron: Concepción que tienen los estudiantes de la integral definida, considerándose 4 opciones, las cuales fueron: como un área, como el proceso inverso de la derivada, como una suma infinita y otra, que no guarda relación con la integral. La segunda categoría fue la ejemplificación de una integral definida, empleando para ello: Una expresión específica de una función, una función genérica y no ejemplaron.

Tabla 2 Resultados de la pregunta 1.

Categorías Concepción de integral definida/Ejemplificación	Función específica	Función genérica	No ejemplifican
Es un área	35.7%	21.4%	14.3%
Es el proceso inverso de la derivada	21.4%	14.3%	0
Es una suma infinita	0	7.1%	0
Otra-sin relación con la integral	0	0	7.1%
Total	57.1%	42.8%	21.4%

La concepción de integral definida que tiene el 57% de la muestra de estudiantes es el de área y de este porcentaje el 35% empleó una función específica para ejemplificar, el otro 21 % se encuentra en una etapa de generalización.

En la tabla 3 se presentan los resultados del reactivo 3. En éste se solicita a los estudiantes calcular una integral de una función específica, en particular una función lineal, en un intervalo usando diferentes acercamientos, la integral como un límite, la integral como un área (representación geométrica) y mediante las reglas de integración.

Tabla 3 Resultados del reactivo 3

Categorías	Usando la definición de límite	Representación geométrica	Regla de Barrow
Identifica y resuelve correctamente	7.1%	35.7%	71.4%
Identifica y no resuelve correctamente	21.4%	7.1%	21.4%
Identifica y no resuelve	0%	50%	0%
No identifica la representación	7.1%	0%	0%
No responde	64.3%	7.1%	7.1%

En la tabla 3 se observa que 71% de los estudiantes resolvió la integral definida empleando la regla de Barrow, lo que implica que estos estudiantes trabajan mejor usando técnicas de integración que a través de otra representación. En la tabla 4 se presentan los resultados obtenidos del reactivo 4. En éste se proporciona el valor de dos integrales, a saber, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ y $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 5$, con base en estos valores se solicita al estudiante determinar el valor de otras integrales.

Tabla 4 Resultados del reactivo 4

	Correctas	Incorrectas	No responde
$\int_{-1}^{0} f(x)dx$	64.3%	14.3%	21.4%
$\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx$	35.7%	35.7%	28.6%
$\int_{-1}^{1} 3f(x)dx$	71.4%	0%	28.6%
$\int_{0}^{1} 3f(x)dx$	71.4%	0%	28.6%

De acuerdo con los resultados arrojados en el reactivo 4, entre el 35% y el 71% de los estudiantes muestra evidencia que puede operar con objetos genéricos.

En la tabla 5 se presentan los resultados obtenidos del reactivo 5. En el que se solicitaba valorar la integrabilidad de una función en un intervalo dado.

Tabla 5 Resultados del reactivo 5.

Categorías	No es integrable	Si es integrable	No responden	Total
Reconocimiento de un punto de discontinuidad de la función	14.3%	0%	0%	14.3%
Reconocimiento de una asíntota vertical de la función	14.3%	0%	0%	14.3%
Uso de la regla de Barrow correctamente. No hay logaritmos de valores negativos	14.3%	0%	0%	14.3%
No hay un área encerrada	7.2%	0%	0%	7.2%
Uso de la regla de Barrow de forma incorrecta	0%	14.3%	0%	14.3%
No justifica	0%	7.2%	28.4%	28.4%
Total	50.1%	21.5%	28.4%	100.0%

En el reactivo 5, el 28% no responde, el 21% indica que la función si es integrable y el 50% de los estudiantes señala que la función no es integrable, en sus argumentaciones manifiestan que la función tiene una discontinuidad infinita, una asíntota o no hay un área encerrada o limitada.

Las tablas de los reactivos 6 y 7 no se agregan debido a que no es posible hacer una clasificación de las respuestas porque un alto porcentaje de estudiantes no respondió. De acuerdo con los resultados mostrados en las tablas 3 a la 6, se realizó una clasificación con base en las etapas de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos). En la segunda columna de la tabla 6 se presentan los indicadores correspondientes a cada una de las etapas, estos indicadores no son excluyentes, por lo que hay estudiantes que pueden estar en dos o más de ellos. En la última columna se encuentran los porcentajes de los estudiantes que se han clasificado de acuerdo a los indicadores representativos de los distintos niveles de la teoría APOE.

Con base en la categorización llevada a cabo de los resultados obtenidos, se diseñaron tareas de acuerdo a las etapas que plantea la teoría APOE con la intención de que los estudiantes puedan ir avanzando en el desarrollo de su conocimiento.

Tabla 6 Clasificación de los estudiantes de acuerdo a las etapas de la teoría APOE.

Etapas de la Teoría APOE	Indicadores	Porcentaje de estudiantes
Acciones	Recordar fórmulas	71.4%
	Explicación de la integral usando valores específicos	35.7%
	Uso de los distintos registros (algebraico y gráfico) para mostrar casos específicos	42.8%
Etapas de la Teoría APOE	Indicadores	Porcentaje de estudiantes
	Cálculo de la integral definida usando valores específicos.	71.4%
Etapas de la Teoría APOE	Indicadores	Porcentaje de estudiantes
Procesos	Explicación de la integral usando valores genéricos	42.8%
	Uso de los distintos registros (numérico, algebraico y gráfico) para generalizar.	42.8%
	Cálculo de integrales mediante la regla de Barrow usando elementos genéricos.	71.4%
Objeto	Hablar de las características del objeto	7.1%
	Construir nuevas integrales	7.1%

Propuesta de tareas acorde a las etapas de la teoría APOE

En la tabla 7 se presentan ejemplos de tareas de acuerdo a las etapas de la teoría APOE.

En la primera tarea se requiere del trabajo con objetos concretos, una expresión de una función específica, un intervalo dado y un número fijo de subintervalos. Este tipo de tareas se deben presentar a estudiantes que no han tenido un primer acercamiento al concepto y aquellos que muestran una concepción Acción del concepto de integral definida.

En la segunda tarea se plantea el trabajo con objetos genéricos, cualquier función, cualquier intervalo, con diferente número de subintervalos. Este tipo de tareas puede presentarse a estudiantes que muestren evidencia de haber interiorizado el trabajo con objetos específicos y que pueden imaginar el trabajo con objetos genéricos. En la tercera tarea se requiere pensar en el proceso como un todo para identificar sus características y poder operar con él. Este tipo de situaciones pueden presentarse a estudiantes que muestran evidencia de haber encapsulado el proceso en un objeto.

Tabla 7 Diseño de tareas.

Etapa Teoría APOE	Tareas
Acción	Calcular la suma de Riemann inferior de las funciones , en el intervalo (I) indicado y el número de rectángulos (*n*) dado. Escribe una explicación de cuándo la suma inferior es positiva y cuándo es negativa.
Proceso	Escribe una expresión para determinar una suma de Riemann inferior de una función *f*, en un intervalo *I*, con *n* subintervalos. Explica qué ocurre a medida que aumenta el número de subintervalos.
Objeto	Propón dos funciones discontinuas en un intervalo cerrado con las cuales es posible calcular una suma de Riemann inferior para cualquier partición de ese intervalo y dos con las cuales no es posible. a) ¿Qué característica tienen en común las dos funciones con las cuales es posible calcular una suma de Riemann inferior para cualquier partición? b) ¿Qué característica tienen en común las dos funciones con las cuales no es posible calcular una suma de Riemann inferior para cualquier partición? c) Escribe una partición de un intervalo cerrado para la cual no es posible calcular una suma de Riemann inferior para los otros dos ejemplos, muestra la gráfica de los rectángulos y justifica tu respuesta.

4. Discusión

En este apartado se realiza un análisis de carácter cualitativo de las respuestas del cuestionario para profundizar en los procesos cognitivos de los estudiantes en relación con las etapas de la construcción del concepto de integral definida, de acuerdo a la teoría APOE.

Con relación a la pregunta 1, se identificaron tres ideas que los estudiantes tienen de la noción de integral definida: como área, como un proceso inverso de la derivada y como una suma infinita. Además, se detectó el trabajo con objetos específicos o genéricos. De acuerdo con las respuestas de los estudiantes se obtuvo que la idea de integral definida que predomina es la de área, seguida de la idea de integral definida como el proceso inverso de la derivada. Ambas son ejemplificadas preferentemente usando una función específica. También se observa que sólo un estudiante de los 14 hizo referencia a una suma de diferenciales.

Respecto a la pregunta 2, el 14% de los estudiantes participantes establecieron una diferencia entre la integral definida (un número) y la integral indefinida (una función). El resto de los estudiantes sólo realizó un parafraseo de la explicación dada en la pregunta 1.

Con relación al reactivo 3, un elevado porcentaje de los estudiantes participantes identificó que hay diferentes representaciones de la integral definida pero no lograron hacer un uso correcto de dos de las representaciones (idea de límite y representación geométrica). A diferencia de la representación algebraica mediante reglas de integración, donde un alto porcentaje de estudiantes (71%) respondió correctamente.

En el reactivo 4 el 64% de la muestra de estudiantes logró resolver correctamente la primera integral, siendo que se proporcionaba una integral expresando al integrando de forma general (f(x)), pero en las tres siguientes integrales, menos de la mitad de los alumnos lograron resolverla correctamente, por lo que se puede decir que tienen una concepción Acción al no poder manipular las integrales expresadas en su forma general. No ha llegado al trabajo de forma genérica que requiere una concepción Proceso y Objeto.

En el reactivo 5, la mitad de los estudiantes de la muestra se da cuenta que la integral propuesta no es integrable, pese a que sólo el 14% usa la regla de Barrow de forma correcta, los otros estudiantes reconocen que hay una discontinuidad en un punto del intervalo dado, pero no hay un progreso en su razonamiento por lo que sólo atribuir la no inegrabilidad de una función a ese criterio, no es suficiente, pues no en todos los casos se cumple. Con relación a este reactivo, se puede decir que solo el 14% se ubica en una concepción Objeto al reconocer las propiedades de una función que se puede integrar, mientras que el 28%% se encuentra en una concepción proceso ya que muestran algunos indicios de las propiedades y el resto de los estudiantes se considera que tienen una concepción Acción del concepto de integral definida.

Respecto a los reactivos 6 y 7 un alto porcentaje (78%) de estudiantes no respondió, solo un estudiante proporcionó una función definida por partes en un intervalo cerrado con una discontinuidad de salto y ninguno logró relacionar los elementos involucrados en una integral definida con los que aparecen en una suma de Riemann.

5. Conclusiones

La integral definida es un concepto fundamental en los cursos de cálculo de las carreras de ingeniería, sin embargo, el aprendizaje de este concepto se ha caracterizado por la memorización de fórmulas y el uso de reglas que el estudiante repite sin una comprensión real del concepto, por tanto, el estudiante no es capaz de reconocer situaciones problema relacionadas con la integral definida y mucho menos enfrentarlas con éxito.

Los estudiantes que ingresan a la universidad se encuentran en diferentes etapas de construcción del concepto de integral definida asociadas principalmente al estudio del concepto como área mediante la aplicación de la regla de Barrow, pero con una baja, incluso nula, comprensión del concepto como el límite de una suma de cantidades formadas multiplicativamente (suma de Riemann).

Al considerar los 7 reactivos que conformaron el cuestionario, se considera que los estudiantes que ingresan a un primer curso de Cálculo en el nivel superior tienen diferentes etapas de construcción del concepto de integral definida ya que en la muestra de estudiantes con los que se trabajó, 78% presenta evidencia de una concepción Acción, el 35% parece haber ido un poco más allá de una concepción Acción en el sentido de que aborda el trabajo con objetos genéricos y el 7% parece estar en el nivel de Objeto en la construcción del concepto de integral definida ya que es capaz de identificar las características para que una función sea integrable así como dar ejemplos genéricos de integrales y construir nuevas integrales.

No es suficiente únicamente diseñar una lista de ejercicios para que los estudiantes realicen extra-clase, es necesario hacer una clasificación de cuáles debe hacer el estudiante de acuerdo con la etapa de construcción en la que se encuentren con el objetivo de ir avanzando en el desarrollo de su conocimiento.

6. Bibliografía y Referencias

[1] Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

[2] Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. Proceedings of the 24th Conference of International Group of the Psycology of Mathematics Education, 2, 73-80.

[3] Boigues, F. J., Llinares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenieria relacionadas con las ciencias de la naturaleza: Un análisis a través de la lógica Fuzzy. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(3), 255-282.

[4] Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2013) Investigaciones Sobre la Enseñanza del Cálculo. El Cálculo y su Enseñanza, 4(1), 57-82.

[5] Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer Academia Publisher.

[6] Jiménez-Villanueva, M. P. (2017). Estudio de la integral definida: un acercamiento a través de la función de acumulación. (Tesis de doctorado). CINVESTAV-IPN, México.

[7] Muñoz, G. (2000, julio). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo. Relime, 3 (2), 131-170.

[8] Narro, R. P. (2011). Aprendizaje de la Integral Definida en estudiantes de ingeniería. El cálculo y su enseñanza, 3, 32-43.

[9] Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. Educational Studies in Matematics, 14, 1-18.

[10] Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Education Mathematica, 17 (001), 5-31.