Mercatorprojektionen

Leif Kahl Kristensen

Mag. scient. lkk@phys.au.dk

For over 500 år siden blev grundstenene lagt til, at vi kan fremstille den tredimensionelle fysiske virkelighed i todimensionelle kort. Mercators kortprojektion er et vigtigt værktøj i kortlægningens historie og har en lang og broget udvikling. Baggrunden og hovedpunkterne i udviklingen af Mercators kortprojektion bliver behandlet i denne artikel, og jeg søger især at omtale danske forhold.

Søkort i middelalderen

I middelalderen fandtes meget detaillerede kort over Middelhavets kyster og havne, de såkaldte "portolaner". De var karakteriseret ved angivelsen af flere kompasroser og et virvar af kompasstreger, ved hvis hjælp man kunne finde kompaskursen mellem to punkter. Geografisk længde og bredde blev derimod ikke angivet. Kortene byggede på rejsendes oplysninger om kurser og distancer og var langtfra målfaste. I princippet er det muligt at lave et plant kort, hvor retningen mellem punkterne er et system af rette linjer, nemlig som i Mercatorprojektionen. Det kunne man dog ikke vide dengang, og det er langtfra indlysende. På grund af den lille nord-sydlige udstrækning er målestoksændringerne kun ca. 10%, hvilket var umærkeligt på den tid. Kun nordboernes sejlads til Island og Grønland skete på åbent hav, men man havde her navigationsmæssigt den fordel, at man sejlede nær den samme breddegrad. Man holdt kursen ved hjælp af solen, ved stor erfaring og uden avancerede hjælpemidler.

De store opdagelsesrejser

Situationen ændrede sig med de store opdagelsesrejser. Med muslimernes fremtrængen i det nuværende Tyrkiet, markeret ved Konstantinopels fald i 1453, opstod et stort behov for en ny handelsvej til Indien. Portugiserne startede en serie opdagelsesrejser langs Afrikas vestkyst. De var statsorganiserede, velforberedte og forskningsbaserede. Der medbragtes astronomiske instrumenter og tabeller, så breddegraden kunne bestemmes ved hjælp af solhøjden. En videnskabsmand, som beskæftigede sig med navigation, var Petrus Nonius (1492-1577). I dag huskes han for aflæsningsmidlet til inddelte skalaer. Han undersøgte også de kurver på globen, kaldet "loxodromer", som skærer meridianerne under en konstant vinkel. Simple specialtilfælde er meridianerne selv og breddecirklerne, hvor kursen er konstant 90o. Nonius viste, at loxodromerne i almindelighed gav spiraler omkring polerne. For navigatører var disse kurver særlig bekvemme, fordi man sejler med konstant retvisende kurs, som i princippet kan findes ved observation af for eksempel Nordstjernen. Det er i modsætning til storcirkelsejlads, hvor kursen hele tiden skal korrigeres. Lad φ og λ betegne geografisk længde og bredde. På storcirklen vil en lille ændring i længden $\Delta\lambda$ ændre kursen med:

$$\text{(1)}\ \sin(\varphi)\bullet\Delta\lambda$$

Denne simple formel er nyttig og bruges senere.

Da de første portugisiske rejser var langs Afrikas kyst og Columbus' i et smalt øst-vestligt bælte kunne portolanerne bruges i begyndelsen. Men da verdenshavene skulle besejles på kryds og tværs, opstod behovet for en ny kortprojektion.

Gerhard Mercator (1512-1594)

I 1569 udkom Mercators epokegørende verdenskort, der afbildede loxodromer som rette linjer. Det vides ikke, hvorledes Mercator konstruerede sin projektion, men allerede 28 år tidligere var han i besiddelse af en globus, som kunne vise loxodromerne. Det er nærliggende at antage, at han på de gængse "platkort", hvor længde- og breddegrader er vist lige lange, har indtegnet flere loxodromer gennem samme punkter. På platkortet bliver de til krumme kurver, som dog nær ækvator med tilnærmelse er rette linjestykker. Forlænges disse linjestykker, skærer de hinanden i samme punkt. Dette angiver positionen i den nye projektion, som således kunne konstrueres ved hjælp af den omtalte globus.

Mercator havde stor succes som instrumentmager og kortproducent på grund af sin tekniske dygtighed og evner til at knytte kontakter og få oplysninger fra de seneste ekspeditioner. Derimod slog projektionen ikke an. Det kunne måske skyldes de manglende forklaringer og de åbenlyse forvanskninger af landenes størrelse. Der


PEDER HORREBOWS
DANSKE
SKATKAMER,
Beſtaaende
udi
GRUNDEN
Til
GEOMETRIEN,
Og
NAVIGATIONEN.
Anno M. DCC. XLV.

KIÖBENHAVN,
Til kiöbs hos Profeſſor CHRISTIAN HORREBOW,
og Compaſs-Mager OLE SANDGAARD
i Nyehavn.

skulle et regulært sørøvertogt til for at det næste skridt i udviklingen blev taget.

Edward Wright (1558-1615)

I 1589 udsendte Elizabeth den Første af England en større flådestyrke for at opbringe de spanske handelsskibe, der provianterede på Azorerne på vej hjem fra kolonierne. Edward Wright fik sin universitetskarriere afbrudt, da han blev sendt med for at undersøge flådens navigationsmetoder. I 1599 udkom hans erfaringer i bogen "Certaine Errors in Navigation". Han opremser flere som fx fejl på en kompasstreg (360/32 = 11.25o), der opstod ved at ignorere den magnetiske misvisning. Måling af solens højde med en Jacobstav (cross-staff) gav fejl på 1o, og tabellerne burde også forbedres. Størst kunne dog fejlen være ved brugen af de primitive platkort. Kursen

K mellem to nabopunkter, regnet på sømandsvis fra nord over øst, er givet ved:

$$(2)\ \ \mathbf{tg\,K = cos\varphi \bullet \Delta\lambda / \Delta\varphi = \Delta\lambda / (\Delta\varphi / cos\varphi) = cos\varphi \bullet tg\,K'}$$

Afstanden cosφ•Δλ mellem to nabomeridianer er på platkortet angivet til Δλ, så afstande i retning øst-vest er multipliceret med en faktor 1/cosφ (er en affinitet). I formel (2) angiver K' kursen udtaget af platkortet. Ved φ = 75o fås den største forskel K' – K for K = 26.96o og K' = 63.04o. Fejlen kan således blive mere end tre kompasstreger.

Wright indså, at Mercator-kortet kunne rette op på dette ved at øge breddeforskellen Δφ til Δφ/cosφ. For hvert bueminut (= 1 sømil) fra 1' til 4500' = 75o beregnede og summerede han derfor 1/cosφ. De 75o blev anset for grænsen for sejlbart farvand. Mercator-projektionen havde nu fået en fornuftig begrundelse, og med Wrights tabel over de voksende bredder kunne alle konstruere nye kort i denne projektion.

Mr. Bonds mirakel

Omkring et halvt århundrede efter publiceringen af Wrights tabel opdagede en vis mr. Henry Bond på mirakuløs vis en formel, som gengav tabelværdierne. Ved sammenligning af tabellen med de efterhånden gængse logaritmisk-trigonometriske tabeller fandt han, at den voksende bredde kunne udtrykkes som noget i retning af:

$$\mathbf{(3)\ 7915.704 \bullet log\ tg\ (\ 45^o + \tfrac{1}{2}\varphi\ )}$$

På dette tidspunkt var differential- og integralregningen ikke opfundet, så denne opdagelse var langtfra triviel og ingen kunne bevise sammenhængen.

Nicolaus Mercator (1619-1687)

Nicolaus Mercator, alias Claus Kaufmann, blev født i Holsten, som dengang var en del af det danske monarki, og var knyttet til Københavns Universitet. Han var ikke i familie med Gerhard Mercator, men begges fædre var handelsmænd, så deres latiniserede navn blev det samme.

Nicolaus blev meget optaget af formel (3). Var det et tilfældigt sammenfald eller var der en dybere sammenhæng, som ville kunne bekræftes med flere decimaler? Selv kunne han ikke løse problemet, som blev lidt af en besættelse for ham. I Philosophical Transactions, No. 13, June, 1666 kundgjordes, at han med Guds hjælp og en stor dusør ville løse problemet. Nu havde han imidlertid ingen formue, men troede at have gjort en stor opfindelse til gavn for skibsfarten, og det var provenuet fra denne, som ville tilfalde den, der kunne bevise formel (3). Opfindelsen ville spare tid, proviant, vand, brændsel, plads og forbedre mandskabets sundhed. Det ville være så værdifuldt, som altid at have medvind! Han røbede selvfølgelig intet om, hvorledes det skulle kunne lade sig gøre, men enkel har opfindelsen ikke været, når den virker bedst i stærk modvind, men dog ikke hvis kursen er direkte nord eller syd. Mercator blev ikke anset for nogen landsbytosse, da han så ikke var blevet medlem af det prestigefulde Royal Society og publiceret i deres tidsskrift. Tiden var en anden dengang, hvor man troede det muligt at lave guld og evighedsmaskiner, hvis man blot var snedig nok.

Mercator oplevede ikke at se gåden løst. Han rejste til Paris i 1686 for at arbejde med vandforsyningerne til Versailles, det samme projekt som Ole Rømer forlod i 1681. Historien melder ikke, om han havde opgivet sit projekt eller til det sidste prøvede at rejse risikovillig kapital til realiseringen af det.

Edmond Halley løser gåden

Edmond Halley (1656-1742) var fuldbefaren sømand, ekspert i oldgræsk matematik og astronom. Det er som astronom, han kendes i dag på grund af sin komet. Som student afbrød han studierne og rejste til Sct. Helena for at kortlægge den sydlige stjernehimmel. Han må have brugt øjne og ører godt på den lange sørejse, for han fik senere kommandoen over et skib i Royal Navy som den eneste civilist nogensinde. Skibet målte magnetisk misvisning og tidevand, og han publicerede det første kort over misvisning ("isogener"). Under et uvejr mistede skibet roret, men ved dygtigt sømandskab reddede Halley det. En officer af linjen mukkede over at skulle være under kommando af en landkrabbe og civilist. Halley gav ham blot fri og overtog selv alle hans vagter. Synet af en sund og rask mand, der blot gik og dovnede, vendte stemningen hos besætningen til Halleys fordel. Det var ikke den sædvanlige måde at håndtere opsætsighed på i Royal Navy. Halley var også utraditionel som vragfisker, idet han brugte luftfyldte dykkerklokker.

Halley indledte sin diskussion af Mercator-kortet [ref.1] ved at hævde, at det egentlig burde opkaldes efter Wright. Han omtalte også mr. Bond og Nicolas Mercator og dennes betydelige dusør med respekt. Så nævnes nogle matematikere og deres forgæves forsøg på at bevise formel (3). Halleys eget bevis er meget enkelt. Ved anvendelse af Hipparchs stereografiske projektion afbildes kuglen på tangentplanen til polen, så punktet (λ,φ) afbildes i de polære koordinater (λ,r), hvor

$$(4)\ \mathbf{r = 1/tg\,(45^{o}+½\varphi)}$$

Den stereografiske projektion er vinkeltro, så en loxodrom med kursen K afbildes i en Archimedes-spiral:

$$(5)\ \mathbf{r = \exp(-\lambda/tg\,K)}$$

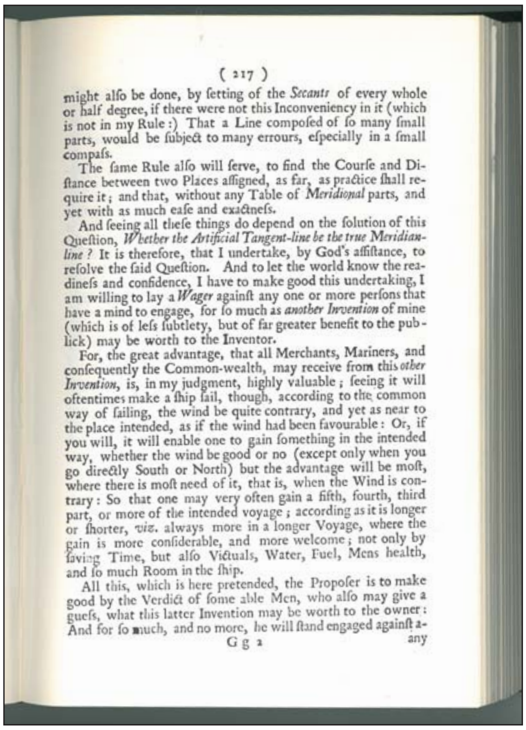
Elimineres r fås

$$(6)\ \mathbf{\lambda = tg\,K \bullet \ln tg\,(45^{o} + ½\varphi)},$$

som viser, at loxodromen bliver en ret linje ved anvendelsen af den voksende bredde givet ved (3).

Egentlig er der nu ikke mere at sige, men Halley forklarer pædagogisk detaljerne for de læsere, som måtte have glemt Archimedes (287-212 f. Kr.) og Hipparchos (190-125 f. Kr.). Til slut angives nøjagtige rækkeudviklinger til praktiske beregninger ved anvendelse af rækker for de trigonometriske funktioner, som han havde fået af sin gode ven Isaac Newton.

I en alder af 64 år overtog Halley Greenwich Observatoriet, som var bygget til navigationens fremme. Han satte sig det mål, og realiserede det, at observere månen gennem en fuld periode af baneplanens ændring (18,6 år). Interessen for månen skyldtes dens store værdi for længdebestemmelser. Hvis man kunne forudberegne dens position indenfor 2', så kunne Greenwich-tid bestemmes indenfor 4 tidsminutter og længdegraden derfor indenfor 1o.



(217)

might alſo be done, by ſetting of the *Secants* of every whole or half degree, if there were not this Inconveniency in it (which is not in my Rule :) That a Line compoſed of ſo many ſmall parts, would be ſubject to many errours, eſpecially in a ſmall compaſs.

The ſame Rule alſo will ſerve, to find the Courſe and Diſtance between two Places aſſigned, as far, as practice ſhall require it; and that, without any Table of *Meridional* parts, and yet with as much eaſe and exactneſs.

And ſeeing all theſe things do depend on the ſolution of this Queſtion, *Whether the Artificial Tangent-line be the true Meridian-line?* It is therefore, that I undertake, by God's aſſiſtance, to reſolve the ſaid Queſtion. And to let the world know the readineſs and confidence, I have to make good this undertaking, I am willing to lay a *Wager* againſt any one or more perſons that have a mind to engage, for ſo much as *another Invention* of mine (which is of leſs ſubtlety, but of far greater benefit to the publick) may be worth to the Inventor.

For, the great advantage, that all Merchants, Mariners, and conſequently the Common-wealth, may receive from this *other Invention*, is, in my judgment, highly valuable; ſeeing it will oftentimes make a ſhip ſail, though, according to the common way of ſailing, the wind be quite contrary, and yet as near to the place intended, as if the wind had been favourable: Or, if you will, it will enable one to gain ſomething in the intended way, whether the wind be good or no (except only when you go directly South or North) but the advantage will be moſt, where there is moſt need of it, that is, when the Wind is contrary: So that one may very often gain a fifth, fourth, third part, or more of the intended voyage; according as it is longer or ſhorter, *viz.* always more in a longer Voyage, where the gain is more conſiderable, and more welcome; not only by ſaving Time, but alſo Victuals, Water, Fuel, Mens health, and ſo much Room in the ſhip.

All this, which is here pretended, the Propoſer is to make good by the Verdict of ſome able Men, who alſo may give a gueſs, what this latter Invention may be worth to the owner: And for ſo much, and no more, he will ſtand engaged againſt a-

Gg 2 any

"Loxodromien" kommer til Danmark

I 1745 udgav kgl. astronom Peder Horrebow (1679-1769) en lærebog i navigation med titlen "Danske Skatkammer". Det var det første større værk om emnet på dansk, og selve titlen lader ingen i tvivl om værkets store værdi.

Horrebow var søn af en fattig fisker i Løgstør og måtte selv tjene til skolegang og studier. I 1703 kom han til København, hvor han blev assistent hos Ole Rømer (1644-1710). Der var han i fire år, indtil, som han selv skrev, "Mit pjaltede tøj til sidst ikke længere kunne beskytte mig mod nattekulden". Herefter klarede han sig ved privatundervisning blandt andet i navigation, og blev lærer på et gods. Under pesten i 1711 vendte han tilbage til København og blev skriver ved accise-tolden. Rømer betragtede ikke Horrebow som sin potentielle efterfølger, ellers havde han nok også kunnet skaffe ham et sæt tøj. Rømers kandidat døde imidlertid af pesten, og en anden kandidat fulgte kort efter.

I 1714 fik Horrebow Rømers embeder som direktør for observatoriet på Runde Tårn og kgl. astronom. Som professor blev han kollega med Ludvig Holberg (1684-1754). De kom i strid og førte processer mod hinanden. Det siges, at Holberg brugte Horrebow som model til Erasmus Montanus. Horrebow var blevet lidt til grin for et ugyldigt bevis for det Kopernikanske verdensbillede, det hvor solen står stille.

Horrebow forgudede Rømer og fortsatte så vidt muligt hans arbejde, men beklagede sig over, at Rømer ikke havde betroet ham formålet med meget af det arbejde, der blev lavet dengang, han var hans assistent.

Horrebow behandlede i flere kapitler problemet med at finde ændringerne i geografisk længde og bredde ud fra sejlede distancer og kurser og giver omfattende tabeller af den type, som vi i dag nærmest vil betegne "Tachymetertabeller". At tage hensyn til meridiankonvergensen betragtede han "Loxodromien" som en særlig videnskab. Han var bekendt med Wrights tabeller, men mente selv han havde bedre metoder. Der er særlig én, som han var meget stolt over. Den benytter middelværdien af log cosφ for største-, mindste- og middel-bredde i intervallet. Det fremhævedes, at han fandt metoden i sin ungdom og kun havde røbet den til en ung navigatør, som døde under en rejse til Ostindien. Nu blev den imidlertid stillet til rådighed for alle, og han forventede en vis taknemmelighed for det! Der gives ingen bevis for metoden baseret på 3 punkter, og nøjagtigheden kunne vi i dag let gøre større. Han påstod, at Gerhard Mercator brugte Wrights tabeller, men formel (3) og Halleys bevis nævnes slet ikke. Horrebows indsigt i emnet synes stærkt begrænset. En stor mangel er, at gyldighedsområdet for de vidtløftige femcifrede logaritmiske regninger ikke angives. I praksis ville disse problemer i reglen løses grafisk ved konstruktion på selve søkortet i Mercators projektion. Dette er kortets store praktiske værdi, men det nævnes ikke. Som lærebog i praktisk navigation har bogen næppe haft den store betydning. Det hele virker meget virkelighedsfjernt. Der var vanskeligheder med at finde et passende sprogbrug og kompasset foresloges inddelt i 36 streger i stedet for de gængse 32.

Transverse Mercator

Til landmåling er Mercators projektion ubrugelig på vore bredder (φ~56o). Betragt et punkt og et andet 1 km øst herfor, svarende til længdeforskellen Δλ = 58". Tangenten til storcirkelbuen drejes mellem disse to punkter ifølge formel (1) vinklen.

$$(7)\ \sin(\varphi) \bullet 58'' = 48''$$

Retningskorrektionen er vinklen mellem tangenten og korden og bliver derfor 48"/2 = 24", hvilket er uacceptabelt stort. Det undgås imidlertid ved at afbilde en nærliggende meridian på en tangerende cylinder. Som basis for retvinklede koordinater i planen blev denne konforme projektion, betegnet Gauss-Krüger eller Transverse Mercator, indført af C. F. Gauss (1777-1855). Dette er tidligere behandlet i fagbladet Landinspektøren (bd. 42, nr.1 (2004) 34).

I det globale Universal Transverse Mercator (UTM) har zonerne centralmeridianerne 3o, 9o, 15o, … Nabozonerne er således på vore bredder drejet 6o•sin(56o) = 5,0o i forhold til hinanden. Med de største afstande her i landet (ca. 360 km) giver det ændringer i de relative koordinater på 30 km, så kvadratnettene i nabozoner bliver meget forskellige. Kun ved ækvator (φ = 0o) undgår man denne drejning. Dette blev udnyttet på genial vis i den danske kortprojektion fra 1934. Denne projektions "nordpol" blev placeret på Generalstabens centralmeridian 90o nord for et centralt punkt. Herved bliver forskellen mellem Jylland/Fyn og Sjælland kun omkring 20 m, hvilket ikke mærkes i kort med lille målestok. De to afsnit fremtræder derfor som en enkelt, sammenhængende, projektion og muliggør for eksempel den rationelle MK-kortbladsinddeling. En stor fordel er, at de nye systemer ikke blev drejet i forhold til det gamle, hvilket letter overgangen. Den praktiske definition af systemerne blev dog en smule anderledes end skitseret her.

Referencer

[1] Edmond Halley: An Easie Demonstration of the Analogy of the Logarithmic Tangents to the Meridian Line or sum of Secants: with various Methods for computing the same to the utmost Exactness. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1695, vol. XIX, pp. 202-214.