

ACELERACIÓN DE CORIOLIS, UN MÉTODO DE FÁCIL ENSEÑANZA/APRENDIZAJE

CORIOLIS ACCELERATION, AN EASY TEACHING-LEARNING METHOD

Jaime Gallardo Alvarado

Tecnológico Nacional de México en Celaya
jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx

Erick Daniel Flores Salazar

Universidad Tecnológica de la Mixteca
fs1254@hotmail.com

Carlos Rafael Aguilar Nájera

Tecnológico Nacional de México en Celaya
rafael.aguilar@itcelaya.edu.mx

Luciano Pérez González

Tecnológico Nacional de México en Celaya
luciano.perez@itcelaya.edu.mx

Resumen

Dinámica es un curso esencial en cualquier carrera de ingeniería. En ese sentido la aceleración de Coriolis, a pesar de haber sido ampliamente estudiada en diversos libros de texto y artículos científicos, representa un tópico retador para la enseñanza. En consecuencia, los estudiantes experimentan problemas en comprender la conexión entre las expresiones matemáticas y el significado físico del fenómeno. Esto es debido al hecho de que usualmente la aceleración de Coriolis se explica con base en un sistema de referencia rotatorio y otro inercial, por ejemplo, en libros de texto típicos la aceleración de Coriolis se deduce y explica en solo dos páginas. El método expuesto en este trabajo es más general y puede ser fácilmente extendido a los análisis cinemáticos de orden superior del cuerpo rígido debido a que éste está basado en simples derivadas temporales de vectores que relacionan cuerpos rígidos en movimiento general.

Palabra(s) Clave: Aceleración, Cinemática, Coriolis, Enseñanza/Aprendizaje, Vector anclado, Vector libre.

Abstract

Dynamics is an essential issue in any engineering program. In that concern Coriolis acceleration, eventhough that it has been widely addressed in many textbooks and technical papers, represents a challenging topic to teach. Consequently, undergraduate students undergo troubles to understand the connection between the mathematical expressions and the physical meaning of the phenomenon. This is due to the fact that usually the Coriolis acceleration is briefly explained based on rotating frames of reference and one noninertial frame, e.g., in typical textbooks the Coriolis acceleration is derived and explained in only two pages. The method exposed in the contribution is more general and can be easily extended to higher-order kinematic analyses of rigid body owing that it is based on simple time derivatives of vectors relating bodies in general motion

Keywords: *Acceleration, Bound vector, Coriolis, Free vector, Kinematics, Teaching/Learning.*

1. Introducción

El concepto efecto Coriolis fue introducido hace casi dos siglos por el matemático francés Gaspard-Gustave Coriolis y es el resultado del fenómeno físico que se observa cuando se tiene un cuerpo rígido en rotación trasladándose con respecto a otro cuerpo rígido o sistema de referencia. Estos movimientos son independientes entre sí y producen una aceleración perpendicular al eje de rotación del sistema y a la velocidad relativa del cuerpo en movimiento conocida como aceleración de Coriolis. A diferencia de las aceleraciones normal y tangencial, la aceleración de Coriolis es un término más elusivo que causa cierta dificultad en su interpretación. Por ejemplo, en libros de texto ampliamente conocidos, por citar algunos [Meriam y Kraige 1997, Gray y Plesha 2012, Beer et al 2013, Pytel y Kiusalaas 2016], la aceleración de Coriolis se deduce ciertamente de acuerdo a la derivada temporal de un vector de posición que relaciona dos sistemas de referencia, uno fijo y el otro rotatorio. Sin embargo, la limitación del concepto empleado obliga a una interpretación que en cierta forma minimiza el desarrollo matemático con la que se obtuvo dicha aceleración, y es de esta manera que la aceleración de Coriolis se

explica burdamente a partir de la descomposición de la velocidad absoluta de un punto del cuerpo rígido en movimiento en tres vectores cuyos cambios instantáneos, por supuesto de velocidad, en el marco de la teoría de límites nos llevan a elucidar el término de la aceleración de Coriolis. Es por esto que quizás los estudiantes de un curso convencional de dinámica experimentan ciertas dificultades cuando intentan resolver problemas estándar de la materia. Más aún, con dicha metodología resulta prácticamente imposible extender el concepto de la aceleración de Coriolis a la tercera derivada. Ante tal escenario, la propuesta de tratados modernos sobre el efecto Coriolis es un tópico obligatorio tanto en el ámbito académico como el industrial. En ese sentido Dolovich et al [2012] reportan el análisis de aceleración con base en la derivada del vector velocidad con respecto a un sistema de referencia inercial único. Persson [2014] discute la aceleración de Coriolis de manera un tanto intuitiva considerando dos escenarios diferentes: i) el movimiento general de la tierra, ii) el movimiento de una mesa rotatoria, mientras que Gallardo-Alvarado [2016] ejemplifica la deducción del efecto Coriolis con base a derivadas temporales de vectores de acuerdo a diferentes sistemas de referencia que relacionan tres cuerpos en movimiento.

En este trabajo se revisan conceptos fundamentales que permiten una mejor comprensión de la obtención y aplicación de la aceleración de Coriolis en sistemas mecánicos y que no es posible encontrar, hasta donde los autores suponen, en los libros de texto convencionales. El método se ejemplifica obteniendo la ecuación de pulso de Coriolis, o análisis de la tercera derivada, y el análisis de aceleración del mecanismo de Ginebra.

2. Conceptos preliminares

La figura 1 muestra un cuerpo rígido m el cual se mueve con respecto a otro cuerpo rígido o sistema de referencia j . De manera similar el cuerpo l se mueve con respecto al cuerpo k . Suponga que sobre el cuerpo m se encuentra una base ortonormal y a derechas fija definida por los vectores unitarios, \hat{b}_1, \hat{b}_2 y \hat{b}_3 . Entonces, la velocidad angular del cuerpo rígido m , como se observa desde el cuerpo j , de

acuerdo a Kane y Levinson [1985] puede expresarse en términos de velocidades angulares y lineales parciales de la siguiente manera

$${}^j\omega^m \square \mathbf{b}_1 \frac{d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \quad (1)$$

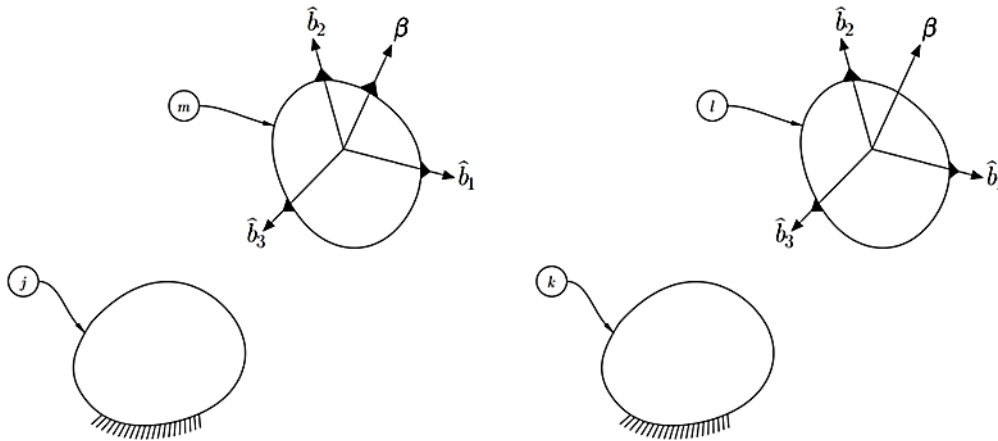


Figura 1 Sistemas de referencia fijos y móviles.

Esta definición de velocidad angular del cuerpo rígido sin duda debe resultar un tanto extraña para aquellos lectores acostumbrados a tratar la velocidad angular como una entidad escalar más que vectorial, y forma parte de estudios profundos desarrollados por Kane y Levinson [1985] con el ánimo de simplificar las ecuaciones de movimiento de sistemas complejos dejando de lado la vaguedad de cantidades virtuales asociadas a los métodos clásicos de análisis. Más aún, la elegancia de esta definición permitió extender de manera brillante el análisis de velocidad de sistemas mecánicos por medio de la teoría de tornillos al análisis de aceleración [Rico y Duffy 1996]. En el presente trabajo la utilidad de la ecuación 1, queda de manifiesto cuando se trata de obtener la derivada temporal de vectores empleando diversos sistemas de referencia el cual es un procedimiento fundamental en la obtención de la aceleración de Coriolis. En primera instancia considere que β es un vector fijo o anclado en el cuerpo m , y que por lo tanto éste puede descomponerse en ecuación 2.

$$\beta = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3 \quad (2)$$

Por lo tanto, el producto cruz (\times) de la velocidad angular ω con el vector β conduce a ecuación 3.

$$\begin{aligned} {}^j\omega^m \times \beta &= \left(\mathbf{b}_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \right) \times (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) \\ &= \frac{{}^j d}{dt} (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) = \frac{{}^j d}{dt} \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Considere ahora un supuesto más general: β es un vector libre en el cuerpo l . Entonces, la derivada temporal de β tomando como referencia al cuerpo l viene dada por ecuación 4.

$$\begin{aligned} \frac{{}^k d}{dt} \beta &= \frac{{}^k d}{dt} (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) \\ &= \frac{{}^l d}{dt} (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) + {}^k\omega^l \times (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) \\ &= \frac{{}^l d}{dt} \beta + {}^k\omega^l \times \beta \end{aligned} \quad (4)$$

Nótese que el resultado de la ecuación 4, toma ventaja del hecho de que la derivada temporal de un escalar no depende del sistema de referencia y de esta manera es posible intercambiar en las derivadas temporales de los escalares β_i el sistema de referencia k por él l lo cual facilita una rápida interpretación de dichas derivadas.

3. Vectores cinemáticos angulares

La figura 2 muestra tres cuerpos rígidos etiquetados como j , k y m en movimiento relativo. El cuerpo j asume el rol de sistema inercial de referencia mientras que el cuerpo m es aquel en el que se desean determinar las condiciones de movimiento. Por ejemplo, en un manipulador tipo serie el cuerpo m es precisamente el órgano terminal. Por su parte el cuerpo k es un cuerpo de enlace que permite relacionar expresiones cinemáticas de los cuerpos j y m .

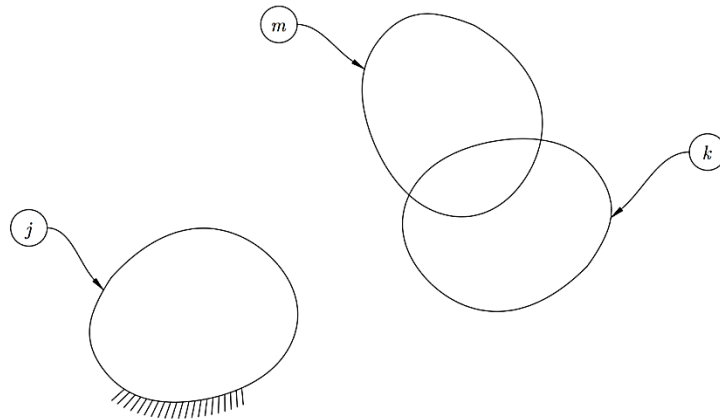


Figura 2 Tres cuerpos rígidos en movimiento relativo.

El análisis de velocidad consiste en determinar los vectores de velocidad angular y lineal del cuerpo m como se observan desde el cuerpo j tomando en cuenta el comportamiento cinemático del cuerpo k . A fin de determinar el vector de velocidad angular del cuerpo m recurriendo a los resultados de la sección 2 se tiene ecuación 5.

$$\frac{j}{dt} \boldsymbol{\beta} = {}^j \boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta}, \quad \frac{k}{dt} \boldsymbol{\beta} = {}^k \boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta}, \quad \frac{j}{dt} \boldsymbol{\beta} = \frac{k}{dt} \boldsymbol{\beta} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \boldsymbol{\beta} \quad (5)$$

De esta manera la combinación de resultados conduce a ecuación 6.

$$\begin{aligned} \frac{j}{dt} \boldsymbol{\beta} &= \frac{k}{dt} \boldsymbol{\beta} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \boldsymbol{\beta} \\ {}^j \boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta} &= {}^k \boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

Por lo tanto, se obtiene ecuación 7.

$${}^j \boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta} = ({}^j \boldsymbol{\omega}^k + {}^k \boldsymbol{\omega}^m) \times \boldsymbol{\beta} \rightarrow {}^j \boldsymbol{\omega}^m = {}^j \boldsymbol{\omega}^k + {}^k \boldsymbol{\omega}^m \quad (7)$$

Por otra parte, el análisis de aceleración consiste en determinar las aceleraciones angular y lineal del cuerpo m como se observan desde el cuerpo j tomando en cuenta el comportamiento cinemático del cuerpo k . La componente angular de aceleración se obtiene tomando en cuenta que este vector es precisamente la

derivada temporal de la velocidad angular ${}^j\omega^m$ con respecto al sistema de referencia j , ecuación 8.

$$\begin{aligned}
 {}^j\alpha^m &\square \frac{{}^j d}{dt} {}^j\omega^m = \frac{{}^j d}{dt} ({}^j\omega^k + {}^k\omega^m) \\
 &= \frac{{}^j d}{dt} {}^j\omega^k + \frac{{}^j d}{dt} {}^k\omega^m \\
 &= {}^j\alpha^k + {}^j\omega^k \times {}^k\omega^m + \frac{{}^k d}{dt} {}^k\omega^m \\
 &= {}^j\alpha^k + {}^k\alpha^m + {}^j\omega^k \times {}^k\omega^m
 \end{aligned} \tag{8}$$

Es de llamar la atención la facilidad con la que se genera el término ${}^j\omega^k \times {}^k\omega^m$ el cual se puede denominar como aceleración angular de Coriolis,. Más aún, la generalidad del procedimiento es tal que permite fácilmente elucidar la tercera derivada angular del cuerpo m conocido como pulso angular. En efecto, el pulso angular del cuerpo m se define como la derivada temporal de la aceleración angular, ecuación 9.

$$\begin{aligned}
 {}^j\rho^m &\square \frac{{}^j d}{dt} {}^j\alpha^m = \frac{{}^j d}{dt} ({}^j\alpha^k + {}^k\alpha^m + {}^j\omega^k \times {}^k\omega^m) \\
 &= \frac{{}^j d}{dt} {}^j\alpha^k + {}^j\omega^k \times {}^k\alpha^m + \frac{{}^k d}{dt} {}^k\alpha^m + \frac{{}^j d}{dt} {}^j\omega^k \times {}^k\omega^m \\
 &\quad + {}^j\omega^k \times \left({}^j\omega^k \times {}^k\omega^m + \frac{{}^k d}{dt} {}^k\omega^m \right) \\
 &= {}^j\rho^k + {}^k\rho^m + {}^j\omega^k \times {}^k\alpha^m + {}^j\alpha^k \times {}^k\omega^m + {}^j\omega^k \times ({}^j\omega^k \times {}^k\omega^m + {}^k\alpha^m) \\
 &= {}^j\rho^k + {}^k\rho^m + 2{}^j\omega^k \times {}^k\alpha^m + {}^j\alpha^k \times {}^k\omega^m + {}^j\omega^k \times ({}^j\omega^k \times {}^k\omega^m)
 \end{aligned} \tag{9}$$

3. Vectores cinemáticos lineales

El vector de velocidad angular y sus derivadas temporales, por ejemplo, aceleración y pulso angulares, son propiedades del cuerpo rígido y por lo tanto no dependen de un punto en particular de éste. Al contrario, el vector de velocidad lineal y sus derivadas temporales, como lo son la aceleración y pulso lineales,

dependen del punto de análisis del cuerpo rígido. En ese sentido, la información de la figura 2 es incompleta para abordar el tema del análisis de aceleración. La figura 3 complementa la información de la figura 2 introduciendo vectores de posición.

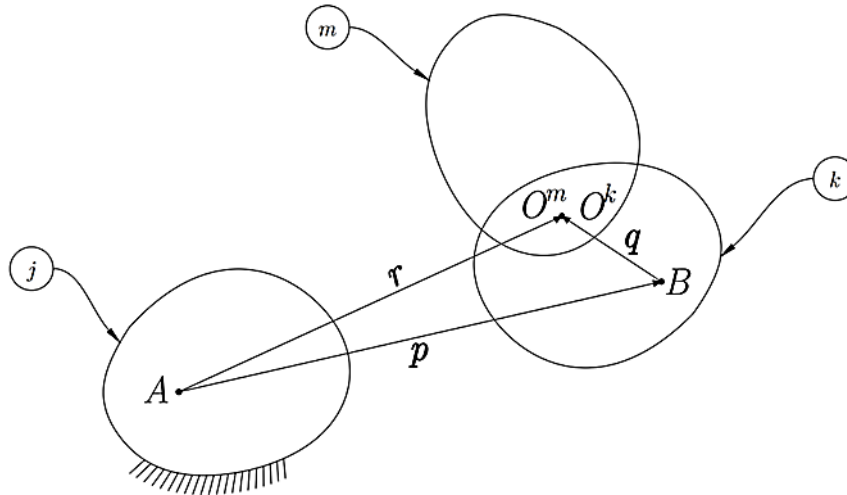


Figura 3 Tres cuerpos en movimiento y sus vectores de posición.

En la figura 3, \mathbf{p} es un vector que inicia en el punto A del cuerpo j y termina en el punto B del cuerpo k . Mientras que \mathbf{q} es el vector de posición entre los puntos B y O^k . Más aún, \mathbf{r} es un vector que inicia en el punto A y termina en el punto O^m . Claramente, estos tres vectores están relacionados por la relación de clausura, ecuación 10.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad (10)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta que el vector de velocidad lineal se define como la derivada temporal de un vector de posición es posible obtener la velocidad del punto O^m fijo en el cuerpo m , ecuación 11.

$$\begin{aligned} {}^j \mathbf{v}_O^m &= \frac{{}^j d}{dt} \mathbf{r} = \frac{{}^j d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \frac{{}^j d}{dt} \mathbf{p} + \frac{{}^j d}{dt} \mathbf{q} \\ &= {}^j \mathbf{v}_B^k + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + \frac{{}^k d}{dt} \mathbf{q} = {}^j \mathbf{v}_B^k + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + {}^k \mathbf{v}_O^m \end{aligned} \quad (11)$$

Sin embargo, recurriendo al concepto clásico de velocidad relativa:

$${}^j \mathbf{v}_O^k = {}^j \mathbf{v}_B^k + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q}$$

Lo cual simplifica la ecuación 11 a ecuación 13.

$${}^j \mathbf{v}_O^m = {}^j \mathbf{v}_O^k + {}^k \mathbf{v}_O^m \quad (12)$$

Con el propósito de determinar el vector de la aceleración del punto O considere que ésta por definición es la derivada temporal del vector de velocidad lineal, ecuación 13.

$$\begin{aligned} {}^j \mathbf{a}_O^m &= \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \mathbf{v}_O^m = \frac{{}^j d}{{}^j dt} \left({}^j \mathbf{v}_B^k + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + {}^k \mathbf{v}_O^m \right) \\ &= \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \mathbf{v}_B^k + \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \frac{{}^j d}{{}^j dt} \mathbf{q} + \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^k \mathbf{v}_O^m \\ &= {}^j \mathbf{a}_B^k + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + \frac{{}^k d}{{}^k dt} \mathbf{q} \right) + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_O^m + \frac{{}^k d}{{}^k dt} {}^k \mathbf{v}_O^m \\ &= {}^j \mathbf{a}_B^k + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_O^m + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_O^m + {}^k \mathbf{a}_O^m \end{aligned} \quad (13)$$

Sin embargo, recurriendo al concepto clásico de aceleración relativa, ecuación 14.

$${}^j \mathbf{a}_O^k = {}^j \mathbf{a}_B^k + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) \quad (14)$$

Y con ello se obtiene ecuación 15.

$${}^j \mathbf{a}_O^m = {}^j \mathbf{a}_O^k + {}^k \mathbf{a}_O^m + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_O^m \quad (14)$$

Donde, $2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_O^m$ es precisamente el famoso vector de la aceleración de Coriolis. A fin de ilustrar el potencial del método expuesto, en los siguientes párrafos se deduce el vector del pulso lineal del cuerpo m como se mide desde el cuerpo j , el cual se denota como ${}^j \boldsymbol{\rho}_O^m$.

El vector de pulso lineal se define como la derivada temporal del vector de aceleración lineal, ecuación 16.

$$\begin{aligned}
 {}^j \rho_0^m & \square \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \mathbf{a}_0^m = \frac{{}^j d}{{}^j dt} \left({}^j \mathbf{a}_B^k + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + {}^k \mathbf{a}_0^m \right) \\
 & = \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \mathbf{a}_B^k + \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \frac{{}^j d}{{}^j dt} \mathbf{q} + \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) \\
 & \quad + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left(\frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \frac{{}^j d}{{}^j dt} \mathbf{q} \right) + 2 \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \\
 & \quad + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^k \mathbf{v}_0^m + \frac{{}^j d}{{}^j dt} {}^k \mathbf{a}_0^m \\
 & = {}^j \rho_B^k + {}^j \boldsymbol{\rho}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + \frac{{}^k d}{{}^k dt} \mathbf{q} \right) + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) \\
 & \quad + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} + \frac{{}^k d}{{}^k dt} \mathbf{q} \right) \right) + 2 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \\
 & \quad + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + \frac{{}^k d}{{}^k dt} {}^k \mathbf{v}_0^m \right) \\
 & = {}^j \rho_B^k + {}^j \boldsymbol{\rho}^k \times \mathbf{q} + 2 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} \right) \\
 & \quad + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) \right) + {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \right) \\
 & \quad + 2 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \right) + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{a}_0^m + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{a}_0^m + {}^k \rho_0^m
 \end{aligned} \tag{15}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 {}^j \rho_0^k & = {}^j \rho_B^k + {}^j \boldsymbol{\rho}^k \times \mathbf{q} + 2 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times \mathbf{q} \right) \\
 & \quad + {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{q} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

Por lo tanto

$${}^j \rho_0^m = {}^j \rho_0^k + {}^k \rho_0^m + 3 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + 3 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{a}_0^m + 3 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \right) \tag{17}$$

En la ecuación 18, el término $3 {}^j \boldsymbol{\alpha}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m + 3 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{a}_0^m + 3 {}^j \boldsymbol{\omega}^k \times \left({}^j \boldsymbol{\omega}^k \times {}^k \mathbf{v}_0^m \right)$ se denomina el vector de pulso lineal de Coriolis.

4. Caso de estudio. Mecanismo de Ginebra

Con el propósito de ejemplificar el método de análisis expuesto en la contribución, en esta sección se resuelve el análisis cinemático del mecanismo de Ginebra, también conocido como Cruz de Malta, figura 4.

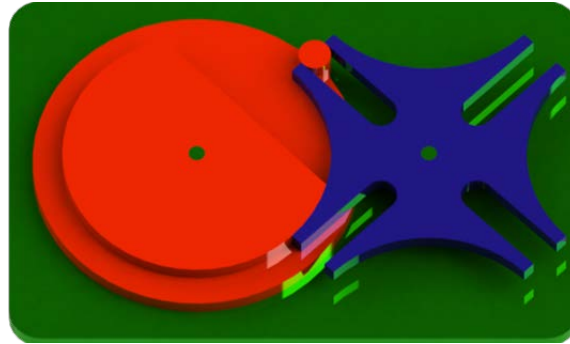


Figura 4 Mecanismo de Ginebra.

El mecanismo de Ginebra es un dispositivo mecánico de movimiento intermitente y ha sido ampliamente aplicado en la industria en máquinas de tejer, mecanismos de precisión, empacadoras, etc. Se compone de dos ruedas, una rueda cumple la función de eslabón motriz que gira con velocidad angular constante mientras que la otra es una rueda conducida sobre la cual se ubican cuatro ranuras rectas, aunque actualmente también se contemplan ruedas conducidas con un número mayor de ranuras e incluso éstas pueden ser ranuras curvas [Hsieh 2014]. El movimiento intermitente se logra cuando el perno fijo a la rueda motriz entra en contacto con alguna de las ranuras de la rueda conducida, después de cierto tiempo el perno se separa de la ranura provocando el reposo de la rueda conducida. De esta manera, la rueda conducida gira con velocidad angular variable la cual incluso llega al reposo. El problema consiste en resolver el análisis de posición, velocidad y aceleración del mecanismo de Ginebra.

Análisis de Posición

Con base en la figura 5, el análisis de posición consiste en determinar el ángulo θ que define la orientación de la cruz dados el ángulo φ , el cual define la orientación del perno P fijo a la rueda motriz, y los parámetros b y c del mecanismo.

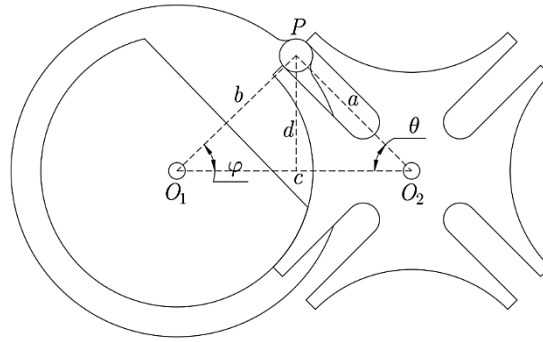


Figura 5 Parámetros del mecanismo de Ginebra.

Las ecuaciones de clausura del mecanismo vienen dadas por ecuaciones 19 y 20.

$$a \sin(\theta) - b \sin(\varphi) = 0 \quad (18)$$

$$a \cos(\theta) + b \cos(\varphi) - c = 0 \quad (19)$$

Después de unas simples operaciones algebraicas se obtiene ecuación 21.

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}\right) \quad (20)$$

Donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\varphi)$$

Y con ello se completa el análisis de posición del mecanismo.

Análisis de Velocidad

El análisis de velocidad del mecanismo de Ginebra consiste en determinar su ecuación entrada-salida de velocidad. Para tal fin, considere que la rueda A gira con velocidad angular $\dot{\varphi}$ en sentido antihorario lo cual provoca que la cruz gire en sentido horario con una velocidad angular $\dot{\theta}$. De esta manera por parte de la rueda A, la velocidad del perno P se obtiene con ecuación 22.

$$\mathbf{v}_P = \dot{\varphi}_k \times \mathbf{r}_{P/O_1} = \dot{\varphi}_k \times b(\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) = \dot{\varphi}b\cos(\varphi)\mathbf{j} - \dot{\varphi}b\sin(\varphi)\mathbf{i} \quad (21)$$

Donde \mathbf{r}_{P/O_1} es un vector que inicia en el punto O_1 y termina en el punto P. Por otra parte, el cálculo de la velocidad del perno P a partir de la cruz B requiere de la

aplicación de la ecuación 12. Para una mejor interpretación de dicho cálculo considere que la velocidad del perno P se puede visualizar de mejor manera si la velocidad de éste se descompone en dos movimientos, figura 6.

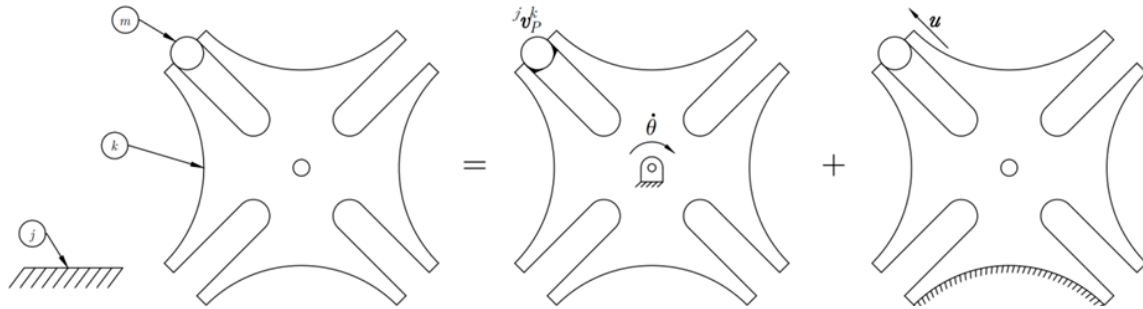


Figura 6 Descomposición de la velocidad del perno P en dos velocidades independientes.

La velocidad del perno P calculada a partir de la cruz, vendrá dada por ecuación 23.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_P &= {}^j\mathbf{v}_P^m = {}^j\mathbf{v}_P^k + {}^k\mathbf{v}_P^m \\
 &= \dot{\theta}_k \times \mathbf{r}_{P/O_2} + \mathbf{u} \\
 &= \dot{\theta}_k \times a(-\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}) + u(-\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j})
 \end{aligned} \tag{22}$$

Donde \mathbf{u} es el vector representativo de la velocidad relativa del perno con respecto a la cruz. Igualando (22) y (23) se obtiene que

$$\dot{\varphi}b\cos(\varphi)\mathbf{j} - \dot{\varphi}b\sin(\varphi)\mathbf{i} = -a\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{i} - a\dot{\theta}\cos(\theta)\mathbf{j} - u\cos(\theta)\mathbf{i} + u\sin(\theta)\mathbf{j} \tag{23}$$

Por lo tanto, arreglando matricialmente la ecuación 24, la ecuación entrada-salida de velocidad del mecanismo de Ginebra resulta ser ecuación 25.

$$\begin{bmatrix} a\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ a\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}b\sin(\varphi) \\ -\dot{\varphi}b\cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{24}$$

Análisis de Aceleración

El análisis de aceleración del mecanismo de Ginebra consiste en determinar su ecuación entrada-salida de aceleración. La estrategia de análisis es similar a la empleada en el análisis de velocidad: estudiar el movimiento del perno P como se observa desde el cuerpo A y la cruz B .

Por parte de la rueda A la aceleración del perno P , puesto que éste se encuentra fijo al cuerpo A , se obtiene de manera directa con ecuación 26.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \ddot{\varphi}_k \times \mathbf{r}_{P/O_1} - \dot{\varphi}^2 \mathbf{r}_{P/O_1} \\ &= \ddot{\varphi}_k \times b(\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) - \dot{\varphi}^2 b(\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) \end{aligned} \quad (25)$$

Donde $\ddot{\varphi}$ es la aceleración angular de la rueda A . Por otra parte, la aceleración del perno P como se observa desde la cruz B obliga al uso de la ecuación 15, dado el movimiento relativo del perno con respecto a la cruz. Para una mejor interpretación de dicha ecuación 15, considere figura 7.

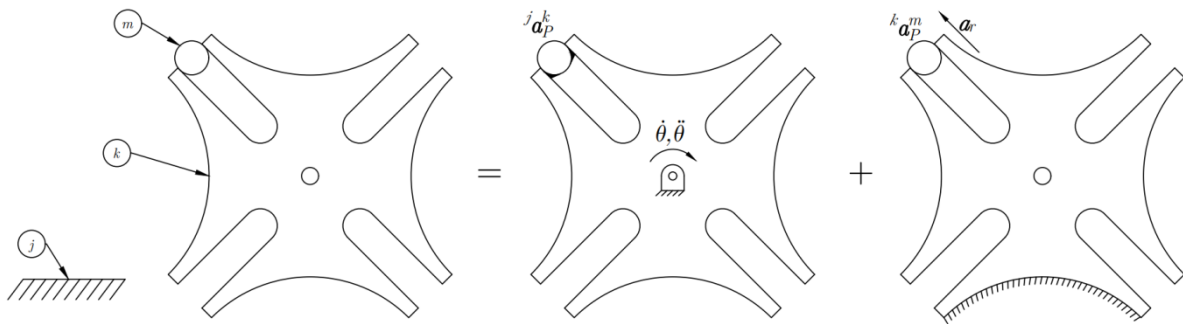


Figura 7 Descomposición de la aceleración del perno P en aceleraciones independientes.

La aplicación de la ecuación 15 permite obtener la aceleración del perno P , ecuación 27.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \ddot{\theta}_k \times \mathbf{r}_{P/O_2} - \dot{\theta}^2 \mathbf{r}_{P/O_2} + \mathbf{a}_r + 2\dot{\theta}_k \times \mathbf{u} \\ &= \ddot{\theta}_k \times (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) + \dot{\theta}^2 (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) \\ &\quad + \mathbf{a}_r (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) + 2\dot{\theta}_k \times \mathbf{u} (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) \end{aligned} \quad (26)$$

Donde $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular del cuerpo B mientras que \mathbf{a}_r es el vector de la aceleración relativa del perno con respecto al cuerpo B . Por lo tanto, igualando ecuación 26 y ecuación 27, se obtiene ecuación 28.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_k \times \mathbf{r}_{P/O_1} + \dot{\varphi}^2 b(-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) &= \ddot{\theta}_k \times \mathbf{r}_{P/O_2} - \dot{\theta}^2 \mathbf{r}_{P/O_2} + \mathbf{a}_r (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) \\ &\quad + 2\dot{\theta}_k \times \mathbf{u} (-\cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}) \end{aligned} \quad (27)$$

Finalmente, ordenando matricialmente ecuación 28, la ecuación entrada-salida de aceleración del mecanismo de Ginebra resulta ser ecuación 29.

$$\begin{bmatrix} a\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ a\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + a\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - 2u\dot{\theta} \sin(\theta) + \ddot{\varphi}b\sin(\varphi) \\ b\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - 2u\dot{\theta} \cos(\theta) - \ddot{\varphi}b\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (28)$$

El análisis de aceleración del mecanismo de Ginebra es quizás el caso más popular empleado para la ejemplificación del cálculo de la aceleración de Coriolis en un curso normal de dinámica. El manejo de vectores de acuerdo a diferentes sistemas de referencia empleando el método descrito en la contribución es coherente y permite una rápida conexión entre la formulación matemática y el fenómeno físico.

5. Discusión

El concepto efecto Coriolis fue introducido hace más de dos siglos y en los años 1830, en plena revolución industrial, se convirtió en un tema de gran interés dado el desarrollo exponencial de maquinaria con partes rotantes. La cuestión de que tanto afectaba a una máquina el hecho de que los elementos rotantes de ésta tuviesen adicionalmente movimientos translacionales independientes de la rotación se convirtió en un problema matemático sumamente atractivo. La respuesta en realidad no es tan simple y es así que en palabras de Persson [1998] es común que en los libros de texto se genere cierto apresuramiento o ansiedad en asegurar a los lectores que el efecto Coriolis es una “fuerza ficticia” o una “construcción mental”. Por otra parte, sin duda la aceleración de Coriolis es un tema esencial en todo curso de dinámica de cualquier ingeniería y sin embargo se explica de manera breve en libros de texto con base en un sistema rotatorio y otro inercial. La limitación del método provoca que los estudiantes experimenten ciertas dificultades al tratar de conectar los conceptos matemáticos adquiridos con el fenómeno físico en la solución de problemas. Más aún, con dicha metodología resulta prácticamente imposible extender el análisis de aceleración al análisis de pulso y subsecuentes. En este trabajo se presenta de manera sumamente detallada como la aceleración de Coriolis puede elucidarse con base en las derivadas temporales de simples vectores de acuerdo a diferentes sistemas de referencia relacionando tres cuerpos

en movimiento relativo en el que uno de ellos actúa como un sistema inercial. Las ecuaciones resultantes no son intuitivas y fáciles de aplicar. Para sustentar dicha afirmación, el método se ejemplifica en el análisis de aceleración del mecanismo de Ginebra. Más aún, el método seleccionado adquiere relevancia cuando se aplica en la obtención del pulso de Coriolis, es decir el análisis de la tercera derivada. Sin duda con el material expuesto en esta contribución los lectores tienen herramientas interesantes que permiten de manera sistemática y práctica resolver problemas dinámicos en los que la aceleración de Coriolis emerge dada las combinaciones de movimientos generales que afectan el comportamiento cinemático de sistemas mecánicos.

6. Revisores

Revisor 1

Nombre: Emilio Jorge González Galván
Institución: Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Cédula Profesional: 2375306
Área de conocimiento: Robótica
Correo electrónico: egonzale@uaslp.mx

Revisor 2

Nombre: Mario Alberto García Murillo
Institución: DICIS Universidad de Guanajuato
Cédula Profesional: 6853161
Área de conocimiento: Robótica
Correo electrónico: garcia.mario@ugto.mx

7. Bibliografía y Referencias

- [1] Meriam, J.L., Kraige, L.G. (1997). Engineering Mechanics Volume: Dynamics. Fourth edition. John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Gray, C., Plesha, M. (2012). Engineering Mechanics: Dynamics. Second edition. Mc Graw-Hill Education.
- [3] Pytel, A., Kiusalaas, J. (2016). Engineering Mechanics: Dynamics (Activate Learning With These New Titles from Engineering!). Fourth edition. Cengage Learning.

- [4] Beer, F.P., Johnston, E.R., Cornwell, P.J. (2013). *Mecánica Vectorial Para Ingenieros*. Décima edición. McGraw-Hill.
- [5] Dolovich, A.T., Llewellyn, E.J., Sofko, G.J., Wang, Y.P. (2012) The Coriolis effect – what’s going on? (2012). Proc. 2012 Canadian Engineering Education Association (CEEA12) Conf., paper 55. Ppp. 1-5.
- [6] Persson, A. (2014). Is the Coriolis effect an ‘optical illusion’?. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. Pp. 1-11.
- [7] Gallardo-Alvarado, J. (2016). *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Springer.
- [8] Rico, J.M., Duffy, J. (1996). An application of screw algebra to the acceleration analysis of serial chains. *Mechanism and Machine Theory*. 31(4). Pp. 445-457.
- [9] Kane, T.R., Levinson, D.A. (1985). *Dynamics, Theory and Applications*. McGraw-Hill series in mechanical engineering, McGraw Hill.
- [10] Persson, A. (1998). How do we understand the Coriolis force?. *Bulletin of the American Meteorological Society*. Pp. 1373-1385.
- [11] Hsieh, J.-F. (2014). Design and analysis of Geneva mechanism with curved slots. 38(4). Pp. 557-567.