USO DE UNA CALCULADORA DE BOLSILLO PARA DETERMINAR VALORES CON LOS QUE SE OBTIENE LA GRÁFICA DE BODE DE UN SISTEMA REPRESENTADO POR SU FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

José Ángel Ruiz Aguilar
Instituto Tecnológico de Saltillo
jaruiz@itsaltillo.edu.mx

Manuel Enrique Sandoval López
Instituto Tecnológico de Saltillo
edno.476@gmail.com

Narda Lucely Reyes Acosta
Instituto Tecnológico de Saltillo
nacosta@itsaltillo.edu.mx

Resumen

Los autores presentan en este artículo la forma en que se puede emplear una calculadora científica de bolsillo, de gama de valor baja, para obtener valores que se emplearan para determinar la gráfica de respuesta a la frecuencia, tipo Bode, sin utilizar el trazado de asíntotas y la suma de pendientes. Cabe aclarar que se utiliza una calculadora CASIO *fx–350 MS* cuyo costo en el mercado está alrededor de 200 pesos Mexicanos.

Palabras clave: Bode, calculadora Casio, gráfica, gráficas logarítmicas, magnitud y ángulo.

Abstract

The authors present in this article how you can use a scientific pocket calculator, economic, to obtain values that will be used to determine the graph of frequency response, Bode type, without using tracing asymptotes and the sum of slopes. It is clear that a calculator is used CASIO fx – 350 MS whose market cost is around 200 Mexican pesos.

Keywords*: Bode, Casio calculator, plot, logarithm plot, magnitude and angle.*

1. Introducción

Dada la representación de un sistema de control lineal e invariante en el tiempo, de una entrada y una salida mediante su función de transferencia, como se muestra en la figura 1.

Figura 1 Representación de un sistema de control.

Si la excitación tiene la forma: $x(t) = Xsin(\omega t + \alpha)$, se espera que la respuesta adopte la forma $y(t) = Ysin(\omega t + \delta)$ en la cual tanto la magnitud Y como el ángulo de δ se ven afectados por la variaciones que produce la función de transferencia al variar la frecuencia.

Esto lo observó Bode, Nyquist, etc. [1], [2], y propusieron, cada uno por su cuenta, una metodología bastante novedosa, en el tiempo en el que se estableció, para representar estos comportamientos. En el artículo propuesto se presenta una alternativa para el trazado de las gráficas de Bode.

2. Desarrollo

Partamos de una función de transferencia sencilla adoptada de cualquier libro de Control, por ejemplo:

$$G(s) = \frac{20(s+10)}{(s+2)} \tag{1}$$

Para la respuesta a la frecuencia se requiere de dos relaciones, a saber, una para la traza de la magnitud logarítmica y otra para la del ángulo. Para obtener la respuesta a la frecuencia, hacemos que la variable compleja s solamente esté compuesta por pura parte imaginaria definida por $s = j\omega$. Así, estas relaciones están definidas por:

$$Lm\{G(j\omega)\} = 20 * log\left|\frac{20(10+j\omega)}{2+j\omega}\right| \tag{2}$$

y

$$\measuredangle G(j\omega) = \measuredangle \frac{20(10+j\omega)}{2+j\omega} \tag{3}$$

Donde Lm significa el logaritmo de la magnitud y $\measuredangle$ significa el ángulo de.
La evaluación de estas dos relaciones está dada por:

$$Lm\{G(j\omega)\} = 20 * log\frac{20 * \sqrt{10^2+\omega^2}}{\sqrt{2^2+\omega^2}} \tag{4}$$

y

$$\measuredangle G(j\omega) = \measuredangle(20) + \measuredangle(10+j\omega) - \measuredangle(2+j\omega) \tag{5}$$

De donde se determina que:

$$\measuredangle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} \tag{6}$$

Para obtener la información para las gráficas respectivas de Bode mediante una calculadora de bolsillo, se procede de la siguiente manera [3]:

- Se almacena el valor de 0.1 en la variable "X", para lo cual oprima las siguientes teclas:

En la pantalla deberá de aparecer 0.1→X

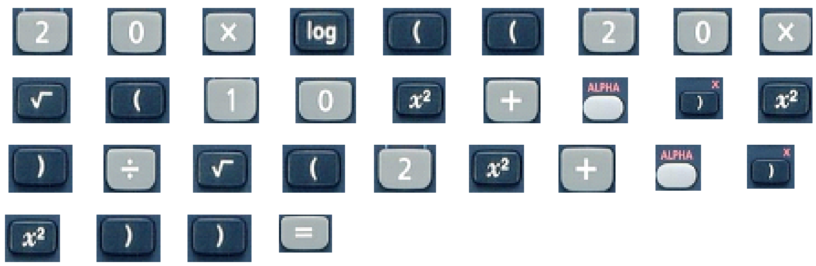
- Para verificar que en “X” esté almacenado el valor cero, ejecute lo siguiente:

En la pantalla deberá de aparecer X=0.1

- Se procede a introducir la siguiente función correspondiente al logaritmo de la magnitud en la calculadora:

$$Lm\{G(j\omega)\} = 20 * log\frac{20 * \sqrt{10^2 + \omega^2}}{\sqrt{2^2 + \omega^2}} \tag{7}$$

Oprimir las siguientes teclas:



La calculadora responde con el valor de: **39.9896**

- Se procede a introducir la siguiente expresión para el cálculo del ángulo en la calculadora:

$$\measuredangle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} \tag{8}$$

Oprimir las siguientes teclas

La calculadora responde con el valor de: -2.2895

Una vez introducida las dos expresiones en la calculadora y después de obtener los valores respectivos para la magnitud y para el ángulo, anote esas cantidades en forma tabular. Para ello, haga una lista de los valores que le interesen sean evaluados para lo cual recomendamos realice una tabla como la mostrada a continuación. Se sugieren los siguientes valores a evaluar.

ω = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 2, 5, 10, 50, 100, 200, 1000, 5000, 10000.

Al sustituir los valores de frecuencia se obtienen las evaluaciones de la magnitud y ángulo correspondientes mostrados en la tabla 1.

Tabla 1 Valores de magnitud y ángulo del ejemplo 1.

ω	$\boldsymbol{Lm\{G(j\omega)\}}$	$\boldsymbol{\measuredangle G(j\omega)}$
0.1	39.9896	-2.2895
0.3	39.9073	-6.8124
0.5	39.7475	-11.1738
0.7	39.5194	-15.2859
1	39.0741	-20.8545
2	37.1600	-33.6901
5	32.3657	-41.6335
10	28.8605	-33.6901
50	26.1840	-9.0193
100	26.0621	-4.5648
200	26.0310	-2.2895
800	26.0213	-0.5729
1000	26.0210	-0.4583
5000	26.0206	-0.0917
10000	26.0206	-0.0458

Una vez obtenidos los valores de $\omega=0.1$, se procede a almacenar el valor de $\omega=0.3$ para ello, siga la secuencia que se muestra a continuación. Observe que se está repitiendo el paso número 1, ahora con el valor de 0.3 oprima:

En la pantalla debe de aparecer 0.3→X, pulse la tecla de navegación  hacia arriba hasta que aparezca en la pantalla la secuencia con la que se evaluó el logaritmo de la magnitud, ahí oprima la tecla  de la calculadora y aparecerá el valor de 39.9073; nuevamente pulse la tecla de navegación hacia arriba hasta que aparezca en la pantalla la secuencia con la que se evalúa el ángulo. Vuelva a oprimir la tecla  y aparecerá el valor de -6.8124.

Repetir los pasos arriba descritos con los diferentes valores de frecuencia (ω)

Los datos de la tabla 1 se puede vaciar a una escala semilogaritmica para la obtención de la gráfica de Bode. En la figura 2 se muestra la información colocada en esta escala.

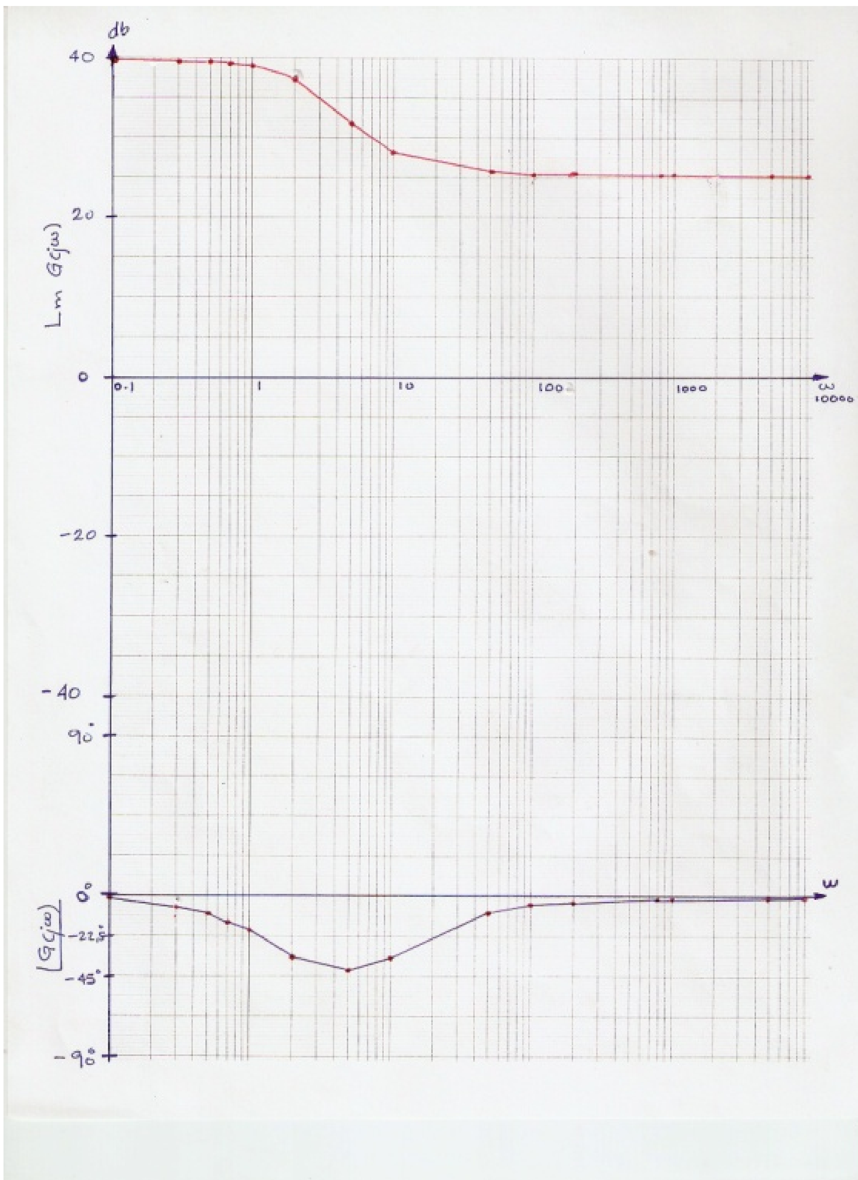


Figura 2 Gráfica de puntos obtenidos de la primera función de transferencia.

La simulación en MATLAB [4] de esta función de transferencia arroja la gráfica mostrada en la figura 3.

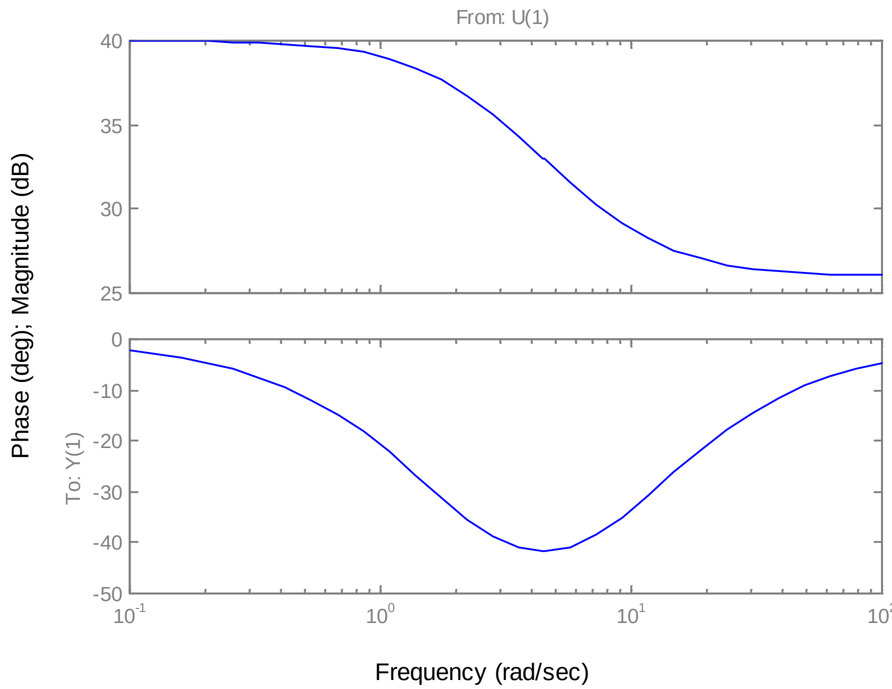


Figura 3 Gráfica de bode obtenida con MATLAB.

El problema se complica cuando la función de transferencia, a la que se le desea aplicar la metodología presentada, contiene un factor cuadrático. Sobre todo en la determinación del ángulo, sin embargo esto no es difícil de solucionar. Obsérvese el ejemplo que presentamos en seguida.

Sea,

$$H(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(S^2+3.2\,S+64)} \tag{9}$$

Para determinar la información con la que se trazará la gráfica de magnitud logarítmica de la función procedamos de la siguiente manera:

Hagamos $s = j\omega$, así:

$$H(j\omega) = \frac{64(2+j\omega)}{j\omega(0.5+j\omega)[(64-\omega^2)+j3.2\omega]} \tag{10}$$

Por lo tanto, la relación para el cálculo de la magnitud logarítmica resulta ser:

$$Lm\{H(j\omega)\} = 20 * log\left[\frac{64\sqrt{2^2+\omega^2}}{\omega\sqrt{0.5^2+\omega^2}\sqrt{(64-\omega^2)^2+(3.2\omega)^2}}\right] \qquad (11)$$

Y para el ángulo, es necesario hacer una distinción. Para ω menor a 8 que es la frecuencia de transición del factor cuadrático, se tiene:

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90 - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (12)$$

Para frecuencias superiores a esta frecuencia de corte del factor cuadrático ($\omega>8$), el cálculo del ángulo se realiza con la siguiente expresión:

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90 - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - 180 - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (13)$$

Que equivale a:

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 270 - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (14)$$

Obsérvese que solo se incluye el valor restado de 180 en la expresión anterior, con lo que se obtiene una suma de -270^0 que aparece en esta última ecuación.

Para obtener la información para las gráficas respectivas de Bode mediante una calculadora de bolsillo, se procede de la siguiente manera [3]:

- Ingrese nuevamente el primer valor a evaluar, que en este caso será para 0.01. No evaluamos para un valor de frecuencia de cero por la razón de que la función de transferencia contiene un integrador, lo que produce que la magnitud logarítmica en cero se vuelve indeterminada. Así, le asignaremos el valor de 0.01 a “X” para lo cual oprima las siguientes teclas:

  En la pantalla deberá de aparecer 0.01→X
- Se procede a introducir la siguiente función en la calculadora:

$$Lm\{H(j\omega)\} = 20 * log\left[\frac{64\sqrt{2^2+\omega^2}}{\omega\sqrt{0.5^2+\omega^2}\sqrt{(64-\omega^2)^2+(3.2\omega)^2}}\right] \qquad (15)$$

Oprimir la siguiente secuencia de teclas:

La calculadora responde con el valor de: 52.039

- Se procede a introducir la siguiente expresión en la calculadora (ω<8):

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90 - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (16)$$

Oprimir las siguientes teclas:

El resultado arrojado por la calculadora es: -90.8879

Se procede a evaluar las frecuencias (ω<8). Se proponen los valores de $\omega =$ *0.01, 0.05, 0.3, 0.7, 2 y 7*.

- Se procede a reemplazar la anterior expresión para obtener el ángulo por la siguiente expresión en la calculadora para *ω>8*.

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90 - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - 180 - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (17)$$

Que se puede simplificar a:

$$\measuredangle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - 270 - tan^{-1}\left(\frac{3.2\omega}{64-\omega^2}\right) \qquad (18)$$

Mediante la siguiente secuencia de teclas:

Se procede a evaluar frecuencias superiores a 8, se sugiere; $\omega = 9, 80, 250, 900$ *y* 5000. La tabla 2 muestra la evaluación de todos los valores.

Tabla 2 Evaluaciones del segundo ejemplo.

ω	$Lm\{H(j\omega)\}$	$\measuredangle H(j\omega)$
0.01	52.039	-90.8879
0.05	38.0216	-94.4217
0.3	21.2712	-113.293
.7	10.9895	-127.1923
2	-2.7621	-127.0523
10	-17.3718	-236.814
80	-77.979	-268.7603
250	-107.744	-269.609
900	-141.130	-269.891
5000	-185.814	-269.980

Al colocar los puntos en una escala semilogaritmica, y unir los puntos se produce la gráfica de Bode que se muestra en la figura 4. Y La simulación respectiva en MATLAB se muestra en la figura 5.

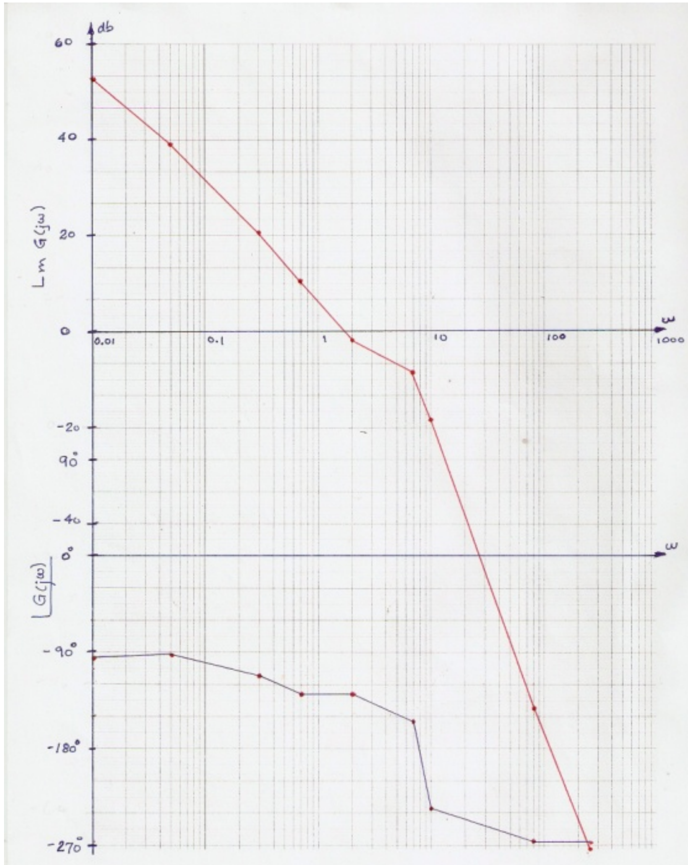


Figura 4 Gráfica de puntos obtenidos mediante la evaluación con la calculadora.

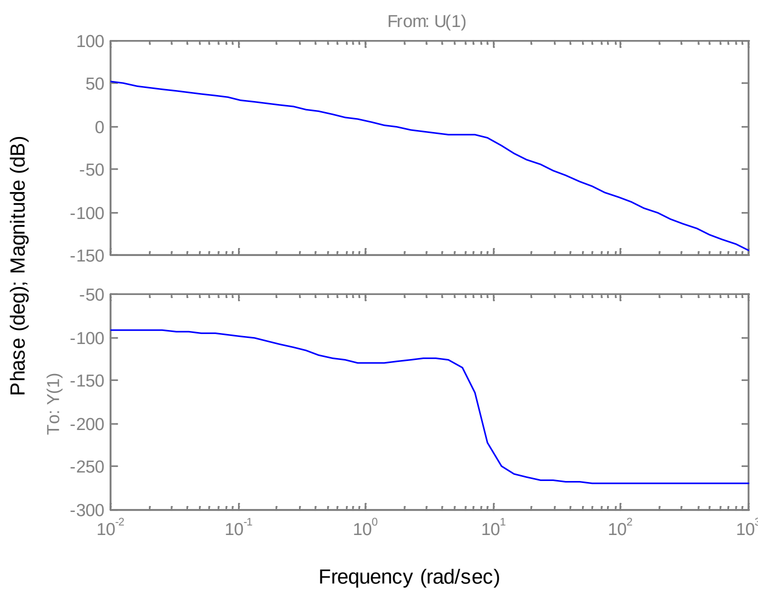


Figura 5 Gráfica de bode de la segunda función de transferencia que produce MATLAB.

3. Resultados

- Se ha obtenido una manera de programación de una calculadora de bolsillo en forma manual, en la que se evalúan diversos valores de frecuencia de una función de transferencia.
- La información obtenida, permite una gráfica de bode a partir de los puntos colocados en la escala semilogaritmica en forma rápida.
- Se elimina el realizar demasiadas asíntotas previas a la gráfica de la suma de gráficas individuales, sobretodo defunciones de transferencia que tengan más de tres factores
- Se elimina el realizar la suma logarítmica a partir de las asíntotas.

4. Conclusiones

Se propone una metodología sencilla para la obtención de datos para dibujar las gráficas de Bode, mediante el uso de una calculadora de bolsillo. La comparación de los resultados obtenidos entre las gráficas hechas a mano y las producidas con MatLab, muestran que la propuesta hecha en este artículo produce resultados rápidos y semejantes sin la utilización de una computadora. Al utilizar esta propuesta, se pueden determinar muy rápidamente las frecuencias muy aproximadas del margen de fase y del margen de ganancia que son muy útiles en el diseño de compensadores.

5. Bibliografía

[1.] Ogata, Katsuhiko, “Ingeniería de Control Moderna”, México, 3ra edición, 1998.

[2.] D’Azzo, John J., Houpis Constantine H. and Sheldon, Stuart N.“Linear Control System Analysis and Design with MatLab”, 5a edición, New York, 2003.

[3.] CASIO, “Manual de calculadora fx 350 MS”.

[4.] MathWorks, “Manual de usuario de MatLab” ver 5.3.